REFERÁTY

O STABILITĚ INTEGRÁLŮ SOUSTAVY DIFERENCIÁLNÍCH ROVNIC V KOMPLEXNÍM OBORU

(Vlastní referát o přednášce proslovené v Matem. obci pražské dne 13. února 1956.)

Budiž dána soustava

$$\dot{z}_j = \Sigma\, c_{jk} z_k + Z_j(t, z_1, \ldots, z_n)\,, \tag{1}$$

kde z_j jsou komplexní funkce reálné proměnné t, c_{jk} jsou komplexní konstanty a komplexní funkce Z_j vyhovují těmto podmínkám:

a) Z_j jsou definovány a jsou spojité v oboru D: $\|z\| \leqq H$ $(H > 0)$, $t \geqq 0$,

b) $\|Z_j\| \leqq K\|z\|$ $(K > 0)$ (odtud již plyne $Z_j\ (t, 0, \ldots, 0) = 0$),

c) $\lim \dfrac{Z_j}{\|z\|} = 0$ pro $\|z\| \to 0$, $t \to \infty$.

Soustavou (1) se za těchže předpokladů zabýval již Perron a odvodil věty teorie prvého přiblížení, t. j. věty, které nám dovolují rozhodnout o stabilitě triviálního řešení soustavy (1) na základě soustavy prvého (lineárního) přiblížení $\dot{z}_j = \Sigma\, c_{jk} z_k$.

Takové věty se nám podaří odvodit, jestliže buď všechny kořeny charakteristické rovnice

$$|c_{jk} - \varrho\delta_{jk}| = |C - \varrho E| = 0$$

mají záporné reálné části (pak je triviální řešení soustavy (1) asymptoticky stabilní), nebo má-li alespoň jeden kořen kladnou reálnou část (pak je triviální řešení nestabilní).

Perron k odvození vět z teorie prvého přiblížení užil vět o závislosti integrálů soustavy (1) na pravých stranách a na počátečních podmínkách (při této metodě nehraje žádnou roli, zda jsou z_j reálné nebo komplexní).

V přednášce bylo naznačeno, jakým způsobem lze týchž výsledků dosáhnout pomocí druhé Ljapunovovy metody.

Případy, kdy kořeny charakteristické rovnice mají vedle kořenů se zápornou reálnou částí alespoň jeden kořen s nulovou reálnou částí a žádný kořen s kladnou reálnou částí, jsou „kritické", t. j. nerozhodnutelné pomocí vět teorie prvého přiblížení. Tyto případy v komplexním oboru zatím nebyly studovány.

V dalším budeme předpokládat, že Z_j jsou holomorfní funkce $z_1, \ldots, z_n$ začínající členy alespoň 2.st., nezávislé na t. Ukazuje se, že v případě jednoho nulového kořene je triviální řešení soustavy (1) (až na jistý výjimečný případ, kdy je stabilní) vždy nestabilní. (To plyne snadno odtud, že triviální řešení rovnice $\dot{z} = c_k z^k + \ldots$, $(c_k \neq 0)$ je vždy nestabilní.) V případě jednoho ryze imaginárního kořenu je naopak triviální řešení vždy stabilní. To opět snadno plyne odtud, že triviální řešení rovnice $\dot{z} = i\mu z + c_2 z^2 + \ldots$ (μ je reálné) je stabilní; dokonce platí, že všechna řešení v dostatečně malém okolí počátku jsou periodická s touž periodou $2\pi/\mu$. Částečně se podařilo též rozřešit případ dvou ryze imaginárních kořenů, ale výsledek je příliš složitý na to, aby zde mohl být uveden.

Otto Vejvoda, Praha.