Časopis pro pěstování matematiky

Alfons Hyška

Poznámka k numerickému řešení rovnic

Časopis pro pěstování matematiky, Vol. 81 (1956), No. 2, 229--240

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/117191

Časopis pro pěstování matematiky, roč. 81 (1956)

POZNÁMKA K NUMERICKÉMU ŘEŠENÍ ROVNIC

ALFONS HYŠKA, Olomouc.

(Došlo dne 6. července 1955.)

DT : 512.34, 518.6

Při numerickém řešení rovnic jako při všech přibližných výpočtech je kromě určení výsledku stejně důležité udat nepřesnost výsledku. Ale o tom se v tomto případě zpravidla vůbec nemluví, stejně jako při jiných přibližných výpočtech. Také v posledním pojednání o numerickém řešení rovnic (viz [5]) uvádí FR. BRANDLER zajímavé přibližné metody pro numerické řešení rovnic třetího stupně, ale neuvádí, jak určit nepřesnost výsledku. A ukazuje také na jednom konkretním příkladě, že nemá valný praktický význam určovat aritmetický průměr výsledků, získaných metodou regula falsi a metodou Newtonovou: Uvážíme-li podstatnou různost obou metod, nemůžeme ani nic jiného očekávat.

A přece již prof. M. LERCH pojednal o nepřesnosti při numerickém výpočtu kořenů rovnic a také v knize „Teorie a prakse numerického počítání" prof. V. LÁSKY a V. HRUŠKY jsou úvahy o této nepřesnosti.

V tomto příspěvku chci se touto nepřesností zabývat podrobněji a opravit jednu poznámku z citované knihy.

Vyšetřování nepřesností při numerickém výpočtu kořenů nás povede také k tomu, jak můžeme v praxi metody výpočtu kořenů zpřesnit.

A. **Obecné úvahy.** Vyšetřujme rovnici

$$f(x) = 0 \tag{1}$$

a učiňme o funkci $f(x)$ tyto předpoklady:

1. $f(x)$ má v jistém okolí hledaného kořene x_0 derivace až do n-tého řádu včetně ($n \geqq 1$);

2. v tomto okolí hledaného kořene x_0 je všude

$$f'(x) \neq 0\,; \tag{2}$$

z toho plyne, že $f(x)$ je aspoň v tomto okolí funkce prostá a proto také schopna inverse.

3. Známe již přibližnou hodnotu x_1 hledaného kořene, která ovšem leží v uvedeném okolí správné hodnoty x_0.

Je snadno patrno, že tyto předpoklady jsou zpravidla splněny a neomezují nijak řešení problému.

V uvažovaném okolí bodu x_0 tedy platí

$$y = f(x) \quad \Leftrightarrow \quad x = g(y)\,, \tag{3}$$

$$y_0 = f(x_0) = 0\,, \tag{3a}$$

$$y_1 = f(x_1) \quad \Leftrightarrow \quad x_1 = g(y_1)\,. \tag{3b}$$

4. Učiňme konečně poslední předpoklad, že je možno inversní funkci $g(y)$ rozvinout v Taylorovu řadu podle mocnin $y - y_1$:

$$x = g(y) = g(y_1) + \left(\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}y}\right)_1 (y - y_1) + \left(\frac{\mathrm{d}^2g}{\mathrm{d}y^2}\right)_1 \frac{(y - y_1)^2}{2!} + \ldots + \\ + \left(\frac{\mathrm{d}^{n-1}g}{\mathrm{d}y^{n-1}}\right)_1 \cdot \frac{(y - y_1)^{n-1}}{(n-1)!} + \ldots\,. \tag{4}$$

Při určování kořene dosadíme sem $y_0 = 0$; podle (3a) a (3b) pak dostaneme

$$x_0 = x_1 - \left(\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}y}\right)_1 y_1 + \left(\frac{\mathrm{d}^2g}{\mathrm{d}y^2}\right)_1 \cdot \frac{y_1^2}{2!} - \ldots + \\ + (-1)^{n-1} \left(\frac{\mathrm{d}^{n-1}g}{\mathrm{d}y^{n-1}}\right)_1 \cdot \frac{y_1^{n-1}}{(n-1)!} + \ldots\,. \tag{4a}$$

Pro numerický výpočet potřebujeme ještě znát derivace inversní funkce $g(y)$. Ty určíme snadno podle základních pravidel diferenciálního počtu (přitom budeme používat obvyklého označení čárek k označení derivace podle nezávisle proměnné x):

$$\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}y} = \frac{1}{\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}} = \frac{1}{f'(x)} = \frac{1}{y'}\,,$$

$$\frac{\mathrm{d}^2g}{\mathrm{d}y^2} = -\frac{y''}{y'^2} \cdot \frac{1}{y'} = -\frac{y''}{y'^3}\,,$$

$$\frac{\mathrm{d}^3g}{\mathrm{d}y^3} = -\frac{y'''y' - 3y''^2}{y'^5}\,, \tag{5}$$

$$\frac{\mathrm{d}^4g}{\mathrm{d}y^4} = -\frac{y^{\mathrm{IV}}y'^2 - 10y'''y''y' + 15y''^3}{y'^7}\,,$$

$$\frac{\mathrm{d}^5g}{\mathrm{d}y^5} = -\frac{y^{\mathrm{V}}y'^3 - 15y^{\mathrm{IV}}y''y'^2 - 10y'''^2y'^2 + 105y'''y''^2y' - 105y''^4}{y'^9}\,, \quad \text{atd.}$$

V praxi s těmito členy vystačíme. Použijeme-li ještě indexu 1 k vyznačení, že se jedná o hodnoty funkce resp. jejích derivací v bodě $x = x_1$, pak místo rozvoje (4a) můžeme psát po jednoduché úpravě

$$x_0 = x_1 - \frac{y_1}{y_1'} - \left(\frac{y_1}{y_1'}\right)\left(\frac{y_1}{y_1'^2}\right) \cdot \frac{y_1''}{2!} + \left(\frac{y_1}{y_1'}\right) \cdot \left(\frac{y_1}{y_1'^2}\right)^2 \cdot \frac{y_1'''y_1' - 3y_1''^2}{3!} - \\ - \left(\frac{y_1}{y_1'}\right)\left(\frac{y_1}{y_1'^2}\right)^3 \cdot \frac{y_1^{\mathrm{IV}}y_1'^2 - 10y_1'''y_1''y_1' + 15y_1''^3}{4!} + \ldots\,, \tag{6}$$

po případě i s méně členy, když se nám nejedná o velikou přesnost výsledku, na př.

$$x_0 \doteq x_1 - \frac{y_1}{y_1'} + \left(\frac{y''}{y'^3}\right)_1 \cdot \frac{y_1^2}{2!} .$$

První dva členy výrazu na pravé straně určují výsledek podle metody Newtonovy a třetí člen udává zhruba nepřesnost tohoto výsledku.

V uvedeném článku řeší Fr. Brandler rovnici

$$x^3 - 3x + 1 = 0$$

a vychází z přibližné hodnoty $x_1 = 0{,}35$; k dané funkci sestavme nejprve tabulku jejich derivací:

$$y = x^3 - 3x + 1 , \quad y' = 3x^2 - 3 , \quad y'' = 6x , \quad y''' = 6 ;$$

všechny vyšší derivace jsou identicky rovny nule. Pro hodnotu $x_1 = 0{,}35$ dostaneme odtud:

$$y_1 = -0{,}007\,125 , \quad y_1' = -2{,}63\,25 , \quad y_1'' = +2{,}10 , \quad y_1''' = +6 .$$

K určení největší možné nepřesnosti určíme absolutní maximum absolutní hodnoty výrazu $\frac{y''}{y'^3}$ jako funkce proměnné y. Tento výraz je však právě opačný k výrazu $\frac{\mathrm{d}^2g}{\mathrm{d}y^2}$ (viz (5)) a jeho derivace podle proměnné y je tedy také opačná k další derivaci z té soustavy

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}\left(\frac{y''}{y'^3}\right) = -\frac{\mathrm{d}^3g}{\mathrm{d}y^3} = \frac{y'''y' - 3y''^2}{y'^5} = -\frac{18}{y'^5}(5x^2 + 1) > 0$$

v okolí bodu x_1, neboť $y_1' < 0$. Funkce $\frac{y''}{y'^3}$ tedy v tom okolí stoupá; pro $y = y_1$ je to však číslo záporné,

$$\frac{y_1''}{y_1'^3} = \frac{+2{,}10}{(-2{,}6325)^3} < 0 ;$$

hledanou absolutně maximální hodnotu absolutní hodnoty tohoto výrazu tedy dostaneme, když zvolíme za y hodnotu nejmenší; ale ($y' < 0 \Rightarrow y$ klesá) nejmenší hodnotu veličiny y dostaneme, když za proměnnou x volíme hodnotu největší. Pro polovinu šířky intervalu dostáváme

$$\left|\frac{y_1}{y_1'}\right| = \frac{0{,}007\,125}{2{,}63\,25} \doteq 0{,}003 ,$$

nejmenší hodnotu veličiny y dostaneme při volbě $x = 0{,}353$

$$\left|\left(\frac{y''}{y'^3}\right)\right|_{\max} = \frac{6 . 0{,}353}{27(1 - 0{,}353)^3} \doteq 0{,}116\,9 ;$$

nepřesnost při výpočtu Newtonovou metodou je

$$|\Delta x| \leqq 0{,}116\,9 \,.\, \frac{0{,}007\,125^2}{2} \doteq 0{,}0^5 3 \,.$$

Budeme tedy druhý člen $\frac{y_1}{y_1'}$ počítat na 6 desetinných míst:

$$x_{11} = 0{,}35 - 0{,}002\,706 = 0{,}347\,294 \,,$$

přesnější hodnota kořene je	0,347 296 4
a skutečná nepřesnost	0,000 002·4 $< 0{,}0^5 3$.

Podle úpravy, kterou jsme provedli v rozvoji (6), poznáme podle autorů „Teorie a prakse numerického počítání" snadno, že tato řada konverguje patrně tím rychleji, čím je menší absolutní hodnota podílu (viz [3], str. 286)

$$|q_1| = \left| \frac{y_1}{y_1'^2} \right| \,. \tag{7}$$

Tento úsudek není naprosto oprávněn; jednak koeficienty

$$\frac{y_1''}{2}\,,\quad \frac{y_1'''y_1' - 3y_1''^2}{3!}\,,\quad \frac{y_1^{\mathrm{IV}}y_1'^2 - 10y_1'''y_1''y_1' + 15y_1''^3}{4!} \cdots$$

mohou svou velikostí vliv činitele q_1^k zcela porušit, jak hned ukážeme, jednak není výraz v čitateli a jmenovateli stejného stupně.

V daném případě je $|q_1| = 0{,}007\,125 : 2{,}6325^2 \doteq 0{,}001\,028$, tedy číslo poměrně velmi malé. Použijeme-li k výpočtu přesnější hodnoty kořene čtyř členů, určíme opět nejprve maximální nepřesnost. Úvahou obdobnou předešlé dostaneme

$$\overline{|\Delta x|} \leqq 0{,}0^9 120 \,;$$

budeme tedy počítat každý člen pro jistotu na 12 desetinných míst:

$$\begin{array}{rr} x_{12} \doteq 0{,}35 & -\ 0{,}002\,706\,552\,707 \\ +\ 0{,}000\,002\,921\,823 & -\ 0{,}000\,000\,013\,840 \\ \hline 0{,}350\,002\,921\,823 & -\ 0{,}002\,706\,566\,547 \,, \end{array}$$

$$x_{12} \doteq 0{,}347\,296\,355\,276 \,;$$

správněji je

$$x \doteq 0{,}347\,296\,355\,333 \,,$$

skutečná nepřesnost tedy je $0{,}0^{10}57 < 0{,}0^9 120$.

Potřebujeme-li znát kořen x_0 ještě přesněji, určíme kořeny rozvoje

$$f(x - x_{12})$$

pomocí Hornerova schematu. Přitom zpravidla celý výpočet rozdělíme na několik kroků, v daném případě na tři:

$$
\begin{aligned}
u &= x - 0{,}35\,, \\
v &= u + 0{,}002\,7\,, \\
w &= v + 0{,}000\,003\,644\,7\,.
\end{aligned} \tag{8}
$$

Již při druhém kroku dostaneme vhodnou rovnici (levou stranu příslušné rovnice budeme označovat příslušným velkým písmenem):

$$V = v^3 + 1{,}041\,9\,v^2 - 2{,}628\,148\,13\,v - 0{,}0^59\,615\,183\,. \tag{8a}$$

Přitom budeme v dalším vycházet od přibližné hodnoty kořene $v_1 = 0$ (pro původní rovnici to tedy značí, že vycházíme od přibližné hodnoty $x_1 = 0{,}347\,3$). Je tedy

$$V_1 = -\,0{,}0^59\,615\,183\,,\quad V_1' = -\,2{,}638\,148\,13\,,\quad V_1'' = +\,2{,}083\,8\,,\quad V_1''' = 6\,.$$

Příslušný podíl je

$$|q_1| = \left|\frac{V_1}{V_1'^2}\right| = 0{,}0^59\,615\,183 : 2{,}638\,148\,13^2 \doteq 0{,}0^51\,382\,. \tag{9}$$

Již při použití prvních tří členů dostaneme

$$|\Delta v| = |\Delta x| \leqq 0{,}0^{16}35\,.$$

Počítejme proto každý jednotlivý člen na 18 desetinných míst:

$$
\begin{array}{rr}
x_0 \doteq & 0{,}347\,3 \\
 & -0{,}000\,003\,644\,671\,385\,454 \\
\hline
 & 0{,}347\,296\,355\,328\,614\,546 \\
 & +0{,}000\,000\,000\,005\,246\,185 \\
\hline
x_0 \doteq & 0{,}347\,296\,355\,333\,860\,731\,, \\
\text{správněji je}\quad x \doteq & 0{,}347\,296\,355\,333\,860\,697\,,
\end{array} \tag{10}
$$

nepřesnost je tedy $0{,}0^{16}34 < 0{,}0^{16}35$.

Ukažme ještě, jak velikost podílu $|q_1|$ může klamat: Řešme rovnici $x^3 + 280x^2 + 2x - 3 = 0$ a volme za vychozí bod $x_2 = 1$:

$$y_2 = 280\,,\quad y_2' = 565\,,\quad y_2'' = 566\,,\quad y_2''' = 6\,,$$

$$|q_1| = \frac{280}{565^2} = 0{,}0^3\,877\,,$$

tedy opět číslo poměrně malé. Ve skutečnosti dostaneme tento rozvoj:

$$
\begin{array}{r}
x_0 \doteq 1 \\
-0{,}495\,6 \\
-0{,}123\,0 \\
-0{,}060\,9 \\
-0{,}037\,6 \\
\hline
0{,}282\,9\,,
\end{array}
$$

kdežto správná hodnota je kolem 0,099 98.

B. **Přibližné řešení kvadratické rovnice.** U kvadratické funkce je

$$f^{(2+k)}(x) = 0 \tag{11}$$

pro každé přirozené k a pro všechny hodnoty proměnné x.

Pak je

$$\begin{gathered}\frac{d^2g}{dy^2} = -\frac{y''}{y'^3}, \quad \frac{d^3g}{dy^3} = +\frac{3 \cdot y''^2}{y'^5}, \quad \frac{d^4g}{dy^4} = -\frac{15y''^3}{y'^7}, \\ \frac{d^5g}{dy^5} = +\frac{105y''^4}{y'^9}, \quad \frac{d^6g}{dy^6} = -\frac{945y''^5}{y'^{11}}, \ldots\end{gathered} \tag{12}$$

Taylorova řada pro výpočet kořene tedy zní

$$\begin{gathered}x_0 = x_1 - \left(\frac{y_1}{y_1'}\right) - \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{y_1}{y_1'}\right) \cdot \left(\frac{y_1 y_1''}{y_1'^2}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{y_1}{y_1'}\right)\left(\frac{y_1 y_1''}{y_1'^2}\right)^2 - \\ - \frac{5}{8}\left(\frac{y_1}{y_1'}\right)\left(\frac{y_1 y_1''}{y_1'^2}\right)^3 - \frac{7}{8}\left(\frac{y_1}{y_1'}\right)\left(\frac{y_1 y_1''}{y_1'^2}\right)^4 - \frac{21}{16} \cdot \left(\frac{y_1}{y_1'}\right)\left(\frac{y_1 y_1''}{y_1'^2}\right)^5 - \ldots\end{gathered} \tag{13}$$

Tato řada konverguje patrně tím rychleji, čím je menší absolutní hodnota podílu

$$|q_2| = \left|\frac{y_1 y_1''}{y_1'^2}\right| ; \tag{13a}$$

tento výrok je již aspoň částečně opodstatněn. Koeficienty

$$\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{5}{8}, \frac{7}{8}, \frac{21}{16}, \ldots$$

jsou čísla, jejichž podíl je shora ohraničen číslem 2, a q_2 je v čitáteli i jmenovateli stejného stupně.

C. **Výjimečné případy.** V některých výjimečných případech, když je na př. kořen blízko některému jednoduchému racionálnímu číslu, můžeme postupovat ještě jinak. Funkci $f(x)$ nahradíme jinou funkcí $u = g(x)$, která nechť má tyto vlastnosti:

1. má týž kořen x_0;

2. má některé vyšší derivace, na př. u_1'', u_1''' (po příp. obě) rovny nule;

3. řada pro výpočet kořene pomocí funkce $g(x)$ konverguje rychleji než pomocí funkce původní.

Druhá a třetí podmínka mají ten význam, že v řadě (6) některé členy vymizí a při rychlejší konvergenci stačí i k přesnějšímu určení hledaného kořene několik málo prvních členů.

První podmínce vyhovuje na př. i funkce

$$w(x) = a \cdot y , \tag{14}$$

kde a je konstanta; přitom podíl

$$|q_1| = \left|\frac{w_1}{w_1'^2}\right|,$$

který udávají autoři „Teorie a prakse numerického počítání" jako charakteristický k určení rychlosti konvergence uvažované řady, by byl při $a > 1$ menší než původní podíl (6a); je totiž

$$w = a \, . \, y \quad \Rightarrow \quad w^{(k)} = a \, . \, y^{(k)} \tag{14a}$$

a odtud

$$\frac{w_1}{w_1'^2} = \frac{1}{a} \, . \, \frac{y_1}{y_1'^2} \, .$$

Bylo by však omylem se domnívat, že nová řada pro funkci w konverguje rychleji než řada původní; podle (14a) se násobí každá derivace funkce y číslem a. Všimněme si přitom, že jednotlivé členy řady (6) mají výrazy v čitateli i jmenovateli homogenní vzhledem k proměnným $y_1, y_1', y_1'' \ldots$, a to v čitateli i jmenovateli vždy stejného stupně. Je proto vhodnější studovat vždy podíl

$$q_2 = \frac{u_1 \, . \, u_1''}{u_1'^2} \, .$$

Vhodnou funkcí, která při vhodném čísle k vyhovuje našim podmínkám, je

$$u = \frac{y}{y + k} \, , \tag{15}$$

pro kterou dostáváme

$$u' = k \, . \, \frac{y'}{(y + k)^2} \, , \qquad u'' = k \, . \, \frac{y''(y + k) - 2y'^2}{(y + k)^3} \, ,$$
$$u''' = k \, . \, \frac{y'''(y + k)^2 - 6y''y'(y + k) + 6y'^3}{(y + k)^4} \, . \tag{15a}$$

Omezíme-li se pro okamžik na případ algebraické rovnice 3. stupně, je $y^{(3+k)} = 0$ pro každé přirozené k a pro všechny hodnoty proměnné x. Pak je

$$u^{\mathrm{IV}} = k \, . \, \frac{-\,8y'''y'(y + k)^2 - 6y''^2(y + k)^2 + 36y''y'^2(y + k) - 24y'^4}{(y + k)^5} \, . \tag{15b}$$

Konstantu k pak určíme tak, aby bylo $u_1'' = 0$; vyšší derivace v řadě (6) se nám tím značně zjednoduší a kromě toho jeden člen řady vymizí. Příslušné k_0 je dáno vztahem

$$y_1 + k_0 = \frac{2y_1'^2}{y_1''} \, . \tag{15c}$$

Při této volbě označme novou funkci

$$U = \frac{y}{y + k_0} \, , \qquad U_1'' = 0 \, . \tag{16}$$

Pro kořen x_0 tak dostáváme rozvoj

$$x_0 = x_1 - \frac{U_1}{U_1'} + \frac{U_1'''U_1^3}{3!\,U_1'^4} - \frac{U_1^{\mathrm{IV}}U_1^4}{4!\,U_1'^5} + \dots \tag{16a}$$

Kdybychom mohli zanedbat vliv koeficientů

$$U_1''', U_1^{\mathrm{IV}}, \dots, \tag{17}$$

mohli bychom soudit, že řada (16a) — počínaje třetím členem — konverguje patrně tím rychleji, čím je v absolutní hodnotě menší podíl

$$|q_3| = \left|\frac{U_1}{U_1'}\right| .$$

Ale koeficienty (17) činí tento úsudek ilusorním.

Této metody můžeme s úspěchem použít tehdy, když se hledaný kořen nalézá blízko vrcholu, kdy ostatní metody selhávají. Uvažme na př. rovnici $x^3 + 280x^2 + 2x - 3 = 0$, kterou jsme již v první části řešili. Její kladný kořen je blízko nuly a jeden vrchol grafického znázornění levé strany je také blízko nuly, totiž v bodě $-0{,}0037$.

Vypišme nejprve hodnotu levé strany dané rovnice a jejích derivací v bodě $x_1 = 0$: $y_1 = -3$, $y_1' = 2$, $y_1'' = 560$, $y_1''' = 6$; v bodě $x_2 = 1$ je $y_2 = 280$.

Metodou regula falsi bychom dostali pro kořen přibližnou hodnotu $+0{,}0106$, metodou Newtonovou pak hodnotu jistě nesprávnou $+1{,}5$ (protože kořen leží mezi 0 a 1). Také naše řada (6) v tomto případě selhává: $q_1 = -\frac{3}{4}$, ale skutečné první členy řady jsou

$$\tfrac{3}{2} - 9.35 + \tfrac{9}{16} . 235\,197 \dots .$$

Ani výpočet pomocí bodu $x_2 = 1$ nevede rychle k cíli, jak jsme již dříve ukázali. Pro naši substituční funkci dostaneme nejprve z rovnice (15c)

$$k_0 - 3 = \tfrac{1}{70}, \qquad k_0 = \tfrac{211}{70},$$

$$U_1 = -210, \qquad U_1' = 140.211$$

a odtud přibližně

$$|q_3| \doteq \tfrac{1}{140},$$

tedy číslo dosti malé. Kromě toho určíme dále:

$$U_1''' = -6.36.199.211.70^2, \qquad U_1^{\mathrm{IV}} = 8.12.211.211.\,19\,599 .$$

Pomocí těchto hodnot dostaneme

$$x_0 \doteq 0{,}0071 + 0{,}0901 - 0{,}0070 = 0{,}0902 ,$$

také ještě číslo dost vzdálené správné hodnoty 0,099 98, ale ze všech ostatních výsledků nejbližší.

Uvažme konečně substituční funkci ve tvaru

$$v = y^k, \qquad k > 0, \tag{18}$$

$$v' = k \cdot y^{k-1} . y', \qquad v'' = k(k-1)\, y^{k-2} . y'^2 + k . y^{k-1} y'' ; \tag{19}$$

odtud podíl

$$q_2 = \frac{vv''}{v'^2} = \frac{ky^{2k-2}[(k-1)y'^2 + yy'']}{k^2y^{2k-2}y'^2} = \left(1 - \frac{1}{k}\right) + \frac{1}{k} \cdot \frac{yy''}{y'^2} . \qquad (20)$$

Odtud vidíme, že se tato funkce sama nehodí k zjednodušení numerického výpočtu. Ostatně je to patrno i z toho, že křivka (18) se při $k > 1$ dotýká v bodě $x = x_0$ osy x, při $k < 1$ pak rovnoběžky s osou y.

Přesto však můžeme uvedené funkce při výpočtu kořene použít. Volme dvě malá k (na př. 2 a 3) a z funkcí

$$y\,, \quad v = y^2\,, \quad w = y^3 \qquad (21)$$

sestavme lineární kombinaci

$$V = a \,.\, y + b \,.\, v + c \,.\, w\,. \qquad (22)$$

Derivace této funkce budeme počítat jako stejné lineární kombinace

$$V^{(i)} = ay^{(i)} + bv^{(i)} + cw^{(i)}\,. \qquad (22a)$$

Konstanty a, b, c pak volme tak, aby dvě derivace funkce V, totiž V'' a V''', byly rovny nule.

Místo řady (5) pak dostaneme řadu

$$x_0 = x_1 - \frac{V_1}{V_1'} - \frac{V_1^{\mathrm{IV}}}{V_1'^5} \cdot \frac{V_1^4}{4!} + \frac{V_1^{\mathrm{V}}}{V_1'^6} \cdot \frac{V_1^5}{5!} - \dots\,. \qquad (23)$$

U funkce V však zpravidla čísla V_1^{IV}, V_1^{V} a další derivace v uvažovaném bodě jsou čísla poměrně veliká. Není proto účelné počítat další členy řady (23); v jejím „podílu" vystupuje výraz

$$-\frac{V_1}{V_1'}\,, \qquad (24)$$

ale to je vlastně první opravný člen té řady. Její konvergence závisí na tom, jak blízko k hledanému kořenu jsme se již hodnotou x_1 přiblížili.

Vcelku můžeme říci, že výhodou řady (23) je to, že po prvním členu dva členy řady původní vymizí — v tomto případě je tedy určování kořene metodou Newtonovou mnohem přesnější než určování kořene pomocí funkce původní. Nevýhodou je ovšem nutnost sestavit si tabulku derivací jednotlivých funkcí y^2 a y^3 a výsledné lineární kombinace (22).

Sestavme nejprve obecné vzorce pro derivace funkcí y^2 a y^3.

$$\begin{aligned}
v &= y^2\,, & w &= y^3\,,\\
v' &= 2yy'\,, & w' &= 3y^2y'\,,\\
v'' &= 2y'^2 + 2yy''\,, & w'' &= 6yy'^2 + 3y^2y''\,,\\
v''' &= 6y' \,.\, y'' + 2y \,.\, y'''\,, & w''' &= 6y'^3 + 18y \,.\, y' \,.\, y'' + 3y^2y'''\,,\\
v^{\mathrm{IV}} &= 6y''^2 + 8y' \,.\, y''' + 2y \,.\, y^{\mathrm{IV}}\,, & w^{\mathrm{IV}} &= 36y'^2y + 18yy''^2 + 24yy' \,.\, y''' + 3y^2y^{\mathrm{IV}}\,,\\
v^{\mathrm{V}} &= 20y''y''' + 10y' \,.\, y^{\mathrm{IV}} + 2y \,.\, y^{\mathrm{V}}\,, & w^{\mathrm{V}} &= 90y' \,.\, y''^2 + 60y'^2y''' + 60yy''y''' +\\
& & &\quad + 30yy' \,.\, y^{\mathrm{IV}} + 3y^2y^{\mathrm{V}}\,.
\end{aligned}$$

Ukažme použití této metody při řešení rovnice

$$x^3 + 2x^2 + 93x - 97 = 0 .$$

Je tedy $y = x^3 + 2x^2 + 93x - 97$, $y' = 3x^2 + 4x + 93$,
$y'' = 6x + 4$, $y''' = 6$;

všechny další derivace dané funkce jsou identicky rovny nule.

Jeden kořen této rovnice je blízko číslu 1:

$$x_1 = 1 , \quad y_1 = -1 , \quad y_1' = 100 , \quad y_1'' = 10 , \quad y_1''' = 6 .$$

Podle posledních vzorců si nyní snadno sestavíme tuto tabulku:

$x_1 = 1$	funkce y	funkce y^2	funkce y^3
hodnota funkce	—1	+1	—1
hodnota 1. derivace	+100	—200	+300
hodnota 2. derivace	10	+19 980	—59 970
hodnota 3. derivace	6	5 988	5 982 018
hodnota 4. derivace	0	5 400	3 583 800
hodnota 5. derivace	0	1 200	4 496 400
násobíme	a-krát	b-krát	c-krát

Násobme hodnoty druhých a třetích derivací po řadě čísly a, b, c. Podmínka (22a) pak zní

$$\begin{array}{r} 10a + 19\,980b - \quad 59\,970c = 0/.3 \\ 6a + \;\; 5\,988b + \;\; 5\,982\,018c = 0/.(-5) \\ \hline 30\,000b - 30\,090\,000c = 0 \, ; \end{array}$$

jí vyhovují na př. čísla $c = 1$, $b = 1\,003$, a k tomu je z první dané rovnice $a = 1\,997\,997$.

Sestavme si nyní tabulku hodnot funkce a jejích derivací pro tuto lineární kombinaci V_1:

$$V_1 = 1\,998\,999 , \quad V_1' = -\,199\,999\,000 , \quad V_1'' = V_1''' = 0 ,$$
$$V_1^{IV} = 9\,000\,000 , \quad V_1^{V} = 5\,700\,000 .$$

Odtud již snadno dostaneme pro výpočet kořene tyto členy:

$$\begin{array}{r} x_0 \doteq 1{,}009\,995\,044\,975\,225 \\ +\; 0{,}000\,000\,000\,018\,713 \\ +\; 0{,}000\,000\,000\,000\,024 \\ \hline x_0 \doteq 1{,}009\,995\,044\,993\,962 \, . \end{array}$$

D. **O aritmetickém průměru.** Promluvme si nakonec o určování aritmetického průměru. Přitom budeme předpokládat, že se derivace dané funkce v okolí kořene mění poměrně málo. Největším změnám je podrobena funkce sama. Zvolme takové dva body, jejichž funkční hodnoty jsou aspoň přibližně právě opačné, t. j.

$$y_1 + y_2 \doteq 0 .$$

Pak liché členy řady (6), počínaje třetím, t. j. členy

$$-\frac{y_1''}{y_1'^3} \cdot \frac{y_1^2}{2!}, \dots ,$$

jsou přibližně shodné s odpovídajícími členy v obdobném rozvoji pro y_2; naproti tomu sudé členy, t. j. členy

$$-\frac{y_1}{y_1'}, \quad \frac{y_1'''y_1' - 3y_1''^2}{y_1'^5} \cdot \frac{y_1^3}{3!} \dots ,$$

jsou přibližně opačné než členy v druhém rozvoji. Chceme-li určovat přesnější hodnotu kořene pomocí aritmetického průměru, sečteme v obou rozvojích pro x_1 resp. x_2 lichý počet členů — při součtu sudého počtu členů dostaneme buď v obou rozvojích hodnotu menší nebo v obou hodnotu větší. Ale ani pak mnoho nezískáme, protože předpoklad o tom, že se derivace v okolí kořene skoro nemění, není splněn na mnoho desetinných míst. Tak v rovnici

$$x^3 - 3x + 1 = 0$$

vyšlo nám nejprve

$$x_0 \doteq 0{,}35 - 0{,}002\,7 .$$

Volme si proto za základ tyto dvě hodnoty:

$$x_1 = 0{,}35 - 2 \,.\, 0{,}002\,7 = 0{,}344\,6 , \quad x_2 = 0{,}35 .$$

K nim sestavíme tabulku hodnot funkce a derivací:

x_i	0,344 6	0,35
y_i	0,007 120 960 536	—0,007 125
y_i'	—2,643 752 52	—2,632 5
y_i''	+2,067 6	+2,10
y_i'''	6	6

Odtud pak již známým způsobem určíme

$$x_{11} = 0{,}347\,296\,341\,911 , \quad x_{21} = 0{,}347\,296\,369\,116$$

a jejich aritmetický průměr

$$x_0 \doteq 0{,}347\,296\,355\,513 .$$

Dostali jsme tak jen o 2 cifry správné více. Přímý výpočet dalšího členu řady dá celkem méně práce než metoda aritmetického průměru.

P o z n á m k a. Zbývá ještě promluvit o tom, jak lze metodu rozvoje kořene spojit s metodou, kterou udal prof. K. PETR pro výpočet kořenů algebraických rovnic. O tom pojednám jindy.

LITERATURA

[1] *Matyáš Lerch:* O novém zobecnění řady Taylorovy a Langrageovy. Rozpr. Čes. ak. v. a um. II, XX, *36*, 7a.

[2] *Matyáš Lerch:* Poznámky o inversi řad a o číselných rovnicích. Časopis pro pěst. mat. a fys., XLVI, 225 a 377.

[3] *Václav Láska - Václav Hruška:* Teorie a prakse numerického počítání, str. 283 a n.

[4] *Karel Petr:* O jedné metodě pro řešení numerických rovnic algebraických, Příloha k Časopisu pro pěst. mat. a fys., XXVII, 49 a n.

[5] *František Brandler:* Příspěvek k numerickému řešení rovnic 3. stupně. Časopis pro pěst. mat. a fys., *74,* D 54 a n.