Ladislav Rieger
Návštěva prof. Kalmára v Praze; referát o jeho přednášce

Časopis pro pěstování matematiky, Vol. 80 (1955), No. 1, 94--96

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/117139

Nechť funkce $\varphi(q)$, definovaná pro přirozená čísla q, je nezáporná a nechť funkce $q\,\varphi(q)$ neroste. Definujme množinu $Y(\varphi)$: číslo x, $0 \leq x < 1$ patří do množiny $Y(\varphi)$ existuje-li přirozené číslo n takové, že x nepřipouští aproximaci $\varphi(nq)$. Větu 1 lze stručně zapsat:

$$\alpha(B^{(0)}) = Y\left(\frac{1}{q^2}\right).$$

Lze dokázati, že platí

Věta 4. *K dané funkci $\varphi(q)$ existuje množina $B(\varphi(q)) \subset B^{(0)}$ tak, že platí*

$$\alpha(B(\varphi(q))) = Y(\varphi).$$

Podobné problémy lze formulovat pro vícerozměrný případ. V tomto směru jsem pouze dokázal, že platí věta obdobná k větě 1.

Jaroslav Kurzweil, Praha.

NÁVŠTĚVA PROF. KALMÁRA V PRAZE; REFERÁT O JEHO PŘEDNÁŠCE

Dne 25. XI. 1954 navštívil Prahu na návratu z NDR člen-korespondent Maďarské Akademie věd, profesor university v Szegedu, LÁSZLO KALMÁR, jeden z předních současných představitelů a znalců matematické logiky a theorie základů matematiky.

Profesor Kalmár přednesl večer v matematickém ústavu matem.-fys. fakulty KU přednášku na thema *Klasifikace spojitých funkcí na Baireově prostoru* (iracionálních čísel z intervalu $(0, 1)$).

Dříve, než podáme referát o vlastním obsahu přednášky, bude dobře objasnit, jak souvisí toto ryze matematické thema (vlastně patřící do theorie reálných funkcí) s otázkami matematické logiky.

Jak je dobře známo, Baireův prostor irracionálních čísel z intervalu $(0, 1)$ je topologicky ekvivalentní (homeomorfní) s kartézským součinem spočetně mnoha diskretních prostorů celých kladných čísel. (Homeomorfismus možno nejlépe udat pomocí rozvoje irracionálního čísla v nekonečný řetězový zlomek.) — Je-li $x = \{x_i\}_{i=1}^{\infty}$ libovolný bod Baireova prostoru B (nadále již považovaného za prostor posloupností celých kladných čísel) a je-li f libovolné zobrazení B do B, pak $f(x) = \{y_j\}_{j=1}^{\infty}$ je vlastně posloupností $f_j(x) = y_j$ ($j = 1, 2, \ldots$) zobrazení prostoru B do diskretního prostoru N celých kladných čísel. Na místo tvoření „složek" $f_j(x)$ daného zobrazení f můžeme přibrat index j jako argument na první místo určitého zobrazení Φ prostoru B do N, které pak representuje vzájemně jednoznačným způsobem původní zobrazení f prostoru B do B takto:

$$\begin{aligned} \Phi(1, x_1, x_2, \ldots) &= y_1, \\ \Phi(2, x_1, x_2, \ldots) &= y_2, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

(Zřejmě také obráceně každé zobrazení Φ prostoru B do N představuje takto jediné zobrazení f prostoru B do B, jestliže definujeme „složky" $y_1, y_2, \ldots$ hodnot obrazu v zobrazení f jako hodnoty $\Phi(\{x_i\}_{i=1}^{\infty})$ pro $x_1 = 1, 2, \ldots$). Lze tedy redukovat theorii zobrazení prostoru B do B v tomto smyslu na theorii zobrazení prostoru B do N.

Tak na př. je snadno vidět, že zobrazení f prostoru B do B je spojité tehdy a jen tehdy, je-li příslušné („representující") zobrazení Φ prostoru B do N spojité.

Zobrazení Φ prostoru B do N se někdy nazývají „*aritmetickými funkcionálami*", neboť „argument" probíhá „aritmetické funkce" $\varphi(i) = x_i$ (o argumentech a hodnotách celočíselných), hodnotou funkcionály je opět přirozené číslo $\Phi(\varphi)$.

V t. zv. konstruktivní aritmetice, sloužící k aritmetisaci formalisovaných axiomatických systémů v theorii základů matematiky, se však — zhruba řečeno — uvažují jen takové aritmetické funkce φ, u kterých hodnotu možno jistým mechanisovatelným algoritmem ke každé ciferně dané hodnotě argumentu po konečně mnoha krocích ciferně udat. (T. zv. obecně rekurentní funkce.) Z aritmetických funkcionál pak přicházejí v konstruktivní aritmetice matematické logiky v úvahu jen takové „konstruktivní" funkcionály, u nichž lze podobně již po konečně mnoha krocích udat k dané funkci hodnotu funkcionály. Zcela uspokojivou precisaci tohoto pojmu dosud nemáme. Jeden ze způsobů precisace pojmu konstruktivní funkcionály je dán právě takto (Kalmár):

Nazveme aritmetickou funkcionálu $\Phi(\varphi) = \Phi(\{x_i\}_{i=1}^{\infty})$ konstruktivní tehdy, jestliže její hodnota je udána pro každou aritmetickou funkci φ vždy znalostí již jistého konečného počtu hodnot dané funkce φ, t. j. $\Phi(\{x_i\}_{i=1}^{\infty})$ závisí vždy jen na konečném počtu členů posloupnosti $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$ — při čemž tento počet potřebných hodnot (členů) sám závisí obecně na funkci φ (na posloupnosti $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$).

Avšak tento požadavek neznamená — jak snadno nahlédneme — nic jiného, než že zobrazení Φ prostoru B do N je spojité. Neboť právě a jen tenkráte je zaručeno, že $\Phi(x) = \Phi(y)$, jakmile jen se $x = \{x_i\}_{i=1}^{\infty}$ shoduje s $y = \{y_j\}_{j=1}^{\infty}$ skoro ve všech členech.

Tím je — alespoň zhruba — ozřejměna souvislost thematu přednášky s matematickou logikou. Kalmárova klasifikace spojitých zobrazení prostoru B do N je klasifikací ve vytčeném smyslu konstruktivních aritmetických funkcionál, neboli aritmetických funkcí spočetně nekonečně mnoha přirozených argumentů, které v každém místě závisí jen od konečně mnoha z nich. Takových funkcionál je ovšem mohutnost kontinua — na rozdíl od spočetného počtu obecně rekurentních funkcí, což přináší s sebou řadu velmi obtížných problémů při aplikaci tohoto pojmu v matematické logice, které pochopitelně v krátké přednášce prof. Kalmár nerozváděl. S hlediska theorie reálných funkcí je tu však konkretní matematický resultát: konstruktivní klasifikace spojitých zobrazení Baireova prostoru do sebe sama, která je analogická Baireově klasifikace *ne*spojitých, postupnými limitními přechody získaných obyčejných funkcí (jedné) reálné proměnné. (Vztah obou klasifikací osvětlíme v závěrečné poznámce.)

A nyní k vlastnímu obsahu přednášky.

Uvažme nejprve jednoduché příklady spojitých zobrazení Φ prostoru B do N.

Jistě nejen funkce $x_1 + x_2 + \ldots + x_n$ (s pevným n), ale i zobrazení $\Phi(x) = \Phi(\{x_i\}_{i=1}^{\infty}) = x_1 + x_2 + \ldots + x_{x_1}$ je takovým zobrazením; v druhém příkladě k udání toho, kolik členů dané argumentové posloupnosti je třeba k určení hodnoty zobrazení Φ, stačí znát první člen argumentové posloupnosti. Je-li však obecněji na př. Φ již dané spojité zobrazení B do N, pak i

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_{\Phi(x)}$$

je takové zobrazení, neboť abychom mohli udat v pevném místě x jeho hodnotu, stačí nejprve určit hodnotu $\Phi(x)$ na základě znalosti konečného počtu členů dané posloupnosti $x = \{x_i\}_{i=1}^{\infty}$ a tak určit počet členů (téže) argumentové posloupnosti x, které máme sečíst. — Na podobném postupném komplikování takového vytváření spojitých zobrazení B do N, od konstant vycházeje, je založena myšlenka Kalmárovy klasifikace.

K tomu cíli definuje Kalmár termín „r-tá specialisace" $\Phi_r(x)$ spojitého zobrazení Φ prostoru B do N už naznačeným způsobem takto:

$$\Phi_r(x_0, \ldots, x_n, \ldots) = \Phi(r, x_2, \ldots, x_n, \ldots) \text{ s pevným přirozeným } r\,.$$

Do třídy K_0 klade pak konstanty.

Jsou-li již definovány všechny třídy K_β (kde β je ordinální číslo) s β menším, než pevně dané ordinální číslo α, pak do třídy K_α klade ta zobrazení B do N, jejichž každá specialisace patří do některé z tříd K_β s $\beta < \alpha$.

Ukazuje pak:

1. *Platí*

$$K_0 \subset K_1 \subset K_2 \subset \ldots \subset K_\alpha \subset \ldots$$

pro všechna spočetná ordinální α, *kdežto* $K_\alpha = K_{\alpha+1} = \ldots$ *pro každé* α *nespočetné.*

2. *Sjednocení všech* K_α *obsahuje jen spojitá zobrazení* Φ *prostoru* B *do* N — *a to všechna taková zobrazení.*

Tak do K_1 patří zřejmě zobrazení $\Phi(x_1, x_2, \ldots)$, fakticky závislá jen na x_1, do K_2 zobrazení Φ fakticky závislá jen na x_1 a x_2 atd.; do K_ω patří všechna zobrazení Φ taková, že po fixaci prvního argumentu vznikne již zobrazení závislé jen na pevném počtu n argumentů (členů posloupnosti); (pro každou fixaci obecně je ovšem n jiné) — atp.

Profesor Kalmár se ještě v závěru zmínil o tom, že lze udat jistou normální formu vyjádření spojitých zobrazení Φ prostoru B do N — a uvedl v té souvislosti jistý problém, který si však referent bohužel nepoznamenal a nedovedl by ho již věrně reprodukovat.

Přednáška byla pronesena v německém jazyce, živou a jasnou formou a vzbudila oprávněný zájem i diskusi. Jest jen litovati, že kolidovala s plenárním zasedáním Akademie a že jí v tomtéž týdnu předcházely dvě jiné matematické přednášky na téže půdě, takže návštěva byla slabá.

O diskusi by si referent dovolil následující poznámky: Na dotaz referentův, jak by se uvedená klasifikace spojitých zobrazení prostoru B do N modifikovala, kdyby se zobrazení z tříd s konečnými indexy podrobila restrikci, aby tato zobrazení byla obecně rekurentními funkcemi stále většího a většího počtu argumentů, ukázal prof. Kalmár toto:

Z počátku bychom obdrželi užší (a spočetné) třídy $K'_1, K'_2, \ldots$, ale po ω^2 krocích se situace vyrovná, a je pak již $K'_{\omega^2} = K_{\omega^2}, K'_{\omega^2+1} = K_{\omega^2+1}, \ldots$

Možno tedy skutečně spojitá zobrazení Baireova prostoru do přirozených čísel považovat za snad nejbližší, v jistém volném smyslu slova ještě „konstruktivní" rozšíření pojmu obecně rekurentní funkce. (To má — jak se ukázalo — jistý význam v rekurentní (konstruktivní) analysi.)

K otázce, vznesené Dr Špačkem, jak souvisí Kalmárova klasifikace se známým procesem Baireovy klasifikace nespojitých funkcí (která nebyla na místě plně objasněna pro nedostatek času) by si referent dovolil říci: Baireův proces postupného limitního vytváření Baireových funkcí (reálné proměnné) dává, byv aplikován na spojitá zobrazení Φ prostoru B do N (na rozdíl od Kalmárova procesu), třídy stále složitějších nespojitých zobrazení.

Možno však Kalmárův proces aplikovat uvnitř každé Baireovy třídy zobrazení. Zdá se, že tak obdržíme rozložení Baireových tříd na podtřídy, které jsou paralelní Lavrentěvovým t. zv. malým třídám Borelovských množin. Pokud zůstáváme ve třídě spojitých zobrazení, jde v Kalmárově klasifikaci vlastně o vystižení postupného „zhoršování stejnoměrnosti spojitosti." — Tyto otázky by měly být zkoumány.

Lad. Rieger, Praha.