Časopis pro pěstování matematiky, roč. 79 (1954)

ÚLOHY A PROBLÉMY

Zahajujeme hlídku úloh a problémů, která byla slíbena v minulém čísle ve článku „Nové úkoly".

Tato hlídka není míněna jako souhrn dosud neřešených problémů, ale spíše jako tribuna matematických dotazů. Budou zde problémy těžší, lehčí, někdy i velmi jednoduché; je pravděpodobné, že se na mnohé z nich již najde odpověď v matematické literatuře. Budeme uveřejňovat také problémy, jejichž řešení je autorovi známo, jestliže autor bude hledat nějaké jednodušší řešení nebo jestliže bude pokládat problém za velmi zajímavý; to ovšem bude vždy poznamenáno.

Prosíme čtenáře, aby řešení nebo odkaz na literaturu zasílali redakci, nebo aby navázali styk přímo s autorem.

Rovněž žádáme naše čtenáře, aby nám zasílali problémy vhodné pro tuto hlídku.

Redakce.

1. Budiž a přirozené číslo, které není druhou mocninou celého čísla. Rozhodněte, zda existují přirozená čísla x, y taková, aby platilo

$$ax^2 + 1 = y^2 .$$

Jan Mařík, Praha.

2. Vyšetřete chování řady $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \cdot \frac{x^n - 1}{x - 1} \cdot x^{\frac{n(n-1)}{2}}$ na kružnici $|x| = 1$ (spojitost limity, stejnoměrnost konvergence). Podobně pro řadu $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n \cdot b_n} \cdot \frac{x^{b_n} - 1}{x - 1} \cdot x^{c_n}$, kde b_n jsou přirozená čísla, $c_n = \sum\limits_{k=1}^{n-1} b_k$, a potom pro mocninnou řadu, vzniklou „rozepsáním" této řady.

Jan Mařík, Praha.

3. Platí věta: Nechť $a_n \to 0$. Pak řada $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ konverguje pro každé x, pro něž platí $|x| = 1$ a které je bodem regularity funkce f. Nelze dokázat podobnou větu pro sčítatelnost místo pro konvergenci? (Rozhodněte na př. o správnosti této věty: Nechť platí $\frac{a_n}{n} \to 0$. Pak je řada $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ sčítatelná podle aritmetického středu v každém bodě x ($|x| = 1$), který je jejím bodem regularity).

Jan Mařík, Praha.

4. Buď C jednoduchá rovinná křivka konečné délky a D její vnitřek (komplement). Budiž $t_0 \in C$. Utvořme funkci $\vartheta(z, t)$, kde z probíhá množinu D a t množinu $(C - t_0)$, tak, aby $\vartheta(z, t)$ bylo úhlem mezi kladným směrem osy x a vektorem $\overrightarrow{zt}$ a aby funkce ϑ byla spojitá. Budiž

$$F(z) = \int_C |\mathrm{d}_t \vartheta(z, t)| \, .$$

(Funkce F je zřejmě spojitá na D a nezávisí na volbě funkce ϑ.) Dokažte (přesně a pokud možno jednoduše) nějakou nutnou a postačující podmínku, aby funkce F byla omezená. (Viz *J. Radon*, Sitzungsberichte d. Akad. d. Wiss., Wien, Math. Naturw. Kl. *128*, Abt. 2a, IIa, 1123; 1919.)

Ivo Babuška, Praha.

5. Buď T čtverec. Rozhodněte, zda existuje funkce φ holomorfní na T taková, že platí

$$\iint_T (\mathrm{Re}\, \varphi)^2 \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y < \infty \, , \tag{1}$$

$$\iint_T (\mathrm{Im}\, \varphi)^2 \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y = \infty \, . \tag{2}$$

Poznámka: Lze dokázat, že platí-li (1), pak je

$$\iint_T (\mathrm{Im}\, \varphi)^{2-\varepsilon} \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y < \infty$$

pro každé $\varepsilon > 0$.

Ivo Babuška, Praha.