

Zbyněk Nádeník

O projektivních diferenciálních invariantech rovinné vrstvy křivek

*Časopis pro pěstování matematiky*, Vol. 78 (1953), No. 3, 229--258

Persistent URL: <http://dml.cz/dmlcz/117093>

## Terms of use:

© Institute of Mathematics AS CR, 1953

Institute of Mathematics of the Academy of Sciences of the Czech Republic provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.



This paper has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* <http://project.dml.cz>

## O PROJEKTIVNÍCH DIFERENCIÁLNÍCH INVARIANTECH ROVINNÉ VRSTVY KŘIVEK

ZBYNĚK NÁDENÍK, Praha.

(Došlo 25. března 1953.)

DT: 513.78

Autor se zabývá projektivní geometrií jednoparametrové soustavy křivek v rovině  $S_2$ , t. zv. vrstvy  $V$  křivek. K jejímu studiu užívá metody pohyblivého reperu, vypracované *E. Cartanem*. S vrstvou  $V$  je spjata nulová korespondence mezi body  $A_0$  a tečnami křivek ( $A_0$ ) vrstvy  $V$  v bodech  $A_0$ , jež spolu s jistou analytickou příbuzností, v práci označenou  $P$ , umožňuje již prostřednictvím okolí 2. řádu bodu  $A_0$  přiřadit každému bodu  $A_0$  svazek kuželoseček, které se navzájem v bodě  $A_0$  hyperoskuluji a s křivkou ( $A_0$ ) mají v něm styk právě 1. řádu. Pomocí okolí 3. řádu lze v každém bodě  $A_0$  definovat jisté přímky, jež jsou označeny jako první resp. druhé resp. třetí projektivní normály vrstvy  $V$  v bodě  $A_0$ ; v každém bodě  $A_0$  existuje právě jedna první, nejvýše dvě různé druhé a nejvýše tři různé třetí projektivní normály vrstvy  $V$ . Autor udává jejich geometrický význam a konstruuje pomocí nich některé invarianty vrstvy  $V$ . Dále se zabývá vrstvami, u nichž projektivní normály jejich bodů nejsou všechny různé. Podrobnější studium některých z těchto vrstev bude mimo jiné předmětem další práce.

V řadě prací postupně publikovaných v časopise *Чехословацкий математический журнал* se společným názvem *Проективная дифференциальная геометрия соответствий между двумя пространствами*<sup>1)</sup> buduje akademik

<sup>1)</sup> Dosud vyšlo sedm prací této serie: I ve sv. 2 (77), 1952, str. 91–107; II ve sv. 2 (77), 1952, str. 109–123; III ve sv. 2 (77), 1952, str. 125–148; IV ve sv. 2 (77), 1952, str. 149–166; V ve sv. 2 (77), str. 167–188; VI ve sv. 2 (77), 1952, str. 297–331; VII ve sv. 3 (78), str. 123–137; práce VIII se dokončuje. Práce I až IV vyšly též francouzsky: I v *Časopise pro pěstování matematiky a fysiky*, sv. 74, 1949, str. 32–48; II tamtéž, sv. 75, 1950, str. 123–136; III tamtéž, sv. 75, 1950, str. 137–158. Velmi kladné ocenění prací I–III vyšlo v článku *G. Vaona: Sulla trasformazione linearizzante di una corrispondenza puntuale fra spazi lineari*, *Bolletino della Unione Matematica Italiana*, 1951, str. 293–299, ve kterém je vyložena souvislost citovaných prací s pracemi italských geometrů *E. Bompiani*, *M. Villa* a jiných. Sluší poznamenat, že první krok v této problematice byl učiněn v pracích *O. Borůvky: Géométrie projective des correspondances analytiques entre deux plans projectives* (*Comptes Rendus de l'Académie des Sciences*, sv. 184, 1927, str. 1518–1520); *Sur les correspondances analytiques entre deux plans projectifs* (I, *Publications de la Faculté des Sciences de l'Univ. Masaryk, Brno* 1926, č. 72, 40 str.; II tamtéž, Brno 1927, č. 85, 34 str.); O korespondencích s charakteristickými

E. ČECH obsáhla soustavnou theorii korespondencí mezi dvěma projektivními prostory  $S_n$  a  $S'_n$  prozatím pro ten případ, že se nečiní žádného předpokladu o vzájemné poloze obou prostorů  $S_n$ ,  $S'_n$ . Theorie důležitého případu  $S_n = S'_n$  nebyla dosud předmětem soustavného zkoumání. Vedle tohoto případu však zasluhuje zvláštní pozornosti ten případ, že prostor  $S'_n$  je *korelativní* s prostorem  $S_n$ . Běží tu tedy o studium *duálních transformací* projektivního prostoru  $S_n$ , t. j. takových transformací, které bodu  $A$  prostoru  $S_n$  přiřazují *nadrovinu*  $\alpha$  téhož prostoru. Jestliže nadrovina  $\alpha$  neprochází bodem  $A$ , jsou zvláště pozoruhodné polární transformace, jejichž theorie je pro  $n = 2$  do určité míry budována v citované již *Introduction*, kap. X a dále rozvedena v článku E. Čech: *Quadriques osculatrices à centre donné et leur signification projective*, *Comptes Rendus de la Société des Sciences et des Lettres de Wrocław*, sv. 7, 1952, str. 1—9. Jestliže však nadrovina  $\alpha$  prochází bodem  $A$ , dostáváme (v terminologii E. Čecha) *nulové transformace* prostoru  $S_n$ , které s projektivního hlediska nebyly dosud soustavně studovány. Z prací VI, VII, VIII citované serie E. Čecha vysvítá, že vlastnosti nulových transformací hrají důležitou pomocnou úlohu v obecné theorii projektivních korespondencí mezi  $S_n$  a  $S'_n$ . Obecněji rozumíme nulovou korespondencí takovou transformaci, která bodu  $A$  prostoru  $S_n$  přiřazuje lineární podprostor (určité dimense  $m$ ,  $1 \leq m \leq n - 1$ ) v  $S_n$  incidentní s bodem  $A$ . Důležitým (a pro  $n = 2$  jedině možným) zvláštním případem theorie nulových korespondencí prostoru  $S_n$  je projektivní studium soustavy  $\infty^1$  nadploch (vrstvy nadploch v terminologii E. Čecha). Pro  $n = 2$  máme studium vrstvy křivek v projektivní rovině  $S_2$ , které je právě předmětem této práce.

Na podnět E. Čecha jsem zpracoval dané thema elementárně tak, aby na konkrétním případě jasně vynikla užitečnost a dosah method zesnulého velkého geometra E. CARTANA.

1. Necht v projektivní rovině  $S_2$ , v níž jsou zavedeny homogenní souřadnice  $x_0, x_1, x_2$ , které zkráceně budeme psát jen  $x$ , je dán jednoparametrový systém  $\Sigma$  křivek, analyticky vyjádřený rovnicemi

$$x = x(u, v),$$

kde  $x(u, v)$  jsou analytické funkce, v nichž  $v$  je parametr křivky v systému  $\Sigma$  a  $u$  parametr na křivce systému. Předpokládejme, že alespoň v nějaké oblasti  $T$  projektivní roviny  $S_2$  každým bodem prochází právě jedna křivka systému  $\Sigma$  regulární v této oblasti. Takový systém nazveme pak v oblasti  $T$  podle E. Čecha *vrstvou V křivek* (v  $T$ ); příležitostně budeme též říkat, že vrstva  $V$

křivkami o rovnici  $dx^2 - dy^2 = 0$  (Časopis pro pěstování matematiky a fysiky, sv. 57, 1928, str. 183—185); všechny tyto práce vznikly z iniciativy E. Čecha. Další problematika byla nastíněna E. Čechem již 1931 ve spise *G. Fubini a E. Čech*, *Introduction à la géométrie projective différentielle des surfaces*, kap. X.

je (v  $T$ ) tvořena křivkami systému  $\Sigma$ . Přiřadíme každému bodu  $x$  z  $T$  (budeme jej též nazývat bodem vrstvy  $V$ ) tečnu  $\left[ x \frac{\partial}{\partial u} x \right]$  té křivky vrstvy  $V$ , která jím prochází. Dostaneme tak jednoznačnou korespondenci mezi body a tečnami křivek vrstvy  $V$ ; nazveme ji *nulovou korespondencí*  $N$ . V dalším budeme vyšetřovat pouze lokální vlastnosti vrstvy  $V$  anebo nulové korespondence  $N$ .

2. Každému bodu  $x$  vrstvy  $V$  přiřadíme repery  $A_0 A_1 A_2$ , pro které platí obecně

$$\left. \begin{aligned} dA_0 &= \omega_{00}A_0 + \omega_{01}A_1 + \omega_{02}A_2, \\ dA_1 &= \omega_{10}A_0 + \omega_{11}A_1 + \omega_{12}A_2, \\ dA_2 &= \omega_{20}A_0 + \omega_{21}A_1 + \omega_{22}A_2, \end{aligned} \right\} \quad (2,1)$$

a které podrobíme těmto podmínkám: 1. Bod  $A_0$  je geometricky identický s bodem  $x$ ; 2. přímka  $[A_0 A_1]$  je tečna v bodě  $x$  té křivky vrstvy  $V$ , která jím prochází; 3. žádáme, aby  $[A_0 A_1 A_2] = 1$ , t. j.

$$\omega_{00} + \omega_{11} + \omega_{22} = 0. \quad (2,2)$$

Takto zvolené repery, které nazveme *repery 1. řádu*, závisí na dvou parametrech podstatných  $u, v$  a pěti parametrech sekundárních. Každá z devíti Pfaffových forem  $\omega_{rs}$  ( $0 \leq r, s \leq 2$ ) je lineární kombinací diferenciálů všech sedmi parametrů (hlavních a sekundárních), a tudíž mezi formami  $\omega_{rs}$ , jež určují repery 1. řádu, existují právě dvě nezávislé relace. Jedna z nich je ovšem rovnice (2,2) a druhou odvodíme.

Jestliže  $u = \text{konst.}$ ,  $v = \text{konst.}$ , je bod  $A_0$  geometricky pevný, a tedy podle (2,1<sub>1</sub>)  $\omega_{01} = \omega_{02} = 0$ , takže tyto formy, jež označíme

$$\omega_1 = \omega_{01}, \quad \omega_2 = \omega_{02},$$

jsou lineárními kombinacemi diferenciálů pouze hlavních parametrů a jak se snadno zjistí, jsou nezávislé, t. j.

$$[\omega_1 \omega_2] \neq 0. \quad (2,3)$$

Při  $v = \text{konst.}$ , t. j. na pevné křivce naší vrstvy  $V$ , je podle podmínky 2. pro repery (2,1)  $\omega_2 = 0$ . Je tedy forma  $\omega_2$  násobkem diferenciálu  $dv$ :

$$\omega_2 = k dv, \quad (2,4)$$

kde  $k \neq 0$  je nějaká skalární funkce hlavních i sekundárních parametrů. Vnějším diferencováním rovnice (2,4) podle rovnic struktury projektivní roviny dostaneme

$$[\omega_{12} \omega_1] + [d \log k - \omega_{00} + \omega_{22}, \omega_2] = 0.$$

Je tedy podle Cartanova lemmatu:

$$\omega_{12} = a_1 \omega_1 + a_2 \omega_2, \quad (2,5)$$

$$d \log k - \omega_{00} + \omega_{22} = a_2 \omega_1 + a_3 \omega_2. \quad (2,6)$$

Rovnice (2,5) je hledaná relace mezi  $\omega_{rs}$ .

Označme podle E. Cartana symbolem  $\delta$  diferenciaci, při níž považujeme hlavní parametry za konstantní, a položme

$$\omega_{rs}(d) = \omega_{rs}, \quad \omega_{rs}(\delta) = e_{rs} \quad (0 \leq r, s \leq 2).$$

Zřejmě

$$e_{01} = e_{02} = 0 \quad (2,7)$$

a podle (2,2) a (2,5)

$$\left. \begin{aligned} e_{00} + e_{11} + e_{22} &= 0, \\ e_{12} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (2,8)$$

Poněvadž

$$\left. \begin{aligned} [d\omega_{12}] &= a_1[\omega_{11} - \omega_{22}, \omega_1] + [\omega_{10} + a_2(\omega_{11} - \omega_{22}), \omega_2], \\ [d\omega_1] &= [\omega_{00} - \omega_{11}, \omega_1] - [\omega_{21}, \omega_2], \\ [d\omega_2] &= [a_2\omega_1 + \omega_{00} - \omega_{22}, \omega_2], \end{aligned} \right\} \quad (2,9)$$

je

$$\left. \begin{aligned} \delta\omega_{12} &= a_1(e_{11} - e_{22})\omega_1 + (e_{10} + a_2e_{11} - e_{22})\omega_2, \\ \delta\omega_1 &= (e_{00} - e_{11})\omega_1 - e_{21}\omega_2, \\ \delta\omega_2 &= (e_{00} - e_{22})\omega_2. \end{aligned} \right\} \quad (2,10)$$

Diferencujeme-li rovnici (2,5) pouze vzhledem k sekundárním parametrům, dostaneme tedy v důsledku (2,3):

$$\left. \begin{aligned} \delta a_1 - 3e_{11}a_1 &= 0, \\ \delta a_2 - e_{21}a_1 + (e_{00} - e_{11})a_2 - e_{10} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (2,11)$$

Devět forem  $e_{rs}$  ( $0 \leq r, s \leq 2$ ) je lineárními kombinacemi diferenciálů pěti sekundárních parametrů, a tedy mezi  $e_{rs}$  existují právě čtyři nezávislé relace. Jsou to (2,7) a (2,8). Formy

$$e_{11}, e_{21}, e_{00} - e_{11}, e_{10} \quad (2,12)$$

jsou tedy nezávislé a diferenciálům sekundárních parametrů lze dát takové hodnoty, že se anulují všechny formy (2,12) až na jednu. Takto dostaneme podle (2,11) pro  $a_1, a_2$  čtyři infinitesimální transformace o symbolech

$$a_1 \frac{\partial}{\partial a_1}, \quad a_1 \frac{\partial}{\partial a_2}, \quad a_2 \frac{\partial}{\partial a_2}, \quad \frac{\partial}{\partial a_2}.$$

Za předpokladu

$$a_1 \neq 0 \quad (2,13)$$

můžeme tedy položit

$$a_1 = 1, \quad a_2 = 0, \quad (2,14)$$

takže podle (2,5)

$$\omega_{12} = \omega_1. \quad (2,15)$$

Repery 1. řádu, pro které platí (2,15), nazveme *repery 2. řádu* (vrstvy  $V$ ). Dříve než nalezneme geometrický význam relací (2,13) a (2,14), zodpovíme jednu otázku, týkající se nulové korespondence  $N$ .

3. Položme

$$\alpha_0 = [A_2 A_1], \quad \alpha_1 = [A_0 A_2], \quad \alpha_2 = [A_1 A_0], \quad (3,1)$$

takže podle (2,1)

$$\left. \begin{aligned} d\alpha_0 &= -\omega_{00}\alpha_0 - \omega_{10}\alpha_1 - \omega_{20}\alpha_2, \\ d\alpha_1 &= -\omega_{10}\alpha_0 - \omega_{11}\alpha_1 - \omega_{21}\alpha_2, \\ d\alpha_2 &= -\omega_{20}\alpha_0 - \omega_{12}\alpha_1 - \omega_{22}\alpha_2. \end{aligned} \right\} \quad (3,2)$$

V nulové korespondenci  $N$  jsou při označení (3,1) zřejmě sdruženy bod  $A_0$  a přímka  $\alpha_2$ . Definujme dále analytickou příbuznost  $P$  relacemi

$$PA_0 = \alpha_2, \quad PA_1 = \varepsilon_1 \alpha_1, \quad PA_2 = \varepsilon_2 \alpha_0, \quad (3,3)$$

kde

$$\varepsilon_1, \varepsilon_2 = \pm 1$$

a zkoumejme, zda je možno volit vrcholy  $A_1, A_2$  reperů 1. řádu tak, aby tato příbuznost  $P$  byla — ve známém smyslu definovaném E. Čechem — tečnou příbuzností ke korespondenci  $N$  v bodě  $A_0$ . Podmínka pro to, totiž

$$P dA_0 = d\alpha_2 + \lambda \alpha_2,$$

je podle (2,1<sub>1</sub>), (3,2<sub>3</sub>) a (3,3) vyjádřena relací

$$\omega_{00}\alpha_2 + \varepsilon_1\omega_{10}\alpha_1 + \varepsilon_2\omega_{20}\alpha_0 = -\omega_{20}\alpha_0 - \omega_{12}\alpha_1 - \omega_{22}\alpha_2 + \lambda \alpha_2.$$

V důsledku lineární nezávislosti přímek  $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2$  je splněna tehdy a jen tehdy, když

$$\varepsilon_2 = -1, \quad (3,4)$$

$$\omega_{12} = -\varepsilon_1\omega_{10},$$

$$\lambda = -\omega_{11}. \quad (3,5)$$

Snadno se zjistí, že rovnice (3,4) je v involuci a její řešení závisí na jedné funkci dvou argumentů, což je nám ostatně již známo z odst. 2.

Můžeme tedy říci: *K nulové korespondenci  $N$ , určené jakoukoliv vrstvou  $V$ , existují tečné příbuznosti  $P$  definované jen relacemi tohoto tvaru (3,3):*

$$PA_0 = \alpha_2, \quad PA_1 = \pm \alpha_1, \quad PA_2 = -\alpha_0.$$

Poznamenejme, že při  $\varepsilon_2 = 1$  a jen tehdy je příbuznost (3,3) polarita vůči kuželosečce ( $K$ ) resp. ( $L$ ), kde

$$K = A_0 + tA_1 + \frac{1}{2}t^2 A_2 \quad (3,6)$$

resp.

$$L = -A_0 + tA_1 + \frac{1}{2}t^2 A_2, \quad (3,7)$$

podle toho, zdali  $\varepsilon_1 = -1$  resp.  $\varepsilon_1 = 1$  ( $t$  je ovšem parametr bodu na kuželosečce). To znamená, že *k nulové korespondenci  $N$  neexistuje tečná polarita.*

Volba  $\varepsilon_1 = 1$  nebo  $\varepsilon_1 = -1$  je geometricky bezvýznamná. Zvolíme pro další úvahy

$$\varepsilon_1 = -1 \quad (3,8)$$

a kuželosečku (3,7) nazveme *basí příbuznosti P*, definované relacemi

$$PA_0 = \alpha_2, \quad PA_1 = -\alpha_1, \quad PA_2 = -\alpha_0. \quad (3,9)$$

4. Vyšetříme nyní geometrický význam předpokladu (2,13) a pak volby (2,14).

Ve vrstvě  $V$  je její křivka ( $A_0$ ) procházející bodem  $A_0$  definována rovnicí

$$\omega_2 = 0, \quad (4,1)$$

t. j.  $v = \text{konst.}$  Při platnosti rovnice (4,1) formy  $\omega_{rs}$  ( $0 \leq r, s \leq 2$ ) označíme  $\bar{\omega}_{rs}$ . Je tedy podle (2,2) a (2,5)

$$\bar{\omega}_{00} + \bar{\omega}_{11} + \bar{\omega}_{22} = 0, \quad \bar{\omega}_{12} = a_1 \bar{\omega}_{01},$$

a ovšem

$$\bar{\omega}_{02} = 0.$$

Z relací (2,1) plyne pak snadno (d znamená nyní diferencování při  $v = \text{konst.}$ ):

$$\left. \begin{aligned} dA_0 &= \bar{\omega}_{00}A_0 + \bar{\omega}_{01}A_1, \\ d^2A_0 &= (d\bar{\omega}_{00} + \bar{\omega}_{00}^2 + \bar{\omega}_{01}\bar{\omega}_{10})A_0 + (d\bar{\omega}_{01} - \bar{\omega}_{01}\bar{\omega}_{22})A_1 + a_1\bar{\omega}_{01}^2A_2. \end{aligned} \right\} (4,2)$$

V jistém okolí bodu  $A_0$  platí pro bod  $A$  křivky ( $A_0$ ) rozvoj

$$A = A_0 + dA_0 + \frac{1}{2}d^2A_0 + \dots,$$

takže v reperu  $A_0A_1A_2$  má bod  $A$  souřadnice:

$$\left. \begin{aligned} y_0 &= 1 + \bar{\omega}_{00} + \frac{1}{2}(d\bar{\omega}_{00} + \bar{\omega}_{00}^2 + \bar{\omega}_{01}\bar{\omega}_{10}) + (3), \\ y_1 &= \bar{\omega}_{01} + \frac{1}{2}(d\bar{\omega}_{01} - \bar{\omega}_{01}\bar{\omega}_{22}) + (3), \\ y_2 &= \frac{1}{2}a_1\bar{\omega}_{01}^2 + (3), \end{aligned} \right\} (4,3)$$

kde ( $n$ ) značí výraz řádu alespoň  $n$  v diferenciálech parametru  $u$  a parametrů sekundárních (bodům  $A_0, A_1, A_2$  přisuzujeme zde souřadnice (1, 0, 0), resp. (0, 1, 0), resp. (0, 0, 1); podobně i v následujícím).

Podle (3,2<sub>3</sub>) a (2,5) znamená  $a_1 = 0$ , že při (4,1) je přímka  $\alpha_2$  geometricky pevná. Znamená tedy předpoklad (2,13) *vyloučení přímkových vrstev*, t. j. vrstev, tvořených vesměs přímkami. Geometrie takové vrstvy se ovšem redukuje na geometrii křivky, která je obálkou jejích přímek. Při vrstvě  $V$ , která není přímková, existuje v oblasti  $T$  vždy oblast  $T' \subset T$ , v níž žádná křivka vrstvy  $V$  nemá inflexní bod. Pro jednoduchost budeme v dalším předpokládat  $T' = T$ .

Kuželosečka

$$K = A_0 + tA_1 + \frac{1}{2}t^2A_2 \quad (3,6)$$

má v reperu  $A_0A_1A_2$  rovnici

$$y_1^2 - 2y_0y_2 = 0.$$

Podle (4,3) je

$$y_1^2 - 2y_0y_2 = (1 - a_1)\bar{\omega}_{01}^2 + (3), \quad (4,4)$$

takže volbou

$$a_1 = 1 \quad (2,14_1)$$

dosáhneme, že kuželosečka (3,6) má s křivkou ( $A_0$ ) vrstvy  $V$  v bodě  $A_0$  styk alespoň 2. řádu.

Síť kuželoseček, z nichž každá má v bodě  $A_0$  s křivkou ( $A_0$ ) styk 2. řádu, označíme  $\Sigma_2$ . V reperu  $A_0A_1A_2$  má tato síť při (2,14<sub>1</sub>) podle (4,3) a (4,4) rovnici

$$y_1^2 - 2y_0y_2 + 2\lambda y_1y_2 + \mu y_2^2 = 0, \quad (4,5)$$

kde  $\lambda$  a  $\mu$  jsou parametry. Involutorní centrickou kolineací se středem v bodě  $A_0$  a osou v libovolné přímce neprocházející bodem  $A_0$  přejde síť (4,5) v síť

$$y_1^2 + 2y_0y_2 + 2\lambda'y_1y_2 + \mu'y_2^2 = 0, \quad (4,6)$$

která, jak se jednoduchým výpočtem zjistí, je nezávislá na volbě osy uvedené kolineace. Síť (4,6) označíme  $\Sigma'_2$ . V ní je obsažena i kuželosečka  $y_1^2 + 2y_0y_2 = 0$ , t. j. kuželosečka

$$L = -A_0 + tA_1 + \frac{1}{2}t^2 A_2. \quad (3,7)$$

Z výsledků odst. 3., z (2,5), (3,4) a (3,8) je dále zřejmé, že při volbě

$$a_1 = 1, \quad a_2 = 0 \quad (2,14)$$

a jen při ní je příbuznost  $P$  určená relacemi

$$PA_0 = \alpha_2, \quad PA_1 = -\alpha_1, \quad PA_2 = -\alpha_0 \quad (3,9)$$

tečná k nulové korespondenci  $N$  v bodě  $A_0$ . Vyšetříme nyní, co tvoří base těchto příbuzností.

Diferencujeme-li vnějším způsobem rovnici (2,5), dostaneme

$$[3a_1\omega_{11} - da_1, \omega_1] + [\omega_{10} + a_1\omega_{21} - da_2 + a_2(\omega_{11} - \omega_{00}) + a_2^2\omega_1, \omega_2] = 0.$$

Použijeme-li na tuto rovnici Cartanova lemmatu, zjistíme podle (2,7), že z volby (2,14) plyne

$$e_{11} = 0, \quad e_{10} + e_{21} = 0. \quad (4,7)$$

První rovnice, k níž vede volba  $a_1 = \text{konst.} \neq 0$ , nemá geometrický význam. Abychom našli význam druhé rovnice (4,7), uvažme, že pro repery 2. řádu téhož bodu  $A_0$  platí podle (2,1), (2,7), (2,8) a (4,7):

$$\begin{aligned} \delta A_0 &= e_{00}A_0, \\ \delta A_1 &= e_{10}A_0, \\ \delta A_2 &= e_{20}A_0 - e_{10}A_1 - e_{00}A_2. \end{aligned} \quad (4,8)$$

Z těchto relací ihned plyne: Je-li bod  $A_1$  geometricky pevný, pohybuje se bod  $A_2$  po geometricky pevné přímce  $\alpha_1$  a naopak; a je-li bod  $A_2$  geometricky pevný, platí totéž o přímce  $\alpha_0$  a naopak. To však znamená, že bodu  $A_0$  je prostřednictvím reperů 2. řádu přiřazena korespondence, jež bodu  $A_2$ , ne-



ležícímu na tečné křivky ( $A_0$ ) vrstvy  $V$  v bodě  $A_0$ , přiřazuje určitou přímku  $\alpha_0$ . Dokážeme, že křivky této korespondence (t. j. křivky, které v každém svém bodě  $A_2$  se dotýkají přímky  $\alpha_0$  odpovídající bodu  $A_2$ ), které jsou podle (4,8) dány diferenciální rovnicí

$$e_{20} = 0,$$

jsou kuželosečky, tvořící base příbuzností (3,9). Zvolíme-li  $A_2A_1A_0$  za jejich reper v bodě  $A_2$ , vidíme snadno, že tento reper závisí už pouze na jednom sekundárním parametru a že je geometricky fixován. Poněvadž

$$[\delta e_{00}] = 0,$$

jak plyne z (2,7), je  $e_{00}$  úplný diferenciál, takže poslední sekundární parametr můžeme volit tak, aby

$$e_{00} = 0.$$

Křivky ( $A_2$ ) uvažované korespondence jsou pak dány rovnicemi

$$\delta A_2 = -e_{10}A_1, \quad \delta A_1 = e_{10}A_0, \quad \delta A_0 = 0 \quad (e_{10} \neq 0).$$

Položíme-li  $e_{10} = \delta t'$ , dostaneme

$$A_1 = t'A_0 + C_1, \quad A_2 = -\frac{1}{2}t'^2 A_0 - t'C_1 + C_2, \quad (4,9)$$

kde  $C_1, C_2$  jsou (při  $e_{20} = 0$ ) analyticky pevné body. Tím, že položíme ještě  $tt' = 2$  a  $\frac{1}{2}t'^2 C_2 = L$ , získáme z (4,9)

$$L = -A_0 + tA_1 + \frac{1}{2}t^2 A_2. \quad (3,7)$$

Tato rovnice však znamená, že křivky vyšetřované korespondence patří do sítě  $\Sigma'_2$  a jsou basemi příbuzností (3,9). Tvoří ovšem jednoparametrický systém, který označíme  $\Sigma'_3$ . Poněvadž pak, jak jsme výše zjistili, při geometricky pevném bodu  $A_1$  je geometricky pevná i přímka  $\alpha_1$ , mají kuželosečky systému  $\Sigma'_3$  touž poláru pro libovolný bod přímky  $\alpha_2$ , takže tvoří svazek kuželoseček, které mají navzájem v bodě  $A_0$  styk 3. řádu.

Tím jsou úplně charakterisovány repery 2. řádu.

Uvedme výslovně, že pomocí příbuznosti  $P$ , definované relacemi (3,9), jsme vybrali ze sítě  $\Sigma'_3$ , kterou ke každému bodu  $A_0$  nějaké křivky vrstvy  $V$  lze sestrojiti již pomocí jeho okolí 2. řádu, svazek  $\Sigma'_3$ , jinými slovy, *každému bodu  $A_0$  křivky vrstvy  $V$  lze přiřadit projektivně invariantním způsobem již pomocí jeho okolí 2. řádu svazek kuželoseček, které mají navzájem v bodě  $A_0$  styk 3. řádu.*

Nyní budeme studovat rovnici  $\omega_{12} = \omega_1$ .

5. Z rovnice

$$\omega_{12} = \omega_1, \quad (2,15)$$

charakterisující repery 2. řádu, dostaneme vnějším diferencováním

$$3[\omega_{11}\omega_1] + [\omega_{10} + \omega_{21}, \omega_2] = 0,$$

a tedy pomocí Cartanova lemmatu

$$\left. \begin{aligned} 3\omega_{11} &= 2(\omega_{11} - \omega_{00}) - (\omega_{22} - \omega_{00}) = b_1\omega_1 + b_2\omega_2, \\ \omega_{10} + \omega_{21} &= b_2\omega_1 + b_3\omega_2. \end{aligned} \right\} \quad (5,1)$$

Tyto relace jsou fundamentální pro všechna další vyšetřování. Podle (2,7) z nich plyne

$$e_{11} = 0, \quad e_{10} + e_{21} = 0, \quad (4,7)$$

takže zbývají 3 nefixované sekundární parametry.

Diferencujeme-li vnějším způsobem relace (5,1), získáme rovnice

$$\left. \begin{aligned} [db_1 - 3(\omega_{10} - \omega_{21}) - b_1(\omega_{11} - \omega_{00}), \omega_1] + \\ + [db_2 - b_1\omega_{21} - b_2(\omega_{22} - \omega_{00}), \omega_2] &= 0, \\ [db_2 - b_1\omega_{21} - b_2(\omega_{22} - \omega_{00}), \omega_1] + \\ + [db_3 - 2b_2\omega_{21} - b_3(\omega_{11} - \omega_{00}) - b_3(\omega_{22} - \omega_{00}) + b_2^2\omega_1, \omega_2] &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (5,2)$$

z nichž opět plyne:

$$\left. \begin{aligned} db_1 - 3(\omega_{10} - \omega_{21}) - b_1(\omega_{11} - \omega_{00}) &= c_1\omega_1 + c_2\omega_2, \\ db_2 - b_1\omega_{21} - b_2(\omega_{22} - \omega_{00}) &= c_2\omega_1 + c_3\omega_2, \\ db_3 - 2b_2\omega_{21} - b_3(\omega_{11} - \omega_{00}) - b_3(\omega_{22} - \omega_{00}) + b_2^2\omega_1 &= c_3\omega_1 + c_4\omega_2. \end{aligned} \right\} \quad (5,3)$$

Vzhledem k (2,7), (2,8) a (4,7) získáme z (5,3):

$$\left. \begin{aligned} \delta b_1 &= 6e_{10} - e_{00}b_1, \\ \delta b_2 &= -e_{10}b_1 - 2e_{00}b_2, \\ \delta b_3 &= -2e_{10}b_2 - 3e_{00}b_3. \end{aligned} \right\} \quad (5,4)$$

Poněvadž podle (2,7), (2,8) a (4,7) formy  $e_{00}$ ,  $e_{10}$  jsou ještě nezávislé, jsou při změně sekundárních parametrů koeficienty  $b_1$ ,  $b_2$ ,  $b_3$  vázány infinitesimálními transformacemi o symbolech

$$-b_1 \frac{\partial}{\partial b_1} - 2b_2 \frac{\partial}{\partial b_2} - 3b_3 \frac{\partial}{\partial b_3} \quad \text{resp.} \quad 6 \frac{\partial}{\partial b_1} - b_1 \frac{\partial}{\partial b_2} - 2b_2 \frac{\partial}{\partial b_3}.$$

Příslušné konečné rovnice jsou:

$$b_1 = b_1^0 e^{-\mu}, \quad b_2 = b_2^0 e^{-2\mu}, \quad b_3 = b_3^0 e^{-3\mu} \quad (5,5)$$

resp.

$$\left. \begin{aligned} b_1 &= 6\lambda + b_1^0, \\ b_2 &= -3\lambda^2 - b_1^0\lambda + b_2^0, \\ b_3 &= 2\lambda^3 + b_1^0\lambda^2 - 2b_2^0\lambda + b_3^0; \end{aligned} \right\} \quad (5,6)$$

$b_1^0$ ,  $b_2^0$ ,  $b_3^0$  jsou integrační konstanty.

Podle relací (5,6) lze vždy vhodnou volbou zbývajících sekundárních parametrů anulovat alespoň jeden libovolný koeficient  $b_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ), a je-li ze zbývajících koeficientů alespoň jeden různý od nuly, pak podle relací (5,5)

lze mu dát libovolnou nenulovou numerickou hodnotu. S výjimkou případu, kdy anulováním jednoho koeficientu  $b_i$  se anulují i zbývající dva, znamená právě uvedená volba koeficientů  $b_i$  fixování dalších dvou sekundárních parametrů (ve vyloučeném případě jednoho), takže pak zbývá jediný poslední sekundární parametr (ve vyloučeném případě dva).

Z relací (4,8) a (5,4) je zřejmé, že fixování sekundárního parametru podle kterékoli z relací (5,5) nemá geometrický význam. Avšak z těchto relací plyne, že anulování kteréhokoliv z koeficientů  $b_i$  znamená geometricky pevnou volbu bodu  $A_1$ , a tedy i přímky  $\alpha_1 = [A_0A_2]$  ve všech reperech 2. řádu (4,8), příslušných bodu  $A_0$ . Při volbě  $b_1 = 0$  resp.  $b_2 = 0$  resp.  $b_3 = 0$  nazveme přímku  $\alpha_1 = [A_0A_2]$  první resp. druhou resp. třetí projektivní normálou vrstvy  $V$  v bodě  $A_0$  anebo krátce jen první až třetí projektivní normálou, nebude-li obav z nedorozumění. Z relací (5,6) je zřejmé, že v každém bodu  $A_0$  existuje právě jedna první projektivní normála, nejvýše dvě různé druhé a nejvýše tři různé třetí projektivní normály vrstvy  $V$ .  $i$ -tou projektivní normálu ( $i = 1, 2, 3$ ) budeme značit  $n_i$ .

Křivky, které v každém svém bodě se dotýkají projektivní normály  $n_i$  vrstvy  $V$  v tom bodě, tvoří zřejmě vrstvu, kterou označíme  $S^{(1)}$ . Analogickým způsobem definují druhé resp. třetí projektivní normály (nejvýše) dvojnásobnou resp. trojnásobnou síť křivek, kterou označíme  $S^{(2)}$  resp.  $S^{(3)}$ ;  $r$ -násobnou síť ( $r = 1, 2, 3$ ) rozumíme systém  $r$  různých vrstev v nějaké oblasti roviny  $S_2$ , kde každým jejím bodem prochází právě  $r$  křivek toho systému, z nichž každá má v něm různou tečnu. Vrstvy sítě  $S^{(2)}$  resp.  $S^{(3)}$  označíme  $S^{(2j)}$  ( $j = 1, 2$ ) resp.  $S^{(3i)}$  ( $i = 1, 2, 3$ ).

Vyšetříme nyní geometrický význam normál  $n_1, n_2, n_3$ .

Užijeme označení, zavedeného na začátku odst. 4. Z (4,2) a (2,1) plyne při (2,14<sub>1</sub>) a  $\omega_2 = 0$ :

$$d^3A_0 = (\cdot)A_0 + (\cdot)A_1 + 3\bar{\omega}_{01}d\bar{\omega}_{01}A_2$$

(koeficienty při  $A_0, A_1$  nás nezajímají), takže rovnici (4,3<sub>3</sub>) lze takto doplnit:

$$y_2 = \frac{1}{2}\bar{\omega}_{01}^2 + \frac{1}{2}\bar{\omega}_{01}d\bar{\omega}_{01} + (4). \quad (5,7)$$

Z (4,3<sub>1</sub>), (4,3<sub>2</sub>) a (5,7) vychází

$$y_1^2 - 2y_0y_2 = \bar{\omega}_{01}^2\bar{\omega}_{11} + (4). \quad (5,8)$$

Avšak podle (5,1<sub>1</sub>) je  $\bar{\omega}_{11} = 0$  tehdy a jen tehdy, když  $b_1 = 0$ , neboť  $\bar{\omega}_{01} \neq 0$ . Z toho a (5,8) plyne geometrický význam první projektivní normály vrstvy  $V$  v bodě  $A_0$ . Je to jediná přímka jdoucí bodem  $A_0$ , která má tu vlastnost, že involutorní centrická kolineace se středem na této přímce a osou v tečné křivky ( $A_0$ ) vrstvy  $V$  v jejím bodě  $A_0$  transformuje svazek  $\Sigma'_3$  ve svazek kuželoseček  $\Sigma_3$ , které všechny mají s křivkou ( $A_0$ ) v bodě  $A_0$  styk 3. řádu.

Anulováním koeficientu  $b_2$  nebo  $b_3$  přiřazujeme bodu  $A_0$  křivky ( $A_0$ ) vrstvy  $V$  prostřednictvím reperů 2. řádu projektivně invariantním způ-

sobem přímky  $\alpha_1 = [A_0A_2]$  a každému jejímu bodu  $A_2$  různému od  $A_0$  přímku  $\alpha_0$ , totiž tečnu kuželosečky svazku  $\Sigma'_3$  v jejím průsečíku s přímkou  $\alpha_1$  (různém od  $A_0$ ). Uvažujme nyní křivku  $\Gamma$ , která nemusí patřit mezi křivky vrstvy  $V$  a která není přímkou. Pak s touto křivkou můžeme spojit pomocí jejích bodů, které patří křivkám vrstvy  $V$ , způsobem právě uvedeným nulovou korespondenci  $N^*$ , definovanou jednoznačně alespoň v jisté oblasti roviny  $S_2$ , pro niž můžeme psát:

$$N^*A_2 = -\alpha_0.$$

Poněvadž podle (3,9<sub>3</sub>)  $PA_2 = -\alpha_0$ , má korespondence  $N^*$  s přibuzností  $P$  v bodě  $A_2$  analytický styk 1. řádu tehdy a jen tehdy, když

$$P dA_2 = dN^*A_2 + \mu N^*A_2 = -d\alpha_0 - \mu\alpha_0, \quad (5,9)$$

z čehož plyne podle (2,1<sub>3</sub>), (3,9) a (3,2<sub>1</sub>):

$$\omega_{10} + \omega_{21} = 0$$

čili podle (5,1<sub>2</sub>)

$$b_2\omega_1 + b_3\omega_2 = 0. \quad (5,10)$$

(5,10) je nutná a postačující podmínka pro to, aby korespondence  $N^*$ , spojená prostřednictvím přímek  $\alpha_1$  s křivkou  $\Gamma$ , splňovala relaci (5,9) (t. j. měla s přibuzností  $P$  analytický styk 1. řádu v libovolném bodě  $A_2 \neq A_0$  přímky  $\alpha_1$ ). Rovnice (5,10) je splněna identicky tehdy a jen tehdy, když

$$b_2 = b_3 = 0;$$

to znamená, že pouze v případě, kdy (v každém bodě vrstvy  $V$ ) splývá druhá projektivní normála se třetí v přímce  $\alpha_1$ , korespondence  $N^*$  spojená s libovolnou křivkou  $\Gamma$  splňuje relaci (5,9).

Vylučme v dalším tuto možnost. Volíme-li  $b_2 = 0$ , je podle (5,10)  $\omega_2 = 0$ . To znamená, že bereme-li za přímky  $\alpha_1$  tečny jedné z vrstev sítě  $S^{(3)}$ , lze relaci (5,9) vyhovět jen tak, že za křivku  $\Gamma$  vezmeme kteroukoliv křivku vrstvy  $V$ .

Při  $b_3 = 0$  je podle (5,10) pro křivku  $\Gamma$

$$\omega_1 = 0. \quad (5,11)$$

Podle (2,1<sub>1</sub>) jsou touto rovnicí dány křivky, které se v bodě  $A_0$  dotýkají přímky  $\alpha_1 = [A_0A_2]$ . Volme za přímky  $\alpha_1$  tečny jedné z vrstev sítě  $S^{(3)}$ , o níž nejdříve předpokládejme, že není přímková. Tato volba znamená  $b_3 = 0$ , a rovnicí (5,9) lze tudíž v tomto případě splnit jen tak, že za křivku  $\Gamma$  volíme některou křivku vybrané nepřímkové vrstvy sítě  $S^{(3)}$ .

Nyní předpokládejme, že tato vrstva je přímková. Pak je podle (3,2<sub>2</sub>) a (5,11)  $[\omega_{21}\omega_1] = 0$ , a tedy podle (5,1<sub>2</sub>) i  $[\omega_{10}\omega_1] = 0$ . Z toho a z (2,1<sub>2</sub>) plyne, že v tomto případě patří k přímce  $\alpha_1$  též (geometrický) bod  $A_1$ , jinak řečeno, přímka  $\alpha_1 \equiv n_3$  má též pól vzhledem ke všem svazkům  $\Sigma'_3$ , příslušným jejím bodům, uvažovaným jako body křivek vrstvy  $V$ .

Je zřejmé, že uvedené vlastnosti projektivních normál jsou pro ně charakteristické. Jinými jejich vlastnostmi se ještě budeme zabývat v odst. 8., 9. a 16.

6. Uvažujme přímku, procházející libovolným bodem  $A_0$  vrstvy  $V$

$$[A_0, \omega_1 A_1 + \omega_2 A_2]. \quad (6,1)$$

Vyšetříme, kdy je první, druhou anebo třetí projektivní normálou vrstvy  $V$  v bodě  $A_0$ .

Poněvadž všechny tyto normály jsou vždy různé od tečny křivky vrstvy  $V$  v bodě  $A_0$ , můžeme předpokládat

$$\omega_2 \neq 0.$$

Položme pak

$$\lambda = -\frac{\omega_1}{\omega_2}$$

a dosadíme za  $\lambda$  do pravých stran relací (5,6). Až na nenulové faktory dostaneme formy (píšeme  $b_i$  místo  $b_i^0$ ;  $i = 1, 2, 3$ )

$$\left. \begin{aligned} \varphi_1 &= -6\omega_1 + b_1\omega_2, \\ \varphi_2 &= -3\omega_1^2 + b_1\omega_1\omega_2 + b_2\omega_2^2, \\ \varphi_3 &= -2\omega_1^3 + b_1\omega_1^2\omega_2 + 2b_2\omega_1\omega_2^2 + b_3\omega_2^3. \end{aligned} \right\} \quad (6,2)$$

Z (2,10), (4,7) a (2,8<sub>1</sub>) plyne

$$\delta\omega_1 = e_{00}\omega_1 + e_{10}\omega_2, \quad \delta\omega_2 = 2e_{00}\omega_2. \quad (6,3)$$

Užijeme-li relací (5,4) a (6,3), snadno zjistíme, že při změně zbývajících tří nefixovaných sekundárních parametrů, totiž v reperech 2. řádu, platí

$$\delta\varphi_1 = e_{00}\varphi_1, \quad \delta\varphi_2 = 2e_{00}\varphi_2, \quad \delta\varphi_3 = 3e_{00}\varphi_3. \quad (6,4)$$

Z těchto vztahů plyne, že přímka (6,1) je tehdy a jen tehdy první resp. druhou resp. třetí projektivní normálou vrstvy  $V$  v bodě  $A_0$ , jestliže

$$\varphi_1 = 0 \quad \text{resp.} \quad \varphi_2 = 0 \quad \text{resp.} \quad \varphi_3 = 0. \quad (6,5)$$

Tyto rovnice jsou tudíž i diferenciálními rovnicemi vrstvy  $S^{(1)}$  resp. sítí  $S^{(2)}, S^{(3)}$ .

Podle (6,4) jsou formy  $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$  invarianty 3. řádu. Lze z nich utvořit dva nezávislé absolutní invarianty 3. řádu, totiž

$$\frac{\varphi_2}{\varphi_1^2} \quad \text{a} \quad \frac{\varphi_3}{\varphi_1^3}.$$

Mezi přímkami (6,1) je tečna křivky vrstvy  $V$  v bodě  $A_0$  charakterisována rovnicí  $\omega_2 = 0$ . Je tedy podle (6,2) dvojice druhých projektivních normál resp. první projektivní normála vrstvy  $V$  v bodě  $A_0$  první resp. druhou polárou tečny křivky vrstvy  $V$  v bodě  $A_0$  vzhledem ke trojici třetích projektivních normál vrstvy  $V$  v bodě  $A_0$ . Speciálně tečna křivky a první a druhé projektivní normály tvoří harmonickou čtveřinu.

Resultant forem  $\varphi_1, \varphi_2$  resp.  $\varphi_1, \varphi_3$  resp.  $\varphi_2, \varphi_3$  označíme  $R_{12}$  resp.  $R_{13}$  resp.  $R_{23}$ . Jest:

$$\left. \begin{aligned} R_{12} &= b_1^3 + 12b_2, \\ R_{13} &= b_1^3 + 18b_1b_2 + 54b_3, \\ R_{23} &= b_1^3b_3 - b_1^2b_2 + 18b_1b_2b_3 - 16b_2^3 + 27b_3^3, \end{aligned} \right\} \quad (6,6)$$

a jak se snadno zjistí,

$$R_{12}^3 - R_{13}^2 + 108R_{23} = 0. \quad (6,7)$$

Resultanty (6,6) musí být invarianty 3. řádu; a vskutku, použijeme-li relací (5,4), nalezneme:

$$\delta R_{12} = -2e_{00}R_{12}, \quad \delta R_{13} = -3e_{00}R_{13}, \quad \delta R_{23} = -6e_{00}R_{23}. \quad (6,8)$$

V důsledku relace (6,7) lze z nich sestavit jediný nezávislý absolutní invariant 3. řádu

$$\frac{R_{13}^2}{R_{12}^3}. \quad (6,9)$$

V odst. 12. a 13. udáme geometrický význam tohoto invariantu.

Kombinací resultantů (6,6) a forem (6,2) dostaneme podle (6,4) a (6,8) další absolutní invarianty 3. řádu, na př.

$$\frac{\varphi_2}{R_{12}}, \quad \frac{\varphi_3}{R_{13}}, \quad \frac{\varphi_1^2}{R_{12}}$$

atp.

7. Předpokládejme, že pro všechny body  $A_0$  nějaké vrstvy platí mezi koeficienty  $b_1, b_2, b_3$  nějaká relace

$$F(b_1, b_2, b_3) = 0, \quad (7,1)$$

která splňuje tyto dvě podmínky:

1. Alespoň pro jedno  $i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) je

$$\frac{\partial}{\partial b_i} F \neq 0; \quad (7,2)$$

2.  $\delta F = \varrho F$ ,

kde  $\varrho$  je nějaký faktor.

Vyšetříme nyní integrabilitu systému

$$\left. \begin{aligned} \omega_{12} &= \omega_1; \\ 3\omega_{11} &= b_1\omega_1 + b_2\omega_2, \\ \omega_{10} + \omega_{21} &= b_2\omega_1 + b_3\omega_2; \\ F(b_1, b_2, b_3) &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (7,3)$$

Vybereme předně takový koeficient  $b_i$ , pro který platí (7,2). Zbývajícím dvěma koeficientům můžeme podle (5,5) a (5,6) dát numerické hodnoty. V důsledku

(7,2) nabude pak i koeficient  $b_i$  numerické hodnoty a systém (7,3) se uzavře rovnicemi (5,2), v nichž

$$db_1 = db_2 = db_3 = 0.$$

Snadno se pak zjistí, že systém (7,3) je v involuci a že jeho řešení závisí na dvou funkcích jednoho argumentu.

Předpokládejme za druhé, že mezi koeficienty  $b_1, b_2, b_3$  platí kromě (7,1) ještě jedna relace

$$G(b_1, b_2, b_3) = 0, \quad (7,4)$$

která spolu s relací (7,1) splňuje podmínku 2. a že ještě matice

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial F}{\partial b_1} & \frac{\partial F}{\partial b_2} & \frac{\partial F}{\partial b_3} \\ \frac{\partial G}{\partial b_1} & \frac{\partial G}{\partial b_2} & \frac{\partial G}{\partial b_3} \end{pmatrix}$$

má hodnotu 2. Permutaci čísel 1, 2, 3 označme  $i_1, i_2, i_3$ . Předpokládejme ještě, že pro nějaké  $b_{i_1} = 0$  je determinant tvořený sloupci  $i_2$ -tý a  $i_3$ -tým matice (7,5) nenulový. Volbou jednoho sekundárního parametru můžeme podle (5,6) dosáhnout toho, aby  $b_{i_1} = 0$ , a tím dát i koeficientům  $b_{i_2}, b_{i_3}$  numerické hodnoty. Ty však musí být nutně takové, aby uvedené fixování koeficientů  $b_i$  vedlo jen k jedné relaci mezi formami  $e_{rs}$ , nezávislé na (2,7), (2,8) a (4,7). Ale to nastane podle (5,3) jedině při

$$b_1 = b_2 = b_3 = 0. \quad (7,6)$$

Mohou být tedy relace (7,1) a (7,4) pouze toho tvaru, že anulováním koeficientu  $b_{i_1}$  plyne z nich (7,6). Vrstvy, pro jejichž koeficienty  $b_i$  takové dvě relace platí, jsou charakterisovány při vhodné volbě reperů systémem rovnic

$$\left. \begin{array}{l} \omega_{12} = \omega_1; \\ \omega_{11} = 0, \quad \omega_{10} + \omega_{21} = 0, \end{array} \right\} \quad (7,7)$$

který se uzavře rovnicí

$$[\omega_{10} - \omega_{21}, \omega_1] = 0.$$

Je tedy systém (7,7) v involuci a jeho řešení závisí na jedné funkci jednoho argumentu.

Výsledků tohoto odstavce později užijeme.

**8.** Z výsledků odst. 4. a ze známých vlastností projektivní normály rovinné křivky je zřejmé, že pouze první projektivní normála vrstvy  $V$  v jejím bodě  $A_0$  může být projektivní normálou křivky ( $A_0$ ) vrstvy  $V$  v bodě  $A_0$ . Projektivní normála  $n_1$  vrstvy  $V$  a projektivní normála její křivky ( $A_0$ ) v týchž bodech  $A_0$  vrstvy  $V$  splývají tehdy a jen tehdy, když je možno volit repery bodů  $A_0$  vrstvy  $V$  tak, aby při

$$\omega_2 = 0, \quad (8,1)$$

t. j. na křivkách  $(A_0)$ , platilo pro ně:

$$\left. \begin{aligned} dA_0 &= \omega_1 A_1, \\ dA_1 &= -k\omega_1 A_0 + \omega_1 A_2, \\ dA_2 &= \omega_1 A_0 - k\omega_1 A_1; \end{aligned} \right\} \quad (8,2)$$

$$[d\omega_1] = 0, \quad [dk\omega_1] = 0.$$

(8,2) je totiž normální reper křivky  $(A_0)$ , jehož přímka  $[A_0 A_2]$  je právě projektivní normála;  $\omega_1$  je diferenciál projektivního oblouku a  $k$  projektivní křivost křivky  $(A_0)$ .

Zjistíme nyní, kdy je možno provést naznačenou normalisaci reperů, a to jejich postupným fixováním.

V relacích (5,1) volíme ovšem

$$b_1 = 0, \quad (8,3)$$

takže máme

$$2(\omega_{11} - \omega_{00}) - (\omega_{22} - \omega_{00}) = b_2 \omega_2, \quad \omega_{10} + \omega_{21} = b_2 \omega_1 + b_3 \omega_2. \quad (8,4)$$

(8,3) znamená fixování třetího sekundárního parametru, a proto pomocí vnějšího diferencování rovnic (8,4) musíme dostat právě jednu relaci jen mezi formami  $\omega_{rs}$  ( $0 \leq r, s \leq 2$ ) nezávislou na (2,2), (2,15) a (5,1). Podle (5,3) a (8,3) je to zřejmě

$$\omega_{10} - \omega_{21} = c_1 \omega_1 + c \omega_2, \quad (8,5)$$

a tedy vzhledem k (4,7<sub>2</sub>)

$$e_{10} = e_{21} = 0. \quad (8,6)$$

Je tudíž podle (5,4), (2,10), (2,8<sub>1</sub>), (4,7) a (8,6)

$$\delta b_2 = -2e_{00} b_2, \quad \delta b_3 = -3e_{00} b_3; \quad (8,7)$$

$$\delta \omega_1 = e_{00} \omega_1, \quad \delta \omega_2 = 2e_{00} \omega_2. \quad (8,8)$$

Z (8,5), (8,7) a (8,8) snadno zjistíme, že

$$\delta c_1 + 2e_{00} c_1 + 2e_{20} = 0,$$

$$\delta c + 3e_{00} c = 0.$$

Potom můžeme volbou čtvrtého sekundárního parametru anulovat koeficient  $c_1$  v (8,5), takže dostaneme

$$\omega_{10} - \omega_{21} = c \omega_2. \quad (8,5')$$

Diferencujeme-li vnějšně tuto rovnici, obdržíme

$$2[\omega_{20} \omega_1] + [dc - c(\omega_{11} - \omega_{00} + \omega_{22} - \omega_{00}) + \frac{1}{2} b_2^2 \omega_1, \omega_2] = 0,$$

z čehož

$$\omega_{20} = f_1 \omega_1 + f \omega_2, \quad (8,9)$$

$$e_{20} = 0. \quad (8,10)$$



Podle (8,6), (8,10) a (8,8) platí pro koeficienty  $f_1, f$  v (8,9):

$$\delta f_1 + 3e_{00}f_1 = 0, \quad \delta f + 4e_{00}f = 0,$$

takže za předpokladu

$$f_1 \neq 0$$

můžeme poslední sekundární parametr fixovat tak, aby  $f_1 = 1$ . Pak je

$$\omega_{20} = \omega_1 + f\omega_2 \quad (8,9')$$

a vnějším diferencováním dostaneme

$$[\omega_{11} - \omega_{00} + \omega_{22} - \omega_{00}, \omega_1] - [df - 2f(\omega_{22} - \omega_{00}) + \frac{1}{2}b_2(1 - c)\omega_1, \omega_2] = 0,$$

z čehož vychází

$$\begin{aligned} \omega_{11} - \omega_{00} + \omega_{22} - \omega_{00} &= g_1\omega_1 + g_2\omega_2, \\ e_{00} = e_{22} &= 0, \end{aligned} \quad (8,11)$$

takže repery jsou už zcela normalisovány. Z (8,4), (8,5'), (8,9') a (8,11) plyne pro ně:

$$\left. \begin{aligned} 3(\omega_{11} - \omega_{00}) &= g_1\omega_1 + (g_2 + b_2)\omega_2, \\ 3(\omega_{22} - \omega_{00}) &= 2g_1\omega_1 + (2g_2 - b_2)\omega_2; \\ \omega_{12} &= \omega_1; \\ 2\omega_{10} &= b_2\omega_1 + (b_3 + c)\omega_2, \quad 2\omega_{21} = b_2\omega_1 + (b_3 - c)\omega_2; \\ \omega_{20} &= \omega_1 + f\omega_2. \end{aligned} \right\} (8,12)$$

$\omega_1, \omega_2, b_2, b_3, c, f, g_1, g_2$  jsou ovšem invarianty. Pro  $\omega_1, \omega_2$  platí

$$[d\omega_1] = \frac{1}{6}(2g_2 - b_2)[\omega_1\omega_2], \quad [d\omega_2] = -\frac{2}{3}g_1[\omega_1\omega_2] \quad (8,13)$$

a úplná integrabilita systému (8,12) je vyjádřena podmínkami:

$$\left. \begin{aligned} [db_2\omega_2] &= (\frac{2}{3}b_2g_1 - 3c)[\omega_1\omega_2], \\ [db_2\omega_1] + [db_3\omega_2] &= (b_3g_1 - \frac{1}{3}b_2(2g_2 - b_2))[\omega_1\omega_2], \\ [dc\omega_2] &= (-\frac{1}{2}b_2^2 + cg_1 + 2f)[\omega_1\omega_2], \\ [df\omega_2] &= (\frac{1}{2}b_2(1 + c) + \frac{4}{3}fg_1 - g_2)[\omega_1\omega_2], \\ [dg_1\omega_1] + [dg_2\omega_2] &= (-\frac{2}{3}(b_3 + c) + 3 - \frac{1}{3}b_2g_1 + \frac{1}{2}b_2g_2 + \frac{1}{3}g_1g_2)[\omega_1\omega_2]. \end{aligned} \right\} (8,14)$$

Je zřejmé, že jiná normalisace reperů vrstvy  $V$  není v našem problému možná. Dále je jasné a bez obtíží se verifikuje výpočtem, že volba  $c_1 = 0$  v rovnici (8,5) znamená (geometrickou) identifikaci vrcholu  $A_2$  našeho reperu vrstvy  $V$  s průsečíkem první projektivní normály vrstvy  $V$  v bodě  $A_0$  s oskuláčnickou kuželosečkou křivky ( $A_0$ ) vrstvy  $V$  v bodě  $A_0$ .

Z (8,2), (8,12) a (8,13<sub>2</sub>) plyne, že první projektivní normály vrstvy splývají s projektivními normálami jejich křivek tehdy a jen tehdy, když

$$g_1 = 0, \quad (8,15)$$

t. j. když  $\omega_2$  je (po provedené normalisaci reperů) úplný diferenciál.

Ještě je třeba vyšetřit integrabilitu systému (8,12), v němž platí (8,15).  
Systém se uzavře rovnicemi (8,14<sub>1,2,3,4</sub>) a rovnicí

$$[dg_2\omega_2] = \frac{1}{2}(6 - 3b_3 - 3c + b_2g_2) [\omega_1\omega_2].$$

Je v involuci a jeho řešení závisí na pěti funkcích jednoho argumentu.

Máme tak tento výsledek:

*Vrstvy, jejichž první projektivní normály jsou projektivními normálami jejich křivek (v týchž bodech ovšem), existují a závisí na pěti funkcích jedné proměnné.*

Současně je vidět, že prostřednictvím takových vrstev lze bodu  $A_0$  každé jejich křivky přiřadit projektivní normálu již pomocí okolí 3. řádu bodu  $A_0$ .

9. Uvedeme ještě jednu zajímavou vlastnost druhých a pak třetích projektivních normál vrstvy  $V$ .

$Z(2,1)$ , (2,15) a (5,1<sub>1</sub>) plyne

$$\omega_1 dA_0 - \omega_2 dA_1 = (\omega_1\omega_{00} - \omega_2\omega_{10}) A_0 - \frac{1}{3}(-3\omega_1^2 + b_1\omega_1\omega_2 + b_2\omega_2^2) A_1.$$

Tato rovnice znamená, že v reperech 2. řádu platí takové dvě relace mezi faktory aritmetických bodů  $A_0, A_1, A_2$ , že

$$[A_0 dA_0 dA_1] = 0$$

tehdy a jen tehdy, když  $\varphi_2 = 0$ , t. j. když bod  $A_0$  opisuje křivky sítě  $S^{(2)}$ .

Vraťme se ještě k příbuznosti  $P$ , definované v odst. 3. relacemi (3,9)! Repery 2. řádu jsme volili tak, aby v nich

$$P dA_0 = d\alpha_2 - \omega_{11}\alpha_2, \quad (9,1)$$

kde ovšem  $\alpha_2 = NA_0 = PA_0$ .  $Z(2,1)$ , (3,9) a (3,2) nalezneme:

$$\begin{aligned} P d^2A_0 &= -(d\omega_2 + \omega_1^2 - \omega_2\omega_{11}) \alpha_0 - (d\omega_1 - \omega_1\omega_{22} + \omega_2\omega_{21}) \alpha_1 - (\cdot) \alpha_2, \\ d^2\alpha_2 &= -(d\omega_2 - \omega_1^2 + \omega_2\omega_{11}) \alpha_0 - (d\omega_1 + \omega_1\omega_{00} - \omega_2\omega_{10}) \alpha_1 - (\cdot) \alpha_2; \end{aligned}$$

koeficienty při  $\alpha_2$  nás nebudou zajímat. Položme ještě

$$\Omega_0 = 2\omega_1^2, \quad \Omega_1 = b_1\omega_1^2 + 2b_2\omega_1\omega_2 + b_3\omega_2^2. \quad (9,2)$$

Snadno zjistíme, že platí:

$$P d^2A_0 = d^2\alpha_2 - 2\omega_{11} d\alpha_2 - (\Omega_0\alpha_0 + \Omega_1\alpha_1) + (\cdot) \alpha_2. \quad (9,3)$$

Takovou přímkou

$$[A_0, \omega_1A_1 + \omega_2A_2], \quad (6,1)$$

pro niž

$$\Omega_0 = \Omega_1 = 0 \quad \text{resp.} \quad \Omega_0 : \Omega_1 = \omega_2 : \omega_1, \quad (9,4)$$

nazveme podle E. Čecha *hlavní resp. charakteristickou přímkou*. Z (9,2), (9,4), (6,2<sub>3</sub>) a (6,5<sub>3</sub>) je zřejmé, že *charakteristické i hlavní přímky splývají s třetími*

*projektivními normálami vrstvy V*. Geometrický význam hlavních resp. charakteristických přímek, založený na relacích (9,1)—(9,4), je speciálním případem vět (po příslušných duálních transformacích), které uvádí E. Čech ve své práci o projektivních diferenciálních vlastnostech korespondencí mezi dvěma prostory (část I, odst. 8).

Jinou zajímavou vlastnost třetích projektivních normál uvedeme v odst. 16.

**10.** Předpokládejme, že vrstvě  $V$  jsme nějakým projektivně invariantním způsobem přiřadili vrstvu  $V'$ , jež spolu s vrstvou  $V$  tvoří dvojnásobnou síť, a zkoumejme, zda je možno volit repery 2. řádu vrstvy  $V$  tak, aby byly současně repery 2. řádu vrstvy  $V'$  (viz odst. 2., kde byly definovány repery 2. řádu vrstvy křivek). K tomu je především nutné volit přímku  $[A_0A_2]$  reperu bodu  $A_0$  v tečně v bodě  $A_0$  té křivky vrstvy  $V'$ , která jím prochází, a o vrstvě  $V'$  předpokládat, že není přímková.

Poněvadž podle (2,1)

$$\left. \begin{aligned} dA_0 &= \omega_{00}A_0 + \omega_2A_2 + \omega_1A_1, \\ dA_2 &= \omega_{20}A_0 + \omega_{22}A_2 + \omega_{21}A_1, \\ dA_1 &= \omega_{10}A_0 + \omega_{12}A_2 + \omega_{11}A_1, \end{aligned} \right\} \quad (10,1)$$

je naše otázka analyticky formulována rovnicemi

$$\omega_{12} = \omega_1, \quad \omega_{21} = \omega_2. \quad (10,2)$$

Systém (10,2) se uzavře rovnicemi

$$3[\omega_{11}\omega_1] + [\omega_{10}\omega_2] = 0, \quad [\omega_{20}\omega_1] + 3[\omega_{22}\omega_2] = 0,$$

z nichž plyne podle Cartanova lemmatu:

$$\left. \begin{aligned} 3\omega_{11} &= b_1\omega_1 + b_2\omega_2, \\ \omega_{10} &= b_2\omega_1 + (b_3 - 1)\omega_2; \end{aligned} \right\} \quad (10,3)$$

$$\left. \begin{aligned} \omega_{20} &= (\beta_3 - 1)\omega_1 + \beta_2\omega_2, \\ 3\omega_{22} &= \beta_2\omega_1 + \beta_1\omega_2. \end{aligned} \right\} \quad (10,4)$$

Je ihned vidět, že systém (10,2) je v involuci a jeho řešení závisí na dvou funkcích dvou argumentů. Požadavky (10,2) lze tedy splnit u každé dvojnásobné nepřímkové sítě, a jak plyne z (10,2)—(10,4), je jimi reper úplně normalisován.

Zvláště je možno uvedeným způsobem normalisovat repery, volíme-li za vrstvu  $V'$  některou z vrstev (která není přímková)

$$S^{(1)}, S^{(2j)}, S^{(3i)} \quad (j = 1, 2; i = 1, 2, 3).$$

Platí pro ně:

$$\left. \begin{aligned} dA_0 &= \omega_{00}A_0 + \omega_1A_1 + \omega_2A_2, & dA_0 &= \omega_{00}A_0 + \omega_2A_2 + \omega_1A_1, \\ dA_1 &= \omega_{10}A_0 + \omega_{11}A_1 + \omega_1A_2, & \text{čili} & \quad dA_2 = \omega_{20}A_0 + \omega_{22}A_2 + \omega_2A_1, \\ dA_2 &= \omega_{20}A_0 + \omega_2A_1 + \omega_{22}A_2, & dA_1 &= \omega_{10}A_0 + \omega_1A_2 + \omega_{11}A_1, \end{aligned} \right\} \quad (10,5)$$

kde

$$\left. \begin{aligned} 3\omega_{11} &= b_1\omega_1 + b_2\omega_2, \\ \omega_{10} + \omega_2 &= b_2\omega_1 + b_3\omega_2, \end{aligned} \right\} \quad (10,3')$$

$$\left. \begin{aligned} 3\omega_{22} &= \beta_1\omega_2 + \beta_2\omega_1, \\ \omega_{20} + \omega_1 &= \beta_2\omega_2 + \beta_3\omega_1, \end{aligned} \right\} \quad (10,4')$$

a podle toho, volíme-li za vrstvu  $V'$  vrstvu  $S^{(1)}$  resp. některou z vrstev  $S^{(2j)}$  resp.  $S^{(3i)}$ , je třeba v rovnicích (10,3') anulovat invariant  $b_1$  resp.  $b_2$  resp.  $b_3$ . Z relací (10,5) a (10,4') je okamžitě patrný geometrický význam invariantů  $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ ;  $\beta_1 = 0$  resp.  $\beta_2 = 0$  resp.  $\beta_3 = 0$  je nutná a postačující podmínka pro to, aby vrstva  $V$  byla vrstvou  $S^{(1)}$  resp. vrstvou sítě  $S^{(2)}$  resp. sítě  $S^{(3)}$ , příslušných k vrstvě  $V'$ .

Pro invarianty  $\omega_1, \omega_2$  nalezneme snadno z (10,3') (10,4') a (2,2):

$$\left. \begin{aligned} [d\omega_1] &= \frac{1}{3}(2b_2 + \beta_1) [\omega_1\omega_2], \\ [d\omega_2] &= \frac{1}{3}(b_1 + 2\beta_2) [\omega_2\omega_1], \end{aligned} \right\} \quad (10,6)$$

takže podmínky integrability rovnic (10,2), (10,3') a (10,4') jsou:

$$\left. \begin{aligned} [db_1\omega_1] + [db_2\omega_2] &= \frac{1}{3}\{-b_1(2b_2 + \beta_1) + b_2(b_1 + 2\beta_2) - 9b_3 + 18\} [\omega_1\omega_2], \\ [db_2\omega_1] + [db_3\omega_2] &= \frac{1}{3}\{-2b_2(2b_2 + \beta_1) + 3(b_3 - 1)(b_1 + \beta_2) + 3\beta_2\} [\omega_1\omega_2], \\ [d\beta_1\omega_2] + [d\beta_2\omega_1] &= \frac{1}{3}\{-\beta_1(b_1 + 2\beta_2) + \beta_2(2b_2 + \beta_1) - 9\beta_3 + 18\} [\omega_2\omega_1], \\ [d\beta_2\omega_2] + [d\beta_3\omega_1] &= \frac{1}{3}\{-2\beta_2(b_1 + 2\beta_2) + 3(\beta_3 - 1)(b_2 + \beta_1) + 3b_2\} [\omega_2\omega_1]. \end{aligned} \right\} \quad (10,7)$$

11. V odst. 11.—15. vyšetříme vrstvy, jejichž vrstvy

$$S^{(1)}, S^{(2j)}, S^{(3i)} \quad (j = 1, 2; i = 1, 2, 3) \quad (11,1)$$

ncjsou všechny různé.

V tomto odstavci se budeme zabývat vrstvami, u nichž sítě  $S^{(2)}$  a  $S^{(3)}$  mají společnou vrstvu, kterou označíme prostě  $S$  a o níž budeme předpokládat, že nesplývá s vrstvou  $S^{(1)}$ . Takové vrstvy budeme značit  $V^{(1)}$ . Poněvadž resultant  $R_{23}$  forem  $\varphi_2, \varphi_3$  je až na nenulový faktor současně diskriminantem formy  $\varphi_3$ , můžeme říci podle odst. 6. a 7.:

*Vrstvy  $V^{(1)}$ , které jsou analyticky charakterisovány relacemi*

$$R_{23} = 0, \quad R_{12} \neq 0$$

*mezi koeficienty  $b_1, b_2, b_3$ , závisí na dvou funkcích jednoho argumentu. Pouze u těchto vrstev splývají s jednou vrstvou dvojnásobné sítě  $S^{(2)}$  dvě vrstvy sítě  $S^{(3)}$ .*

Volme přímku  $[A_0A_2]$  reperů 2. řádu bodu  $A_0$  v tečně křivky vrstvy  $S$  v bodě  $A_0$ , takže

$$\begin{aligned} b_2 &= b_3 = 0, \\ b_1 &\neq 0. \end{aligned}$$

Z (10,7<sub>2</sub>) pak plyne  $b_1[\omega_1\omega_2] = 0$ , což je v důsledku (2,3) nemožné. To znamená,

že vrstva  $S$  je přímková. Obálku jejích přímek, která eventuelně může degenerovat v bod, označme  $\Gamma_2$ . Volíme-li

$$b_1 = 3$$

a bod  $A_2$  v dotykovém bodu přímky  $[A_0A_2]$  na obálce  $\Gamma_2$  (resp. v bodě  $\Gamma_2$ , degeneruje-li), dostaneme tento reper bodu  $A_0$  vrstvy  $V^{(1)}$ :

$$\left. \begin{aligned} dA_0 &= -c\omega_1A_0 + \omega_1A_1 && + \omega_2A_2, \\ dA_1 &= && \omega_1A_1 && + \omega_1A_2, \\ dA_2 &= f\omega_1A_0 && + (c-1)\omega_1A_2, \end{aligned} \right\} \quad (11,2)$$

kde  $\omega_1, \omega_2, c, f$  jsou invarianty, pro něž platí:

$$\left. \begin{aligned} [d\omega_1] &= 0, & [d\omega_2] &= (1-2c)[\omega_1\omega_2]; \\ [dc\omega_1] &= f[\omega_1\omega_2], \\ [df\omega_1] &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (11,3)$$

V těchto reperech je vrstva  $S^{(1)}$  dána rovnicí

$$2\omega_1 - \omega_2 = 0,$$

vrstva  $S^{(2)}$  různá od  $S$  rovnicí

$$\omega_1 - \omega_2 = 0,$$

a konečně vrstva  $S^{(3)}$  různá od  $S$  rovnicí

$$2\omega_1 - 3\omega_2 = 0.$$

Podle (11,2) mají normální repery bodů  $A_0$  téže přímky vrstvy  $S$  společný vrchol  $A_1$ . Jeho geometrické místo  $\Gamma_1$  je zřejmě křivka, která nemůže degenerovat v bod. Dále je vidět z (11,2), že tečna křivky  $\Gamma_1$  v bodě  $A_1$  protíná křivku  $\Gamma_2$  v bodě  $A_2$ . Snadno se zjistí, že tyto vlastnosti jsou pro vrstvu  $V^{(1)}$  charakteristické. Z toho plyne toto *geometrické vytvoření vrstvy*  $V^{(1)}$ :

Zvolme dvě libovolné křivky  $\Gamma_1, \Gamma_2$ , na  $\Gamma_1$  bod  $A_1$  a určíme průsečík  $A_2$  tečny křivky  $\Gamma_1$  v bodě  $A_1$  s křivkou  $\Gamma_2$ . V bodě  $A_2$  sestrojme ke křivce  $\Gamma_2$  tečnu a jejím bodům  $A_0$  různým od  $A_2$  přiřadíme jejich spojnice  $[A_0A_1]$  s bodem  $A_1$ . Proběhne-li bod  $A_1$  křivkou  $\Gamma_1$ , dostaneme tak mezi body  $A_0$  a přímkami  $[A_0A_1]$  nulovou korespondenci, jejíž křivky tvoří vrstvu  $V^{(1)}$  (alespoň v jisté oblasti).

Nutná a postačující podmínka pro to, aby křivka  $\Gamma_2$  degenerovala v bod, je podle (11,2<sub>3</sub>)

$$f = 0. \quad (11,4)$$

V tomto a jen v tomto případě křivka  $\Gamma_1$  přejde v přímku incidentní s bodem  $\Gamma_2$  a kterékoliv dvě křivky vrstvy  $V^{(1)}$  jsou v *elaci*, jejíž střed je v bodě  $\Gamma_2$  a osa v přímce  $\Gamma_1$ . Je zcela jasné geometricky i analyticky z rovnic (11,3), že v tomto případě závisí vrstva  $V^{(1)}$  na jedné funkci jednoho argumentu.

Z (11,2) plyne dále, že při duální transformaci formy  $\omega_1, \omega_2$  změní znaménko, invariant  $c$  přejde v  $1 - c$  a invariant  $f$  se transformuje beze změny. Invariant  $c$  se tedy dualitou nemění tehdy a jen tehdy, když i forma  $\omega_2$  je úplný diferenciál.

Při

$$c = \text{konst.} \quad (11,5)$$

je podle (11,3<sub>3</sub>) nutně  $f = 0$ . Položíme-li  $d\bar{u} = \omega_1$  při  $\omega_2 = 0$  a derivaci podle  $\bar{u}$  označíme čárkou, dostaneme pak podle (11,2) pro křivky

$$\omega_2 = 0$$

vrstvy  $V^{(1)}$ , pro niž platí (11,4) a (11,5):

$$A'_0 = -cA_0 + A_1, \quad A'_1 = A_1 + A_2, \quad A'_2 = (c-1)A_2. \quad (11,6)$$

Za předpokladu

$$(c-2)(c+1)(2c-1) \neq 0 \quad (11,7)$$

dostaneme jednoduchými integracemi

$$\left. \begin{aligned} A_2 &= C_2 e^{(c-1)\bar{u}}, \\ A_1 &= C_1 e^{\bar{u}} + \frac{1}{c-2} C_2 e^{(c-1)\bar{u}}, \\ A_0 &= C_0 e^{-c\bar{u}} + \frac{1}{c+1} C_1 e^{\bar{u}} + \frac{1}{(c-2)(2c-1)} C_2 e^{(c-1)\bar{u}}; \end{aligned} \right\} \quad (11,8)$$

$C_0, C_1, C_2$  jsou při  $\omega_2 = 0$  analyticky pevné body. Je zřejmé, že když  $c$  je racionální číslo vyhovující nerovnosti (11,7), jsou křivky uvažované speciální vrstvy  $V^{(1)}$  algebraické racionální. Jednoduchou diskusí se zjistí, že tyto křivky jsou kuželosečky jedině při

$$c = 0, 1$$

a kubiky pouze pro

$$c = -4, -\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{4}{3}, \frac{5}{2}, 5. \quad (11,9)$$

Vyšetříme podrobněji vrstvy, u nichž invariant  $c$  má některou z hodnot právě uvedených.

Začneme s  $c = 0$ . Podle (11,8) leží body

$$A_2 = C_2 e^{-\bar{u}}, \quad 2A_1 + A_2 = 2C_1 e^{\bar{u}}$$

na každé kuželosečce vrstvy a podle (11,2) jsou geometricky pevné. Z toho a známého nám už významu rovnice (11,4) plyne, že uvažovaná vrstva  $V^{(1)}$  je tvořena svazkem kuželoseček,<sup>1)</sup> které mají dva společné body  $C_1, C_2$ , z nichž v  $C_2$  se navzájem oskulují.

<sup>1)</sup> Podrobněji řečeno, pouze v takové oblasti roviny  $S_2$ , v níž je možno dosáhnout toho, aby každým jejím bodem procházela právě jedna kuželosečka (resp. právě jeden oblouk kubiky bez bodu vratu nebo bodu inflexního).

Při  $c = 1$  dostaneme podobným způsobem, že příslušná vrstva  $V^{(1)}$  je tvořena kuželosečkami <sup>2)</sup>, které se v bodě  $C_1$  navzájem oskuluji a každé dvě z nich jsou v elaci, jejíž osa je tečna  $[C_1C_2]$  těch kuželoseček v bodě  $C_1$  a střed v bodě  $C_2 \neq C_1$ .

Je-li invariant  $c$  roven některému z čísel v (11,9), je příslušná vrstva  $V^{(1)}$  zřejmě tvořena kubikami <sup>3)</sup> s body vratu a dostaneme ji takto: Zvolme libovolné tři pevné body  $C_0, C_1, C_2$  tak, aby neležely na přímce. Necht  $m, n, p = 0, 1, 2; m \neq n \neq p \neq m$ . Sestrojíme křivku 3. stupně  $K$ , která má v bodě  $C_m$  bod vratu s tečnou  $[C_mC_n]$  a v bodě  $C_p$  bod inflexní s tečnou  $[C_pC_n]$ . Výše uvedené speciální vrstvy  $V^{(1)}$  dostaneme z kubik  $K$  elacemi, jejichž střed je v bodě  $C_2$  a osa v přímce  $[C_1C_2]$ .

**12.** Vrstvu, jejíž vrstva  $S^{(1)}$  splývá s jedinou z vrstev sítě  $S^{(3)}$ , označíme  $V^{(2)}$ . Studium této vrstvy je podstatně obtížnější než studium vrstvy  $V^{(1)}$ , a proto se zde omezíme jen na několik stručných poznámek.

Podle odst. 6. a 7. vrstva  $V^{(2)}$  je charakterisována relacemi

$$R_{13} = 0, \quad R_{23} \neq 0 \quad (12,1)$$

a závisí na dvou funkcích jednoho argumentu.

Dále uvažujeme třetí projektivní normály nějaké vrstvy  $V$  v bodě  $A_0$  a tečnu křivky  $(A_0)$  vrstvy  $V$  v tomto bodě  $A_0$ . Podle (6,2<sub>3</sub>) jsou tyto čtyři přímky ve svazku

$$[A_0, \omega_1 A_1 + \omega_2 A_2] \quad (6,1)$$

určeny rovnicí

$$-2\omega_1^2\omega_2 + b_1\omega_1^2\omega_2^2 + 2b_2\omega_1\omega_2^3 + b_3\omega_2^4 = 0 \quad (12,2)$$

mezi parametry  $\omega_1, \omega_2$  svazku (6,1). Známý invariant  $T$  této bikvadratické rovnice (12,2) je [viz (6,6<sub>2</sub>)]

$$T = -\frac{1}{2\sqrt{6}}R_{13}.$$

Z této relace plyne vzhledem k (12,1): Vrstva je tedy a jen tehdy vrstvou  $V^{(2)}$ , když její třetí projektivní normály spolu s tečnou křivky vrstvy (v každém jejím bodě) tvoří harmonickou čtveřinu.

Tvoří tedy druhé a třetí projektivní normály vrstvy  $V^{(2)}$  různé od její první projektivní normály v každém jejím bodě  $A_0$  páry involuce, jejíž samodružné elementy jsou první projektivní normála a tečna křivky  $(A_0)$  vrstvy  $V^{(2)}$  v bodě  $A_0$ .

**13.** V tomto odstavci budeme studovat vrstvu, u níž vrstva  $S^{(1)}$  je vrstvou sítě  $S^{(2)}$ , avšak nikoliv sítě  $S^{(3)}$ . Takovou vrstvu označíme  $V^{(3)}$ . Podle toho, co jsme řekli v odst. 6. a 7., je tato vrstva charakterisována relacemi

$$R_{12} = 0, \quad R_{23} \neq 0 \quad (13,1)$$

<sup>1)</sup> Viz pozn. 1).

<sup>2)</sup> Viz pozn. 1).

a závisí na dvou funkcích jednoho argumentu. Poněvadž  $-\frac{1}{4}R_{12}$  je i diskriminant formy  $\varphi_2$ , splývají s vrstvou  $S^{(1)}$  obě vrstvy sítě  $S^{(2)}$ .

Nejprve uvedeme dvě charakteristické vlastnosti vrstvy  $V^{(3)}$ . Tak předně invariant  $S$  rovnice (12,2) je

$$S = \frac{1}{12}R_{12},$$

z čehož plyne vzhledem k (13,1): *Nutnou a postačující podmínkou, aby vrstva byla vrstvou  $V^{(3)}$ , je, aby její třetí projektivní normály spolu s tečnou křivkou vrstvy tvořily ekvianharmonickou čtveřinu (v každém jejím bodě).*

Uvažujme za druhé ve svazku přímek

$$[A_0, \omega_1 A_1 + \omega_2 A_2] \quad (6,1)$$

první a třetí projektivní normály vrstvy. Ty jsou podle (6,2<sub>1</sub>), (6,2<sub>3</sub>) a (6,5) určeny rovnicí

$$12\omega_1^4 - 8b_1\omega_1^3\omega_2 + (b_1^2 - 12b_2)\omega_1^2\omega_2^2 + 2(b_1b_2 - 3b_3)\omega_1\omega_2^3 + b_1b_3\omega_2^4 = 0. \quad (13,2)$$

Pro invariant  $S$  této rovnice nalezneme

$$S = \frac{1}{12}R_{12}^3, \quad (13,3)$$

a tudíž vzhledem k (13,1) *vrstva je tehdy a jen tehdy typu  $V^{(3)}$ , jestliže její první a třetí projektivní normály tvoří ekvianharmonickou čtveřinu (v každém jejím bodě).*

Invariant  $T$  rovnice (13,2) je

$$T = -R_{23} - \frac{1}{2}R_{12}^3$$

čili podle (6,7):

$$216T = R_{12}^3 - 2R_{13}^2. \quad (13,4)$$

Pro dvojpoměr  $k$  čtyř přímek (6,1), určených rovnicí (13,2), platí ( $k \neq -1, \frac{1}{2}, 2$ ):

$$\frac{S^3}{T^2} = 108 \frac{(k^2 - k + 1)^3}{(k + 1)^2 (k - 2)^2 (2k - 1)^2},$$

kde  $S$  a  $T$  je dáno v (13,3) a (13,4). Předpokládáme-li na okamžik  $R_{12} \neq 0$ , dostaneme podle (13,3) a (13,4):

$$\frac{S^3}{T^2} = \frac{27}{\left(1 - 2 \frac{R_{13}^2}{R_{12}^3}\right)^2}.$$

Posledními dvěma rovnicemi je dán geometrický význam absolutního invariantu (6,9); speciálně jeho konstantní hodnota je nutná a postačující podmínka pro konstantní dvojpoměr první a třetích projektivních normál vrstvy  $V$ .

Vraťme se opět k vrstvě  $V^{(3)}$ ! Při dalším jejím vyšetřování zvolíme ovšem takové repery, aby

$$b_1 = b_2 = 0 \quad \text{a} \quad b_3 = 2. \quad (13,5)$$



Pak se relace (5,1) a (5,3) redukují na

$$\left. \begin{aligned} \omega_{11} &= 0, & \omega_{10} + \omega_{21} &= 2\omega_2; \\ \omega_{21} - \omega_{10} &= 2c_1\omega_1, & \omega_{00} &= c_4\omega_2 \end{aligned} \right\} \quad (13,6)$$

[zde uvedené koeficienty  $c_1, c_4$  jsou šestinásobky koeficientů  $c_1, c_4$  z (5,3)], při čemž

$$\begin{aligned} e_{10} &= e_{21} = e_{00} = e_{22} = 0, \\ \delta c_1 &= \delta c_4 = -2e_{20}. \end{aligned} \quad (13,7)$$

Zbývá jediný nefixovaný sekundární parametr. Můžeme tedy podle (13,7) volit

$$c_1 = 0 \quad (13,8)$$

(geometrický význam této volby byl v podstatě vyložen v odst. 11.), takže podle (13,6)

$$\omega_{10} = \omega_{21} = \omega_2.$$

Z této rovnice dostaneme známým způsobem

$$\omega_{20} = f\omega_1, \quad e_{20} = 0.$$

$c_4$  a  $f$  jsou invarianty a reper je normalisován ve smyslu odst. 10. Klademe-li ještě  $c = c_4$ , platí pro něj:

$$\left. \begin{aligned} dA_0 &= c\omega_2 A_0 + \omega_1 A_1 + \omega_2 A_2, \\ dA_1 &= \omega_2 A_0 + \omega_1 A_2, \\ dA_2 &= f\omega_1 A_0 + \omega_2 A_1 - c\omega_2 A_2; \end{aligned} \right\} \quad (13,9)$$

$$\left. \begin{aligned} [d\omega_1] &= -c[\omega_1\omega_2], & [d\omega_2] &= 0; \\ [dc\omega_2] &= (1-f)[\omega_1\omega_2], & [df\omega_1] &= 3cf[\omega_1\omega_2]. \end{aligned} \right\} \quad (13,10)$$

Duální transformace mění znaménko invariantů  $\omega_1, \omega_2, c$  a invariant  $f$  nechává beze změny.

Aplikujeme-li na repery (13,9) výsledky odst. 10., zjistíme snadno, že tečny křivek vrstvy  $V^{(3)}$  jsou druhými projektivními normálami její vrstvy  $S^{(1)}$  (ve svých dotykových bodech na křivkách vrstvy  $V^{(3)}$ ).

Jestliže  $df = \rho\omega_1$ , kde  $f \neq 0$  a  $\rho$  je nějaký skalár, je podle podmínek integrability (13,10)

$$c = 0, \quad f = 1, \quad (13,11)$$

při čemž jsou tyto rovnice ekvivalentní. Vyšetříme jejich geometrický význam.

V reperech (13,9) je síť  $S^{(3)}$  vrstvy  $V^{(3)}$  dána podle (6,2<sub>3</sub>) a (13,5) rovnicí

$$\omega_1^3 - \omega_2^3 = 0.$$

Položme  $\varepsilon^3 = 1$  a uvažujme vrstvu

$$\omega_1 - \varepsilon\omega_2 = 0 \quad (13,12)$$

sítě  $S^{(3)}$ . Tečna vrstvy (13,12) v bodě  $A_0$  je (až na nenulový faktor)

$$[A_0, \varepsilon A_1 + A_2] = \alpha_1 - \varepsilon \alpha_2$$

a diferencujeme-li ji ve směru (13,12), dostaneme podle (13,9)

$$d(\alpha_1 - \varepsilon \alpha_2) = \{\varepsilon^2 \alpha_1 - (c\varepsilon + 1) \alpha_2\} \omega_2.$$

Vrstva (13,12) je tedy přímková tehdy a jen tehdy, když

$$1 : \varepsilon^2 = \varepsilon : (c\varepsilon + 1),$$

z čehož v důsledku  $\varepsilon^3 = 1$  plyne (13,11). Je tedy (13,11) nutná a postačující podmínka pro to, aby všechny vrstvy sítě  $S^{(3)}$  vrstvy  $V^{(3)}$  byly přímkové.

Dále je zřejmé z odst. 10. a relací (13,9), že tehdy a jen tehdy, když platí (13,11), je vrstva  $S^{(1)}$  vrstvy  $V^{(3)}$  opět vrstvou typu  $V^{(3)}$ , při čemž pro její invarianty analogické k výše zavedeným invariantům  $c$  a  $f$  vrstvy  $V^{(3)}$  platí opět (13,11).

Poznamenejme ještě, že při platnosti relací (13,11) jsou křivky vrstvy  $V^{(3)}$  dány rovnicí

$$A_0''' - A_0 = 0,$$

kde čárkou jsme označili derivaci podle  $\bar{u}$ ,  $d\bar{u} = \omega_1$  při  $\omega_2 = 0$ . Jejich projekтивní křivosti jsou tedy rovny nule a pro jejich projekтивní oblouky  $\sigma$  platí  $d\sigma^3 = -d\bar{u}^3$ .

Křivky

$$\omega_2 = 0 \tag{13,13}$$

obecné vrstvy  $V^{(3)}$  jsou dány podle (13,9) rovnicí

$$A_0''' - fA_0 = 0 \tag{13,14}$$

a jsou tedy kuželosečky jedině při

$$f = 0. \tag{13,15}$$

Vrstva  $V^{(3)}$  pak zřejmě závisí jen na jedné funkci jednoho argumentu. Geometrické místo bodu  $A_2$ , který je podle (13,9<sub>3</sub>), (13,13) a (13,15) též pro všechny body  $A_0$  téže kuželosečky vrstvy, je křivka, jež má v reperu  $A_0A_1A_2$  rovnice:

$$x_0 = \frac{\bar{v}^2}{2} + (c^2 - 2c') \frac{\bar{v}^4}{24} + (5),$$

$$x_1 = \bar{v} - c \frac{\bar{v}^2}{2} + (c^2 - 2c') \frac{\bar{v}^3}{6} + (4),$$

$$x_2 = 1 - c\bar{v} + (c^2 - c') \frac{\bar{v}^2}{2} + (3),$$

v nichž  $c' = \frac{\partial}{\partial \bar{v}} c$ ,  $d\bar{v} = \omega_2$  při  $\omega_1 = 0$  a  $(n)$  značí členy stupně alespoň  $n$ -tého ve  $\bar{v}$ . Z uvedených rovnic plyne

$$2x_0x_2 - x_1^2 = (5).$$

Avšak při (13,13) a (13,15) je podle (13,9)

$$A'_0 = A_1, \quad A''_0 = A_2, \quad A'''_0 = A_0'' = \dots = 0,$$

takže kuželosečka vyšetřované vrstvy má v reperu  $A_0A_1A_2$  rovnici

$$2x_0x_2 - x_1^2 = 0.$$

Je tedy vrstva  $V^{(3)}$  při  $f = 0$  tvořena oskulačnými kuželosečkami nějaké křivky (viz pozn. <sup>1)</sup> na str. 249).

14. Podle relace (6,7) anulování kterýchkoliv dvou resultantů (6,6) má v důsledku i anulování třetího a pro příslušnou vrstvu, již označíme  $V^{(0)}$ , to znamená, že všechny vrstvy (11,1) splývají. Snadno se zjistí, že vrstvami  $V^{(1)}$ ,  $V^{(2)}$ ,  $V^{(3)}$  a  $V^{(0)}$  jsou vyčerpány všechny vrstvy, jejichž vrstvy (11,1) nejsou všechny různé. Jsou tedy vrstvy  $V^{(3)}$  charakterisovány anulováním kterýchkoliv dvou z resultantů (6,6) a podle odst. 7. závisí na jedné funkci jednoho argumentu.

V našem případě u vrstvy  $V^{(0)}$  můžeme volbou jednoho sekundárního parametru dosáhnout toho, že

$$b_1 = b_2 = b_3 = 0$$

a relace (5,1) a (5,3) se redukuje na

$$\left. \begin{aligned} \omega_{11} &= \omega_{10} + \omega_{21} = 0; \\ \omega_{21} - \omega_{10} &= 2c\omega_1, \end{aligned} \right\} \quad (14,1)$$

takže

$$e_{10} = e_{21} = 0.$$

Poněvadž

$$\delta c = -2e_{00},$$

můžeme volit

$$c = 0.$$

Pak je podle (14,1)

$$\omega_{10} = \omega_{21} = 0. \quad (14,2)$$

Diferencujeme-li vnějším způsobem kteroukoliv z těchto rovnic, dostaneme  $[\omega_{20}\omega_1] = 0$ , a tedy

$$\omega_{20} = f\omega_1, \quad (14,3)$$

$$e_{20} = 0.$$

Při změně posledního sekundárního parametru je koeficient  $f$  vázán infinitesimální transformací o symbolu

$$3f \frac{\partial}{\partial f}.$$

Za předpokladu

$$f \neq 0 \quad (14,4)$$

můžeme tedy volit

$$f = 1.$$

Z (14,3) pak plyne  $[\omega_{00}\omega_1] = 0$  a z toho vzhledem k (2,2) a (14,1,)

$$\omega_{00} = -\omega_{22} = g\omega_1,$$

$$e_{00} = e_{22} = 0.$$

Reper je tedy zcela normalisován a platí pro něj:

$$\left. \begin{aligned} dA_0 &= g\omega_1 A_0 + \omega_1 A_1 + \omega_2 A_2, \\ dA_1 &= \omega_1 A_2, \\ dA_2 &= \omega_1 A_0 - g\omega_1 A_2; \end{aligned} \right\} \quad (14,5)$$

$$\left. \begin{aligned} [d\omega_1] &= 0, \quad [d\omega_2] = 2g[\omega_1\omega_2]; \\ [dg\omega_1] &= -[\omega_1\omega_2]. \end{aligned} \right\} \quad (14,6)$$

Duální transformace změni znaménko všech tří invariantů  $\omega_1, \omega_2, g$ . Pro poslední invariant  $g$  plyne z (14,6<sub>3</sub>) a (2,3), že není možné, aby  $dg = \mu\omega_1$ ; speciálně je vždy  $g \neq \text{konst.}$

Při  $\omega_2 = 0$  položeme  $\omega_1 = -d\bar{u}$  a derivaci podle  $\bar{u}$  označme čárkou. Pro křivky vyšetřované vrstvy  $V^{(0)}$  platí podle (14,5) rovnice

$$A_0''' + (2g' - g^2) A_0' + (g'' - gg' + 1) A_0 = 0. \quad (14,7)$$

Nejsou to tedy nikdy kuželosečky. Pro jejich projektivní oblouky  $\sigma$  platí  $d\sigma^3 = d\bar{u}^3$  a (14,7) je jejich diferenciální rovnice v kanonických homogenních souřadnicích; jejich projektivní křivosti jsou  $k = g' - \frac{1}{2}g^2$ .

Dále je ihned vidět z rovnic (14,5), že vrstva, v níž splývají všechny vrstvy (11,1) vrstvy  $V^{(0)}$ , je přímková. Její přímky, t. j. projektivní normály  $\alpha_1 = n_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) vrstvy  $V^{(0)}$ , obalují křivku  $\Gamma_2$  opsanou bodem  $A_2$  a přímky  $\alpha_0$  obalují křivku  $\Gamma_1$  opsanou bodem  $A_1$ ; jejich diferenciální rovnice jsou

$$A_2''' - (g' + g^2) A_2' - (2gg' + g'' - 1) A_2 = 0$$

resp.

$$A_1''' - (g^2 + g') A_1' + A_1 = 0.$$

Význam křivek  $\Gamma_1, \Gamma_2$  je tentýž jako v odst. 11. s tím, že podle (14,5<sub>2</sub>)  $A_1' = -A_2$ .

**15.** Konečně probereme případ, kdy neplatí předpoklad (14,4), takže

$$f = 0. \quad (15,1)$$

Pak v důsledku (14,2), (14,3) a (15,1) platí:

$$[d\omega_{20}] = 0.$$

Geometricky je reper již normalisován. Poněvadž podle (14,2), (14,3) a (15,1)

$$[d\omega_{00}] = [d\omega_{22}] = 0,$$

můžeme poslední sekundární parametr volit třeba tak, aby

$$\omega_{00} = \omega_{22} = 0.$$

Normální reper vyšetřované vrstvy  $V^{(0)}$  je pak

$$\begin{aligned} dA_0 &= \omega_1 A_1 + \omega_2 A_2, \\ dA_1 &= \omega_1 A_2, \\ dA_2 &= 0. \end{aligned}$$

Formy  $\omega_1, \omega_2$  jsou ovšem úplně diferenciály.

Tato vrstva je (v oblasti neobsahující bod  $A_2$ ) tvořena kuželosečkami, které mají navzájem v pevném bodě  $A_2$  styk 3. řádu. Plyne to z úvahy, kterou jsme již jednou provedli v odst. 4.

**16.** Vraťme se ještě k nulové korespondenci  $N$ , definované vrstvou  $V$ ! Nazveme ji *nulovou  $L$ -korespondencí*  $N$ , jestliže každým bodem  $A_0 \in T$  (viz odst. 1. a 4.) prochází alespoň jedna přímka  $q$ , která má tuto vlastnost: Přímky  $\alpha_2 = NA_0$ , které korespondují bodům  $A_0$  přímky  $q$ , procházejí týmž bodem  $Q$ . O takových přímkách  $q$  budeme říkat, že splňují *podmínku  $L$* .

Z (2,1) a (3,2) plyne podle (2,2) a (2,15):

$$\begin{aligned} dA_0 &= \omega_{00}A_0 + \omega_1A_1 + \omega_2A_2, \\ d^2A_0 &= (\cdot)A_0 + (d\omega_1 - \omega_1\omega_{22} + \omega_2\omega_{21})A_1 + (d\omega_2 + \omega_1^2 - \omega_2\omega_{11})A_2; \\ d\alpha_2 &= -\omega_2\alpha_0 - \omega_1\alpha_1 - \omega_{22}\alpha_2, \\ d^2\alpha_2 &= -(d\omega_2 - \omega_1^2 + \omega_2\omega_{11})\alpha_0 - (d\omega_1 + \omega_1\omega_{00} - \omega_2\omega_{10})\alpha_1 - (\cdot)\alpha_2; \end{aligned}$$

koeficienty při  $A_0$  a  $\alpha_2$  nás nezajímají. Je tedy nutná a postačující podmínka pro to, aby bod  $A_0$  opisoval přímku, resp. aby přímka  $\alpha_2$  patřila do svazku:

$$\omega_2 d\omega_1 - \omega_1 d\omega_2 = \omega_1^3 + \omega_1\omega_2(\omega_{22} - \omega_{11}) - \omega_2^3\omega_{21}, \quad (16,1)$$

resp.

$$\omega_2 d\omega_1 - \omega_1 d\omega_2 = -\omega_1^3 + \omega_1\omega_2(\omega_{11} - \omega_{00}) + \omega_2^3\omega_{10}. \quad (16,2)$$

Předpokládejme, že příbuznost  $N$ , definovaná vrstvou  $V$ , je nulová  $L$ -korespondence. Pak z relací (16,1) a (16,2) plyne

$$2\omega_1^3 - 3\omega_1\omega_2\omega_{11} - \omega_2^3(\omega_{10} + \omega_{21}) = 0.$$

Užijeme-li (5,1), lze této rovnici dát tvar

$$2\omega_1^3 - b_1\omega_1^3\omega_2 - 2b_2\omega_1\omega_2^3 - b_3\omega_2^3 = 0.$$

Avšak to je rovnice sítě  $S^{(3)}$ , jejíž alespoň jedna vrstva musí být v důsledku (16,1) přímková. Naopak, je-li alespoň jedna z vrstev sítě  $S^{(3)}$  nějaké vrstvy  $V$  přímková, a volíme-li repery 2. řádu vrstvy  $V$  tak, aby v nich byla dána rovnice

$$\omega_1 = 0, \quad (16,3)$$

je zřejmé

$$b_3 = 0, \quad [\omega_{21}\omega_1] = 0 \quad (16,4)$$

a podle (5,1<sub>2</sub>) i

$$[\omega_{10}\omega_1] = 0. \quad (16,5)$$

Avšak relace (16,4) a (16,5) znamenají, že rovnice (16,1) a (16,2) jsou při platnosti rovnice (16,3) identicky splněny. Máme tak výsledek:

*Nulová korespondence definovaná vrstvou  $V$  je tehdy a jen tehdy nulovou  $L$ -korespondencí, jestliže alespoň jedna vrstva sítě  $S^{(8)}$  vrstvy  $V$  je přímková. Podmínku  $L$  splňují pak přímky této vrstvy.*

Uvádím bez analytického důkazu geometricky zřejmý fakt, že vrstvy  $V$ , definující nulovou  $L$ -korespondenci  $N$ , závisí na třech funkcích jednoho argumentu. Nejobecnější takovou vrstvou sestrojíme tak, že zvolíme dvě libovolné křivky  $\Gamma_1, \Gamma_2$ ;  $\Gamma_1$  jako geometrické místo bodu  $Q$  a  $\Gamma_2$  jako obálku přímek  $q$ , a ještě nějakou jedno-jednoznačnou korespondenci  $C$  mezi body křivky  $\Gamma_1$  a tečnami křivky  $\Gamma_2$ . Jestliže  $CQ = q$ , pak (v jisté oblasti) přímky svazku o středu v bodě  $Q$  jsou tečnami křivek konstruované vrstvy ve svých průsečících s přímkou  $q$ .

Volíce tak repery 2. řádu vrstvy  $V$ , která definuje nulovou  $L$ -korespondenci  $N$ , aby přímka  $[A_0A_2]$  patřila přímkové vrstvě  $S$  sítě  $S^{(8)}$  vrstvy  $V$  a bod  $A_2$  byl jejím dotykovým bodem na obálce přímek vrstvy  $S$  (resp. byl společným bodem přímek vrstvy  $S$ , degeneruje-li uvedená obálka v bod), je

$$b_3 = 0 \quad \text{a} \quad \omega_{21} = 0. \quad (16,6)$$

Klademe-li ještě

$$b_2 = 3, \quad (16,7)$$

čímž vylučujeme vrstvy  $V^{(1)}$ , probrané v odst. 11., fixujeme poslední sekundární parametr a podle (16,6) a (16,7) dostaneme snadno z (5,1) a (5,3):

$$\left. \begin{aligned} 3\omega_{11} &= b_1\omega_1 + 3\omega_2, & \omega_{10} &= 3\omega_1; \\ \omega_{22} - \omega_{00} &= c\omega_1 - 3\omega_2, \end{aligned} \right\} \quad (16,8)$$

kde  $b_1$  a  $c$  jsou invarianty. Z (16,8<sub>2</sub>) plyne známým způsobem

$$\omega_{20} = f\omega_1; \quad (16,9)$$

$f$  je invariant. Platí tedy podle (16,6)–(16,9) pro repery studované vrstvy:

$$\left. \begin{aligned} dA_0 &= \left( -\frac{b_1 + 3c}{6} \omega_1 + \omega_2 \right) A_0 && + \omega_1 A_1 && + \omega_2 A_2, \\ dA_1 &= && 3\omega_1 A_0 + \left( \frac{b_1}{3} \omega_1 + \omega_2 \right) A_1 && + \omega_1 A_2, \\ dA_2 &= && f\omega_1 A_0 && + \left( \frac{3c - b_1}{6} \omega_1 - 2\omega_2 \right) A_2; \end{aligned} \right\} \quad (16,10)$$

$$\left. \begin{aligned} [d\omega_1] &= 0, & [d\omega_2] &= -c[\omega_1\omega_2]; \\ [db_1\omega_1] &= 3c[\omega_1\omega_2], \\ [dc\omega_1] &= (-3c + 2f)[\omega_1\omega_2], \\ [df\omega_1] &= 3f[\omega_1\omega_2]. \end{aligned} \right\} \quad (16,11)$$

Z (16,10) je zřejmé, že bod  $A_1$  opisuje křivku  $\Gamma_1$  a bod  $A_2$  křivku  $\Gamma_2$ .

Vyšetříme ještě některé speciální případy. Křivka  $\Gamma_1$  nemůže degenerovat v bod, může však přejít v přímku. Snadno se zjistí z (16,10), že to nastane tehdy a jen tehdy, když

$$3c - f = 0. \quad (16,12)$$

Křivka  $\Gamma_2$  nemůže přejít v přímku, může však degenerovat v bod, což nastane podle (16,10<sub>3</sub>) jedině při

$$f = 0. \quad (16,13)$$

Při současném splnění rovnic (16,12) a (16,13), t. j. při

$$c = 0, \quad f = 0 \quad (16,14)$$

a jen tehdy, jsou křivky vyšetřované vrstvy navzájem v *centrické kolineaci* se středem v bodě  $\Gamma_2$  a osou v přímce  $\Gamma_1$ . Tato kolineace není nikdy elací. Vskutku, poněvadž

$$\Gamma_1 = [A_1 dA_1] = \omega_1[A_1, 3A_0 + A_2],$$

bod  $\Gamma_2 = A_2$  a přímka  $\Gamma_1$  neincidují.

Jestliže  $b_1 = 0$ , plynou z relací (16,11) rovnice (16,14). Je-li tedy vrstva  $S^{(1)}$  nějaké vrstvy  $V^{(2)}$  přímková, jsou její křivky navzájem centricky kolineární při pevném středu a ose kolineací; z (16,10) se pak snadno zjistí, že je tvořena kuželosečkami (viz pozn. <sup>1</sup>) na str. 249).

#### LITERATURA.

- E. Čech*: Проективная дифференциальная геометрия соответствий между двумя пространствами, Чехословацкий математический журнал, Т. 2 (77) 1952;  
*G. Fubini-E. Čech*: Introduction à la géométrie projective différentielle des surfaces, Paris, 1931;  
*E. Cartan*: Leçons sur la théorie des espaces à connexion projective, Paris, 1937.