Jaroslav Kurzweil

O jednoznačnosti řešení modifikované Dirichletovy úlohy

Časopis pro pěstování matematiky, Vol. 78 (1953), No. 3, 213--214

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/117091

O JEDNOZNAČNOSTI ŘEŠENÍ MODIFIKOVANÉ DIRICHLETOVY ÚLOHY

JAROSLAV KURZWEIL, Praha.

(Došlo dne 12. února 1953.) DT 517.544

Autor podává jednoduchý důkaz známé věty z analysy.

V této poznámce podávám krátký a elementární důkaz věty o jednoznačnosti řešení modifikované Dirichletovy úlohy. Této věty se často užívá v literatuře viz na př. S. G. MICHLIN, *Integral'nyje uravněnija*, § 39, Gostechizdat Moskva 1949, Leningrad (též český překlad). Běžný důkaz pomocí Greenovy formule, jak jej podává na př. Michlin, užívá silných předpokladů, které značně zmenšují aplikovatelnost věty. Obecný důkaz, který podal N. I. MUSCHELIŠVILI, *Singuljarnyje integral'nyje uravněnija* (Сингулярные интегральные уравнения) Moskva 1946, str. 173, je nadmíru složitý.

Zavedeme tyto předpoklady a označení:

G budiž omezená oblast (otevřená souvislá množina) v rovině komplexních čísel; hranice oblasti G nechť má konečný počet $k + 1$ komponent $(k \geqq 0)$: $\Gamma_0, \Gamma_1, \ldots, \Gamma_k$.

$w(z) = w(x, y)$ budiž funkce holomorfní v G.

Funkce $u(x, y) = \operatorname{Re}\{w(x, y)\}$ nechť má spojité prodloužení na hranici oblasti G. (Toto prodloužení označíme zase $u(x, y)$).

Nyní platí **věta:**

Jestliže funkce $u(x, y)$ nabývá na každé komponentě Γ_i konstantní hodnoty

$$u(x, y) = c_i \quad \textit{pro} \quad (x, y) \in \Gamma_i, \quad i = 0, 1, \ldots, k,$$

potom

$$c_0 = c_1 = \ldots = c_k = c \tag{1}$$

a funkce $w(z)$ je konstanta

$$w(z) = c + id \quad (d \textit{ reálné}).$$

Důkaz: Jestliže neplatí (1), potom hodnoty funkce $u(x, y)$ vyplní interval. Protože derivace funkce $w(z)$ může být rovna nule pouze pro spočetně mnoho z, lze vybrati takové reálné číslo p, že všude na neprázdné množině P

$$P \doteq \underset{(x,y)}{E}\,[(x, y) \in G,\ u(x, y) = p]$$

je

$$w'(z) = u'_x(x, y) + iv'_x(x, y) \neq 0 .$$

Dále se snadno zjistí, že existuje jednoduchá křivka C, $C \subset P$. Křivka C je nutně analytická.

Budiž (x_0, y_0) libovolný bod na křivce C. Derivace funkce $u(x, y)$ ve směru tečny ke křivce C s dotykovým bodem (x_0, y_0) je zřejmě v bodě (x_0, y_0) rovna nule

$$u'_t(x_0, y_0) = 0 .$$

To však znamená, že je

$$v'_t(x_0, y_0,) \neq 0$$

(jinak by bylo $w'(x_0, y_0) = 0$ proti předpokladu).

Zvolme pevnou orientaci křivky C. Je-li tečna t orientována souhlasně s orientací křivky, potom funkce $v'_t(x, y)$ má stálé znamení pro $(x, y) \in C$. Zvolme na křivce C pevný bod A a postupujme po křivce C z tohoto bodu ve smyslu orientace. Funkce $v(x, y)$ buď stále roste nebo stále klesá a tak po jednom oběhu přijdeme do bodu A s jinou hodnotou funkce v než byla původní hodnota. To však není možné, protože funkce v je jednoznačná. Tedy platí

$$c_0 = c_1 = \ldots = c_k = c .$$

Proto podle věty o jednoznačnosti řešení Dirichletovy úlohy je $u(x, y) = c$ a tedy $w(z) = c + id$.