IDEOLOGICKÝ VÝZNAM GEOMETRIE BOLYAI-LOBAČEVSKÉHO

ALFRED RÉNYI, Budapešť.

DT: 513.812
51:3K

(Předneseno 18. prosince 1952 na Jubilejním vědeckém sjezdu u příležitosti 150. výročí narozenin Jana Bolyaie v Budapešti.)

„... *přírodu nelze vykládat podle vybájených výmyslů, nýbrž je třeba zkoumat pravdu i samu přírodu rozumem v její přirozenosti.*"
(Jan Bolyai); viz P. Stäckel, *Die geometrischen Untersuchungen von J. und W. Bolyai*, Budapešť 1914, str. 7.)

„*Vždyť materialistický názor na přírodu není nic jiného než prosté chápání přírody tak, jak se nám podává, bez cizích přímësků.*"
(B. Engels, *Dialektika přírody*, Praha 1950, str. 170—171.)

ÚVOD

Objev geometrie Bolyai-Lobačevského je jednou z nejvýznamnějších událostí v historii matematiky. Nejedná se jenom o to, že JAN BOLYAI a N. I. LOBAČEVSKIJ rozřešili nezávisle na sobě jeden základní problém matematiky, starý přes dva tisíce let. Oba vyšli z toho pevného přesvědčení, že axiom o rovnoběžkách (pátý Euklidův postulát), který vyvolal tolik sporů, není důsledkem ostatních Euklidových axiomů, a budovali takový geometrický systém, v němž uvedený axiom neplatí. Nejde tu jenom o to, že úspěch jejich pokusu byl opravdu překvapující, jak je patrno z toho, že úsilí matematiků v průběhu více než dvou tisíc let, počínajíc PAPPEM a PROKLEM až k OMARU CHAJAMI, NASIREDDINOVI a SACCHERIMU a končíc LAMBERTEM a LEGENDREM, směřovala k tomu, dokázat pátý Euklidův postulát. Bolyai a Lobačevskij však dospěli k poznání, že tyto pokusy neskončily úspěchem proto, že se zdařit nemohly. Rovněž nestačí charakterisovat význam Bolyaiova a Lobačevského objevu poukazem na to, že znamená novou epochu v historii geometrie a celé matematiky vůbec. Objev Bolyaiův a Lobačevského měl význam nejenom s hlediska rozvoje matematiky. Cílem této přednášky je objasnit ideologický význam objevu Bolyai-Lobačevského a ukázat, že tento objev znamenal krok vpřed nejen v matematice, nýbrž v poznání materiálního světa vůbec.

Ukáži, že objev Bolyai-Lobačevského geometrie byl událostí velkého významu i s hlediska materialistického světového názoru. Geometrie Bolyai-Lobačevského vrhla nové světlo na složitý dialektický vztah mezi matematikou a skutečností, vyvrátila celou řadu starých předsudků a množství velmi rozšířených nesprávných idealistických a metafysických názorů. Otázka vzájemného vztahu mezi matematikou a skutečným světem je sama o sobě důležitým problémem theorie poznání, bez jehož správného chápání se nelze správně orientovat o charakteru a významu fysiky a všech exaktních přírodních věd, které pracují matematickými methodami. V tom spočívá příčina toho, proč má objev neeuklidovské geometrie tak veliký ideologický význam; v čem záleží, vyložíme níže.

Z toho, že geometrie Bolyai-Lobačevského má výjimečně velký ideologický význam, přirozeně vyplývá, že tento objev není lhostejný ani s hlediska vývoje společnosti. To bylo zřejmé i Bolyaiovi. V přepracovaném vydání *Dodatku* (*Appendix*) v německém jazyce, které pořídil sám Jan Bolyai v r. 1832, v posledním § 38, který se značně liší od původního latinského textu, čteme tuto větu: „Autor je přesvědčen o tom, že objasněním daného thematu byl proveden jeden z nejdůležitějších a nejvýznamnějších kroků k opravdovému obohacení vědy a vzdělání a tedy i k zlepšení lidského osudu.“ Není pochyby, že se nám dnes zdá neobvyklým, že vědec oceňuje význam vlastních objevů v takové otevřené a naivní formě. Není pochyby ani o tom, že by se byl celý Bolyaiův život a jeho činnost vytvářely zcela jinak, kdyby tato slova nenapsal on, nýbrž jeho současníci. Je ovšem třeba připomenout, že ocenění výsledků práce Jana Bolyaie ve shora uvedených slovech tohoto vědce není vůbec nadsazeno. Citovaná věta zaslouží pozornosti i z toho hlediska, že je v ní vyjádřen jeden z charakteristických rysů Bolyaiova světového názoru: byl zastáncem osvícenství XVIII. století, přesvědčeným racionalistou. Výrok v této větě o tom, že objev neeuklidovské geometrie byl jedním z nejdůležitějších a nejvýznamnějších kroků „k obohacení vzdělání a tedy i k zlepšení lidského osudu“, vyjadřuje základní thesi světového názoru osvícenců, podle níž je rozvoj myšlení rozhodující podmínkou a pákou lidského pokroku. Zde se setkáváme s týmž názorem jako u Rousseau a potom bez výjimky u všech utopistických socialistů. Podle tohoto názoru úplně stačí lidem vyložit, že je existující společenský řád nerozumný, a rovněž to, jak by měla společnost správně vypadat, aby se to mohlo ihned uskutečnit. Jan Bolayi ještě dostatečně jasně neviděl, jak souvisí pokrok lidského myšlení s rozvojem společnosti. Nebylo mu jasno, že boj mezi pokrokovým a reakčním světovým názorem je jenom jednou ze stránek boje pokrokových a reakčních společenských sil třídního boje. Bylo mu však jasno, že jeho boj za vědeckou pravdu je současně bojem za lidský pokrok a že vítězství, dosažené v oblasti vědy, přímo nebo nepřímo fakticky vede k zlepšení osudu lidstva. Proto v osobě Jana Bolyaie oceňujeme nejenom geniálního vědce, když si nyní připomínáme 150. výročí jeho narození, nýbrž oceňujeme v něm i člověka, který uvědoměle a neohroženě bojoval za lidský pokrok, člověka, který plně pochopil, že svým bojem za vědeckou pravdu bojuje nikoli za osobní slávu nebo za nějaký jiný osobní zájem, nýbrž za pokrok všeho lidstva. Pochopíme-li to, objeví se nám v novém světle shora uvedená Bolyaiova slova, která jsem citoval proto, abych ukázal, nakolik sám Bolyai chápal ideologický význam svého objevu. Totéž se v jádře týká i N. I. Lobačevského, který si jasně uvědomoval, že svou novou „pomyslnou" geometrií zúplna rozbil nesprávnou idealistickou kantovskou koncepci o vrozeném nám pojmu absolutního prostoru. To ukazují tato slova N. I. Lobačevského: „Základní pojmy, jimiž se začíná kterákoli věda, musí být jasné a uvedeny na nejmenší počet. Jenom se mohou stát trvalým a postačujícím základem vědění. Takové pojmy se získávají ze vjemů; vrozeným pojmům nemáme důvěřovat." (N. I. Lobačevskij, *Spisy, sv. I*, str. 186, Gostechizdat, 1946.)

Také GAUSSOVI bylo zřejmé, jakým rozhodujícím důkazem je objev Jana Bolyaie proti idealistické Kantově filosofii. O tom mluví jeho následující slova, která napsal FARKAŠI BOLYAIOVI po přečtení *Dodatku*: „Právě nemožnost a priori rozhodnout mezi Σ (euklidovskou geometrií) a S (hyperbolickou geometrií) nejjasněji dokazuje, že KANT nebyl oprávněn tvrdit, že prostor je jenom formou našeho nazírání. Na jinou, rovněž závažnou příčinu jsem upozornil v jedné ze svých malých prací ... v ní nalezneš na několika stranách jádro mých názorů o imaginárních číslech." V článku, na který se odvolává (*Theoria residuorum biquadraticorum commentatio secunda*, C. F. Gauss, Werke Bd. 2, Göttingen, 1863, str. 177) a v kterém se zabývá nyní běžným geometrickým znázorněním komplexních čísel a snaží se rozptýlit „mlhu záhad", obestírající komplexní čísla, píše Gauss v poznámce toto: „Obě poznámky učinil již Kant a je nepochopitelné, že se tento vynikající filosof domnívá, že první poznámka je důkazem toho, že prostor je jenom forma našeho vnějšího nazírání, když druhá poznámka tak jasně dokazuje pravý opak, t. j. že prostor musí mít nezávisle na našem nazírání reálný význam." (Uvedené poznámky se týkají toho, že v rovině můžeme libovolně zvolit soustavu souřadnic, že však její fixování lze provést jenom odkazem na materiální skutečnost.)

Upozorňujeme na to, že na tuto Gaussovu poznámku se rovněž odvolává největší pokračovatel neeuklidovské geometrie, B. RIEMANN, ve své proslulé přednášce (B. Riemann, *Über die Hypothesen, welche der Geometrie zu Grunde liegen*, Ges. Math. Werke, Leipzig, 1876, str. 255).

Ukazuje se, že to bylo právě pochopení ideologického významu a revolučně materialistického obsahu neeuklidovské geometrie, co přimělo opatrného Gausse v letech vlády reakce, že se zdržel uveřejnění svých myšlenek, které se toho týkaly. To, že se Gauss zdržel otevřeného přiznání Bolyaiových zásluh, se vysvětluje také tím, že se mu nedostávalo odvahy rozhodně vystoupit na straně Bolyaiově proti idealistického názoru v té době vládnoucímu, přes to, že byl přesvědčen o nesprávnosti idealistických koncepcí Kantových. Kanta lze ovšem kritisovat zprava i zleva. Na příklad Kanta podrobili kritice i positivisté. V souvislosti s tím je nutno zdůraznit, že Bolyai a Lobačevskij stejně jako Gauss kritisovali Kanta se stanoviska materialismu. Gaussovu „opatrnost", vzdání se otevřeného vystoupení pro Bolyaiův objev, lze podrobit oprávněné kritice. Nicméně má nesmírný význam ten fakt, že jeden z největších matematiků XIX. století (v jeho době se mu říkalo „král matematiků") v jiných případech zaujímal tak neoblomné stanovisko proti idealistickému pojetí prostoru a držel se koncepce materialistické. Zdá se, že v oboru komplexních čísel stál pevněji na svých nohou a považoval svou posici za lehčeji obhájitelnou než v neeuklidovské geometrii, kde by musil bojovat nejenom s idealistickými názory, týkajícími se prostoru. nýbrž i s předsudky matematiků, které se zakořenily v průběhu dvou tisíc let. Vzhledem k opatrnickému stanovisku Gaussovu musíme ještě s daleko větší úctou hledět na neohrožené a rozhodné vystoupení Bolyaiovo a Lobačevského.

K tomu, abychom pochopili ideologický význam Bolyai-Lobačevského geometrie, musíme otázku sledovat v jejím historickém vývoji. Geometrie, jako všechna ostatní odvětví vědy, je od okamžiku svého vzniku arénou boje mezi pokrokovými a reakčními světovými názory, mezi materialismem a idealismem. Proto se musíme především zabývat otázkou boje mezi materialistickým a idealistickým světovým názorem v geometrii, počínajíc EUKLIDEM až do začátku XIX. století, a pak se budeme zabývat otázkou o ideologickém významu geometrie Bolyai-Lobačevského.

1. Boj materialistického a idealistického názoru v geometrii.

Geometrie, jako všechny ostatní obory matematiky a přírodních věd, vznikla tak, že v určité etapě rozvoje společnosti lidé usilovali uspokojovat s její pomocí potřeby, které kladla výroba. Takové potřeby vznikly již 2000 let před naším letopočtem, ve staré Babylonii a v Egyptě, spolu se stavitstvím, měřením země a objemu nádob. Z počátku se lidé spokojovali některými nepřesnými praktickými pravidly a předpisy, na příklad brali za obsah kruhu trojnásobný čtverec poloměru. Z Babylonie a Egypta se zachovaly jenom sbírky praktických příkladů. Z nich vidíme, že znali již mnoho správných výsledků, na příklad vzorce pro objem kvádru a válce, ovšem nedokazovali je a chápali je jako isolované fakty zkušenosti. Rozvoj společnosti, především rozvoj řemesla a obchodu, a spojený s ním rozvoj mořeplavectví, který navíc vyžadoval orientaci na moři a tedy i rozvoje astronomie, zhotovování prvních map atd., to všechno vedlo k tomu, že se tato pravidla zkušenosti stala nevyhovujícími a bylo zapotřebí spolehlivějších, soustavnějších a logicky skloubenějších geometrických poznatků. Tak vznikla geometrie jako věda v Řecku v VI. a V.

st. př. n. l. U prvních představitelů geometrie jsou tyto bezprostřední vlivy jasně patrny. Tím se vysvětluje, proč jejich názory — na příklad THALETOVY názory — byly v podstatě materialistickými. Charakteristickým rysem řecké matematiky je, že se nespokojuje s výsledky zkušeností, nýbrž hledá souvislosti; složitější věty se snaží převést na jednoduché, všeobecné známé věty — vzniká matematický důkaz. První soustavnou učebnici geometrie napsal chijský HIPPOKRATOS na konci V. století př. n. l. Rozvoj řecké matematiky úzce souvisí s rozvojem řeckého myšlení, řecké filosofie: matematické poznatky netvořily v téměř žádném jiném období tak organickou část myšlení a kultury jako ve starořecké kultuře. Tendence řecké filosofie k prohlubování a k hledání hlubších příčin jevů, diskusní methoda, která se rozvinula pod vlivem řeckého společenského, právního a politického života, umění sofistů argumentovat — dialektika v původním úzkém smyslu slova — jsou bezpochyby rozhodujícím zdrojem vědecké methody řecké matematiky, hledající přesné důkazy, a jsou rovněž zdrojem její síly. Zároveň však v řecké filosofii v protikladu k počátečním materialistickým směrům stále více převládá směr idealistický, jenž dosáhl svého vrcholu v osobě PLATONOVĚ. Tento směr měl škodlivý vliv na geometrii a stal se brzdou jejího rozvoje. Platon a jeho žáci oddělili geometrii jako vědu o důkazech od aritmetiky (podle terminologie té doby — „logistiky") od nízkých výpočtů obchodníků a otroků, nedůstojných filosofů, a tím po prvé postavili umělou hráz mezi matematiku a praktické aplikace. Současně vyloučili z geometrie celou řadu problémů, jejichž rozřešení by mohlo být novým podnětem k jejímu rozvoji (na příklad úlohu zdvojení krychle (délský problém), problém trisekce úhlu, atd). Vznikla mystika čísel (PYTHAGORAS) a rovněž vznikl falešný názor, jehož byl nejrozhodnějším zastáncem Platon, že matematické poznatky lidstvo získává nikoli ze zkušenosti, nýbrž že jsou vrozeny a člověk si pouze „vzpomíná" na to, co již jednou viděl ve „světě idejí". Zkoumáme-li blíže tento názor, který nemá žádný objektivní podklad, stane se nám jeho tendence jasnou: filosof a geometr nemají studovat skutečný svět, nýbrž snít, vzpomínat si na „svět idejí". Tak se stává platonismus v geometrii brzdou jejího rozvoje. Proti idealistickým názorům Platonovým — a dodáme ještě — Kantovým jsou namířena Bolyaiova slova, hluboce materialisticky pojatá, která jsem zvolil za motto této přednášky.

První nejúplnější systematický výklad řecké geometrie, který zachycuje výsledky řecké matematiky za několik století, podal Euklides v III. st. př. n. l. Tři století před naším letopočtem a dvě století našeho letopočtu byla obdobím nepochybného rozkvětu řecké matematiky; v této době byla střediskem matematického života Alexandrie. Euklidova práce byla po dva tisíce let „biblí" geometrie, jejíž obsah byl jenom komentován a doplňován, avšak nebyla překonána a byla pokládána za methodologický vzor. Euklidova práce věrně obráží jak silné stránky, tak slabiny a omezenost řecké matematiky, a mimo to se v ní odráží boj mezi materialistickým a idealistickým názorem v oboru geometrie. Achillovou patou řecké matematiky bylo to, že v ní chyběl pojem iracionálního čísla, na což upozornil A. N. Kolmogorov, ve svém článku ve *Velké sovětské encyklopedii.* Řečtí geometři objevili, že existují nesouměřitelné vzdálenosti, avšak na základě toho, že znali jenom celá čísla a zlomky, usoudili z toho, že v geometrii nelze pracovat s čísly a oddělili geometrii od aritmetiky (o analyse nelze v této době ještě mluvit, ponecháme-li stranou, že — jak ukážeme dále — Archimedes již znal jisté základy infinitesimálního počtu). Úplně byla tato hráz proražena až Descartesem. Právě v tom spočívá nesmírný význam budování analytické geometrie. Řada buržoasních historiků matematiky, mezi nimi Cantor, Zeuthen a jiní, opírajíce se o jedno tvrzení neoplatonisty Prokla více méně tendenčně zastávají takové stanovisko, jako by Euklides byl platonistou. Tento názor se i v SSSR teprve v poslední době opravuje a podrobuje se kritice. Molodšij a Maistrov ukázali, že Euklides byl v jádru přívržencem Aristotelovým, který — jak ukázal V. I. Lenin — zaujal v této otázce materialistické stanovisko, i když se tohoto hlediska důsledně nedržel. (Viz poznámky V. I. Lenina k Aristotelově *Metafysice*: „Kniha 13, kap. 3 řeší tyto potíže skvěle, jasně a zřetelně, materialisticky) (matematika a jiné vědy abstrahují jednu ze stránek tělesa, jevu, života). Avšak autor se tohoto hlediska nedrží důsledně". — V. I. Lenin, „*Filosofskije tetradi*", Moskva 1947, str. 309.

Zdá se mi, že nebude zbytečné krátce vyložit základní závěry této diskuse. Vygodskij argumentoval tím, že Euklides se v „*Základech*" vzdal používání čísel, pročež se ani nezabývá aplikacemi geometrie. Podle mínění Vygodského je to výsledek Platonova vlivu. Molodšij a Maistrov to chápou jako výsledek nedostatku pojmu iracionálních čísel (shora uvedený nedostatek řecké matematiky) a poukazují na to, že Aristoteles tvrdil, že geometrie své pojmy bere z materiálního světa. O tom Aristoteles napsal: „Se zkoumáním jsoucna je tomu tak, jako matematik předmětem svého zkoumání činí to, co získal ubráním znaků. Zkoumá totiž svůj předmět, když jej zbavil všeho smyslového, jako těžkosti a lehkosti, tvrdosti a jejího opaku a rovněž teplosti a studenosti a ostatních protiv, jež spadají do oblasti smyslového vnímání; ponechává jenom kolikost a to, co jest nepřetržité v jednom nebo ve dvou a třech směrech, a zkoumá vlastnosti toho, pokud jest kolikostní a nepřetržité; o ostatní se nestará. U jedněch předmětů pak zkoumá jejich vzájemnou polohu a určení, jež jim náležejí, u jiných jejich souměrnost a nesouměrnost, u jiných zase jejich vztahy. Přitom však přece všechno to přičítáme téže vědě, totiž geometrii". (Aristoteles, *Metafysika*, Praha 1946, str. 275.)

Jde tedy o omezenost dané epochy a ne o vliv idealistické filosofie, zvláště Platonovy. Molodšij a Maistrov ukazují, že se Euklides zabýval pouze takovými geometrickými obrazci, které lze sestrojit, a že věnuje velmi velkou pozornost jejich důkazu. To chápou jako důkaz jeho materialistického názoru.

V rámci této přednášky nelze posluchače seznámit s podrobnostmi této diskuse a proto chci jenom učinit dva podstatné závěry. Za prvé: ani buržoasní historikové matematiky nemohou popřít, že cíle a methody Euklidovy práce nelze jasně pochopit bez rozboru Euklidových filosofických názorů. Není pochyby o tom faktu, že boj mezi materialistickým a idealistickým názorem probíhal i v oboru geometrie; sporné je nejvýš jenom to, jaké bylo stanovisko samotného Euklida. Za druhé: co jsme shora uvedli, to dokazuje, že i když lze v Euklidově práci pozorovat vliv materialistické a idealistické filosofie, přesto je vliv materialistického názoru neoddělitelný od hodnot veliké Euklidovy práce, kdežto vliv idealismu, pokud se v omezené míře v Euklidově práci projevil, ji omezil. Idealistická filosofie byla v celé řecké matematice překážkou pokroku.

Je zajímavé zkoumat s tohoto hlediska práce největšího řeckého matematika, Archimeda. Jak známo, Archimedes dosáhl v geometrii obdivuhodných výsledků, které byly předstiženy teprve o tisíc let později. Dolním a horním odhadem čísla π ($\frac{223}{71} < \pi < \frac{22}{7}$), určením obsahu úseče paraboly, objemu koule a paraboloidu, povrchu koule, těžiště různých těles, objevem po něm pojmenované spirály atd., rozřešil Archimedes takové problémy, které dokazují, že se u něho již vyskytují zárodky infinitesimálního počtu, zvláště počtu integrálního.

Své myšlenky o infinitesimálním počtu nepovažoval Archimedes za přesnou methodu, nýbrž za heuristický princip, a byl si plně vědom toho, že jsou v zásadním protikladu k názorům, jež v té době v geometrii převládaly. Své výsledky později dokázal exhaustivní („vyčerpávající") methodou. Opravdu byla Archimedova methoda, týkající se infinitesimálního počtu, částečně založena na představách z mechaniky, kdežto na druhé straně se v ní odráží vliv atomové theorie řeckých materialistů, když tělesa rozkládal na nekonečně malé „plátky", rovinné obrazce pak na nekonečně malé „proužky", což však odporovalo směru, který tehdy vládl v řecké matematice, jež byla pod vlivem idealismu. Svých významných úspěchů dosáhl Archimedes v boji s vlivem idealismu, opíraje se o materialistický světový názor. Archimedes byl revolucionářem nejenom v matematice, nýbrž i v oboru aplikací matematiky: Archimedova spirála, jeho proslulé metací přístroje, které pomáhaly při obraně Syrakus, jeho objevy o stabilitě plovoucích těles atp., vše to svědčí o tom, že Archimedes nepovažoval za ponižující, otrockou práci dát své matematické znalosti do služby praxi. S tohoto hlediska je velmi zajímavý Archimedův dopis Eratosthenovi, hlavnímu představiteli „oficiální" matematiky, objevený až v r. 1906. V tomto dopise se praví: „Poněvadž Tě považuji, jak jsem již řekl, za vážného vědce a vynikajícího filosofa, ... považuji za vhodné vyložit Ti a vysvětlit v této knize tu zvláštní methodu, pomocí které jsem dostal významný pomocný prostředek k vyšetřování jistých matematických problémů pomocí mechaniky. Jsem hluboce přesvědčen, že se tento prostředek ukáže neméně užitečným k důkazu vět; mnoho faktů se mně stalo jasnými právě pomocí mechanických představ, avšak potom jsem pokládal za nutné dokázat je geometricky, neboť uvedená methoda nepodává přesné důkazy. Je však zřejmé, že je lehčí najít přesný důkaz, když pomocí uvedeného (mechanického) způsobu jsme dostali určitou orientaci v uvažované otázce, než najít takový důkaz bez takové předběžné orientace. V tom vězí, proč ohledně vět, dokázaných po prvé EUDOXEM, t. j., že kužel tvoří jednu třetinu válce, který má s ním podstavu a výšku téže velikosti a zrovna tak, že jehlan tvoří jednu třetinu příslušného kvádru (Archimedes zde má na mysli objem), sehrál nemalou úlohu DEMOKRITOS, který po prvé formuloval tyto věty bez důkazu". Demokritos byl nejvýznamnějším představitelem řeckého materialismu, který vědomě aplikoval svou atomovou theorii na geometrii, a to, podle Archimedových slov, s velkým úspěchem. Demokritovo učení bylo „bojkotováno" řeckým idealismem a bylo tedy v Archimedově době méně známo, při čemž jeho atomistický názor byl oceněn oficiální řeckou filosofií jako nevědecký. Jak Platon, tak i Aristoteles kategoricky tvrdili, že zavedení atomových představ odporuje učení geometrie, podle něhož každé těleso je neomezeně dělitelné. Je zřejmé, že tento dialektický protiklad — osvětlený, avšak ještě nepřekonaný výsledky fysiky XX. století — protiklad mezi dělitelným a nedělitelným, mezi spojitým a korpuskulárním pojetím hmoty — byl jednou z mocných pák rozvoje již v řecké matematice. Archimedes byl revolucionářem v řecké matematice, který neohroženě bojoval s vládnoucím idealistickým názorem, opíraje se o své významné výsledky.

Shora uvedená Archimedova slova jsou výjimečně poučná i proto, že dokazují to, co se ještě více týká matematických vyšetřování v současnosti: matematikové, když razí nové cesty, dosahují první orientace nikoli přesnými methodami, nýbrž názornými představami. Vracejí se tedy k materiálnímu základu matematiky a obvykle teprve potom přijde přesný důkaz. Abychom se vyhnuli všemu nedorozumění: Tato poznámka se netýká otázky o nutnosti přesných důkazů. Sám Archimedes to nepopíral, ba naopak byl nepřekonatelným mistrem geometrických důkazů, kterým věnoval velkou pozornost, nýbrž jenom se snažil vybojovat právo na existenci názorných představ (heuristických), které jsou založeny na analogiích z mechaniky, nebo se opírají o atomistické představy — proti vládnoucím koncepcím své epochy. Jeho slova slouží i v dnešní době za zbraň v boji proti matematickému formalismu. Velké pozornosti zasluhuje také to, že Archimedes, který věnoval velkou pozornost fysikálním představám, viděl současně zřejmě nutnost přesného matematického důkazu. Mnoho matematiků ani nyní nechápe s náležitou jasností důležitost opírat se o fysikální představy a mnoho fysiků — zvláště na západě — nevidí význam matematické přesnosti. Obě chyby vedou k formálnímu užívání matematiky. Když upozorňuji matematiky i fysiky na shora uvedená Archimedova slova, musím současně poukázat i na to, že Archimedes byl nejenom jeden z nejvíce vynikajících představitelů matematiky a aplikované matematiky starověku, nýbrž i znamenitým fysikem.

Ve středověku rozvoj geometrie a s ní spjatý ideologický boj uvnitř geometrie postoupil kupředu jenom nepatrně. Je zásluhou arabských a perských matematiků, že pečlivě kultivovali a čátečně i dále rozvinuli úspěchy řecké geometrie. V oboru geometrie, zvláště v oblasti „axiomu o rovnoběžkách", prováděli zajímavá vyšetřování Omar Chajami a Nasireddin. První pozoruhodná vyšetřování v Evropě, na příklad Saccheriova, přímo souvisí s Nasireddinovým pokusem dokázat axiom o rovnoběžkách. Tak zvaný Saccheriův čtyřúhelník najdeme i v pracích Nasireddinových a v pracích Omara Chajami. Považuji za nutné na to upozornit, ježto tyto výsledky arabské a perské kultury nejsou u nás a na západě známy a jsou proto nedoceňovány. V historii geometrie bylo rozhodujícím krokem vytvoření analytické geometrie, které je spjato se jménem Descartesovým. To umožnilo přeložit problémy geometrie do jazyka algebry, a tedy i analysy a obráceně. Tím přestala ona isolovanost geometrie, která se vytvořila v řecké matematice proto, že jí chyběl pojem iracionálního čísla. V analytické geometrii se uskutečnila dialektická jednota algebry a geometrie, což přispělo k vytvoření diferenciálního a integrálního počtu a rovněž vedlo k tomu, že matematika vypracovala velký aparát k popisu pohybu a změny. Spolu s obrovskými přednostmi měl tento rozvoj i určité záporné stránky. Rozšíření analytických method v geometrii a současně i v mechanice, úzká souvislost mezi nimi, měly za následek chybný názor, který se udržoval počínaje NEWTONEM až do Bolyaie a Lobačevského. Podle tohoto názoru není geometrie rovnocennou partií matematiky a má uvnitř matematiky podřízený význam; geometrie není ničím jiným než jedním — nesporně důležitým — oborem aplikace matematické analysy. V tomto období se opravdu geometrie nečítala do vlastní matematiky, nýbrž bylo na ni nazíráno jako na jednu z partií aplikované matematiky, která se zabývá otázkou aplikace matematiky na studium fysikálního prostoru, odpovídajícího newtonskému pojetí vesmíru. Tento názor odpovídá koncepci metafysického materialismu. Proto měla kantovská idealistická koncepce o prostoru na svou epochu tak velký vliv: tehdy panující metafysický materialistický názor nebyl s to správně ji vyvrátit a obě tyto koncepce se sobě v mnoha směrech blížily. V tomto stadiu byla tato otázka na začátku XIX. století. Další rozvoj započal s revolučním objevem Bolyaie a Lobačevského.

V této přednášce již dále nelze rozebírat historii geometrie. Domnívám se však, že to, co jsem řekl, ukazuje, jaký obrovský význam měl v historii geometrie boj idealismu a materialismu a že materialistický názor znamenal vždy pro geometrii krok vpřed, kdežto idealistické koncepce se dříve nebo později staly brzdou jejího rozvoje.

2. Význam geometrie Bolyai-Lobačevského v boji materialistického a idealistického světového názoru.

Matematika se zabývá určitými zákonitostmi materiálního světa, ve zvláštním abstraktním tvaru. Tím je matematika co do svého předmětu příbuzná s přírodními vědami, ale co do svých method se od nich podstatně odlišuje. Pokud se týká předmětu matematiky, platí dodnes Engelsova definice: „Předmětem čisté matematiky jsou prostorové formy a kvantitativní vztahy skutečného světa, tedy velmi reálná látka. Že se tato látka jeví v nejvýš abstraktní formě, může zakrýt jen povrchně její původ z vnějšího světa. Abychom však mohli tyto formy a vztahy zkoumat ryzí, musíme je úplně odloučit od jejich obsahu, a ten jako lhostejný nechat stranou". (B. Engels, *Anti-Dühring*, Praha 1949, str. 36—37).

A. N. Kolmogorov vychází ve svém článku ve *Velké sovětské encyklopedii* rovněž z této definice. Rozvoj matematiky, který nastal v druhé polovině XIX. století a na začátku XX. století, charakterisuje tak, že současná matematika je vědou, která se zabývá kvantitativními a prostorovými formami skutečného světa ve vší jejich obecnosti. S filosofického hlediska to ani v nejmenším neznamená změnu Engelsovy definice, nýbrž jenom modifikaci, jež se stala nutnou právě v důsledku rozvoje, který nastal objevením geometrie Bolyai-Lobačevského. S methodologického hlediska je charakteristickým znakem matematiky abstrakce, jak na to upozorňují shora uvedená Engelsova slova. Kvantitativní a prostorové formy materiálního světa jsou ve své ryzosti poznatelné za podmínky, jestliže pomocí abstrakce oddělíme tyto obecné formy od jejich konkretní náplně a zkoumáme je v jejich obecnosti. Podstatu matematické abstrakce vysvětlují slova J. V. Stalina, uvedená v práci „*O marxismu v jazykovědě*". — „Gramatika nám v tomto ohledu připomíná geometrii, která vytváří své zákony, abstrahujíc od konkretních předmětů a zkoumajíc předměty jako tělesa bez konkretnosti a určujíc vztahy mezi nimi nikoli jako konkretní vztahy jakýchsi konkretních předmětů, nýbrž jako vztahy mezi tělesy vůbec bez jakékoli konkretnosti." (J. V. Stalin, „*O marxismu v jazykovědě*", Praha 1950, str. 23.)

Abstraktní způsob výkladu v matematice neznamená vzdalování od skutečnosti, nýbrž naopak vede k poznání obecných zákonitostí, které jsou skryty v hlubinách materiálního světa. Na to nejjasněji poukazuje V. I. Lenin ve svém výroku o vědě vůbec. Je třeba připomenout, že s abstraktními pojmy nepracuje jenom matematika, nýbrž ve větší nebo menší míře všechny vědy, neboť abstraktní vědecké pojmy, které vznikly na základě zkušenosti a praxe, vyjadřují objektivní realitu stručněji a hlouběji, než bezprostřední smyslová zkušenost. — „Myšlení, přecházejíc od konkretního k abstraktnímu, nevzdaluje se — ačli je správné — od pravdy, nýbrž k ní vede", píše V. I. Lenin ve „*Filosofických sešitech*" (ruské vydání, Moskva 1947, str. 146). „Abstrakce *hmoty*, přírodního *zákona*, abstrakce *hodnoty* atd., jedním slovem všechny vědecké (správné, seriosní, ne prázdné) abstrakce odrážejí přírodu hlouběji, věrněji, úplněji. Od živého vnímání k abstraktnímu myšlení a *od něho k praxi* — to jest dialektická cesta k poznání *pravdy*, poznávání objektivní skutečnosti.“ (V. I. Lenin, *Filosofické sešity*; viz Časopis pro pěstování matematiky, 76. č. 4, str. 239.) V téže práci o něco dále píše V. I. Lenin: „Tvoření (abstraktních) pojmů a operování s nimi již v sobě *obsahuje* představu, přesvědčení, *vědomí* zákonitosti objektivních souvislostí světa“ (tamtéž, str. 153). Tato Leninova slova současně ukazují, že pojem abstrakce lze úplně pochopit jenom na základě dialektického materialismu a že rovněž si lze vytvořit o předmětě, problémech a vlastnostech methody matematiky jasný názor jenom na základě dialektického materialismu. Abstrakce v matematice jde dále než v jiných odvětvích vědy; nebudeme se však zde zabývat zvláštními rysy matematické abstrakce, která ji odlišuje od abstrakce, používané v jiných vědách. Dříve bylo rozšířeno mezi matematiky i mezi přírodovědci a filosofy mnoho nesprávných, chybných představ o matematice. Tyto nesprávné názory existují stále ještě nejenom na západě, nýbrž — i když v menší míře — a nejenom mezi matematiky — i u nás. Tím je třeba se zabývat i proto, že bez toho nemůžeme chápat to nové, co dal vědě objev neeuklidovské geometrie. Různých nesprávných názorů na matematiku je celá spousta. Z nich se podrobně zastavíme jenom u několika.

Především budeme zkoumat hledisko idealismu. Toto hledisko odmítá objektivní charakter zákonů matematiky a matematiku považuje za volný výtvor lidského rozumu. Toto idealistické pojetí není schopno vysvětlit příčinu toho, proč lze matematické methody tak skvěle aplikovat v přírodních vědách a v technice, v praktické činnosti lidstva, která směřuje k poznání a přetváření přírody a společnosti. Idealistický názor na matematiku není ničím podložen, je nevědecký a škodlivý. Prvním důsledným obhájcem idealistického názoru na geometrii, jak jsme již připomněli, byl Platon. Toto pojetí žije dodnes v buržoasní vědě a v nynější době se nejpatrněji projevuje ve formě konvencionalismu, jehož prvním výrazným představitelem byl Poincaré. Podle idealistického pojetí je předmětem geometrie studium člověku vrozeného „apriorního“ pojmu prostoru.

V Bolyaiově epoše byl nejrozhodnějším zastáncem tohoto názoru Kant, který tvrdil, že naše představy o prostoru jsou vrozenými apriorními ideami, formami našeho nazírání, které jsou absolutně nezávislé na skutečnosti a zkušenosti. Podle Kanta jsou tvrzení euklidovské geometrie jedině možné, neměnné zákony lidského myšlení. Tento názor byl objevem geometrie Bolyai-Lobačevského nejrozhodněji vyvrácen.

Objev geometrie Bolyai-Lobačevského byl ranou nejenom pro idealismus, nýbrž i pro ten nesprávný metafysický názor na matematiku, který ztotožňoval zákony matematiky dané epochy se zákony přírody. Chybnost tohoto názoru je zřejmá: zákony matematiky odrážejí zákonitosti materiálního světa, avšak odraz — jakkoli věrný není totožný s tím, co odráží. Jako každé lidské poznání podává matematika jenom relativně a přibližně věrný snímek skutečného světa a více nebo méně jej zjednodušuje. Rozumí se, že toto přiblížení nemá principiální a nepřekonatelné meze, přesnost přiblížení a věrohodnost snímku daného matematikou neustále vzrůstá; v tom právě spočívá její rozvoj. Ale materiální svět ve své úplnosti, všestrannosti a bohatství odráží matematika vždy jenom více méně zjednodušeně, schematicky. Ten, kdo se jenom trochu zabýval aplikací matematiky v libovolném oboru, ví dobře, že základní problém aplikace matematiky je právě v rozhodnutí otázky, které vztahy a které faktory musí být zachyceny při popisu některého reálného jevu nebo procesu v matematickém tvaru a které mohou být zanedbány (neboť ve skutečném světě souvisí všecky reálné jevy jeden s druhým); a rovněž rozhodnutí v otázce, v jakém zjednodušeném tvaru má být zachycen charakter jevů a vliv v evidenci vzatých faktorů — jedním slovem, jak zvolit matematický model, odrážející zkoumaný jev nebo proces s přesností potřebnou pro praxi. (Přesnost může být v jednotlivých případech neobyčejně velká.) Právě tím se vysvětluje, proč existují meze aplikability matematické methody. Je třeba připomenout, že nesmíme zaměňovat otázku po *správnosti* a otázku po *přesnosti* matematického modelu. Matematický model, který odráží skutečnou souvislost jevů s určitou přesností v obecných rysech správně, je nutno považovat v podstatě za správný i v tom případě, lze-li jeho přesnost zvětšit dalším zpřesněním modelu. V takových případech nevyvrací další zpřesnění modelu, jímž se zvýší přesnost popisu a odrazu, obecnou přesnost přibližného snímku, nýbrž jej pouze doplňuje. Takový je stav věcí na příklad v případě klasické a relativistické mechaniky. Na tuto důležitou otázku upozornil Riemann, který napsal: „Souvislosti mezi prvky obrazu a originálu musí být stejné, neboť jenom v tom případě je obraz správný. Správnost obrazu nezávisí na stupni jeho přesnosti. Zaměníme-li prvky obrazu skupinou subtilnějších prvků, pak tím vzroste naše pochopení vztahů věcí, aniž považujeme původní úvahu za nesprávnou“ (*Sebrané spisy*, str. 490.) Tak jako idealistický názor vede k nedoceňování aplikability matematických method, vede uvedený metafysický názor, který ztotožňuje zákony materiálního světa s jejich odrazem v matematickém tvaru, v jistém směru k přeceňování aplikability matematických method (v jiných směrech vede i metafysický názor k podceňování matematiky): obě nesprávné koncepce jsou zdrojem velkých chyb v praxi. Z toho, že matematika má k popisu skutečnosti vždycky jenom modely, vyplývá, že matematický výklad, sloužící k popisu jakéhokoli přírodního jevu nebo procesu, není kategoricky určen, nýbrž lze jej chápat různě a v každém jednotlivém případě ukazuje zkušenost, který z nich je vhodný. Tak na příklad při popisu oscilací struny lze strunu považovat za spojitou nebo za řetězec, skládající se z isolovaných hmotných bodů, elasticky spolu spojených. Výklad, který je založen na dvou různých modelech, vede v mnoha směrech v podstatě k stejným výsledkům, avšak v případě vynucených oscilací za určitých podmínek vzniká principiální rozdíl. Uvedené metafysické pojetí, které ztotožňuje objektivní zákony materiálního světa s odrážejícím je matematickým modelem, se později propletlo s machismem. Je třeba vědět, že machistický názor chybně ztotožňuje fysikální skutečnost s naším pozorováním, se zkušeností. Právě v tomto bodě navazuje machismus na nesprávný metafysický názor na matematiku, který ztotožňuje naši zkušenost s matematickými vztahy, jež zformulovala věda k popisu této zkušenosti. Takovým způsobem vznikly prázdné fráze o tom, že „hmota zmizela" a zůstaly pouze rovnice.

Zde je třeba poukázat ještě na jeden nesprávný idealistický směr — agnosticismus. Metafysičtí filosofové, kteří neznali složitou dialektiku lidského poznání z toho faktu, že matematický model není totožný se skutečností, nýbrž ji jenom odráží ve více méně zjednodušeném tvaru a tím se k ní přibližuje, učinili nesprávný závěr, že zákonitosti materiálního světa jsou nepoznatelné. Takový závěr není nijak podložen, neboť překvapující přesnost výsledků, které vznikají použitím matematických method, na příklad v astronomii a ve fysice, a rovněž obrovské úspěchy při snaze člověka o přetváření přírody, všechno to nevývratně dokazuje, že materiální svět je poznatelný a že použití matematických method je neocenitelným nástrojem poznání. Zanedbání, jehož se dopouštíme při volbě matematického modelu, jsou nutná i proto, že podstatu jevů lze zachytit jenom tehdy, když zanedbáme všechno nepodstatné. Otázku lze vysvětlit tímto srovnáním: Věda si počíná podobně jako znalec, studující některý obraz chvíli z blízka, chvíli zase z dálky, aby jej poznal v detailech a současně si o něm učinil celkovou představu. Tedy methoda matematiky je v principu stejná jako methoda každé jiné vědy, při čemž se samo sebou rozumí, že tato otázka nabývá v matematice jako ve všech jiných odvětvích vědy svého specifického charakteru. Podle mechanického materialismu lze popsat s úplnou přesností všechny jevy ve světě pomocí matematických rovnic. Zastáncem tohoto názoru byl na příklad LAPLACE, který napsal: „Kdyby některý duch, který by znal v daném okamžiku všechny síly prostupující přírodu a relativní stavy věcí, z nichž se příroda skládá, duch všeobsáhlý, schopný analysovat tyto údaje, vyjádřil formulí pohyb největších nebeských těles i nejmenšího atomu vesmíru, nezůstalo by nic pro něho neurčitým a před jeho očima by se široce zjevilo všechno budoucí i minulé ..." *Essai Philosophique sur les Probabilités*, 1814).

Nyní již dobře víme, že je představa takového universálního obrazu naivní, a matematika si staví před sebe daleko skromnější úkoly, při čemž ovšem tyto úkoly řeší v celé jejich šíři. Shora uvedená Laplaceova slova obsahují i vulgární zjednodušení otázky nutnosti a nahodilosti; zabývat se vysvětlením této otázky jsem měl možnost jinde, proto ji v této přednášce ponechám stranou. (Viz „*Základní otázky theorie pravděpodobnosti ve světle dialektického ma-*

terialismu", Budapešť, Filosofická ročenka, v tisku.) Je zajímavé připomenout, že mechanistický metafysicko-materialistický názor, jestliže na jedné straně přeceňuje roli a možnosti matematiky, na druhé straně se snaží omezit sféru matematického zkoumání. Neboť tím, že metafysicko-materialistický názor není s to pochopit roli matematické abstrakce, zabraňuje matematice budování obecných abstraktních theorií. Takový byl stav v případě komplexních čísel, jehož se ještě dotknu; avšak již zde poznamenávám, že otázka Společnosti JABLONOVSKÉHO, zda mohou být konstruovány imaginární veličiny (na kterou Jan Bolyai poslal výjimečně hlubokou odpověď), ukazuje již ve své formulaci, že v té době (1837) byl omezený mechanistický metafysický názor na matematiku ještě silně rozšířen. Pokud se týká komplexních čísel, ukázal i Engels, že je nelze pochopit metafysickým myšlením, při čemž konstatoval: „... kde by byla matematika nižší i vyšší, kdyby jí bylo zakázáno operovat s $\sqrt{-1}$?" (B. Engels, *Antidühring*, Praha 1949, str. 107).

V oboru geometrie v XVII. a XVIII. století panoval shora uvedený mechanisticko-materialistický názor. To znamenalo, že byl fysikální prostor ztotožňován s prostorem euklidovské geometrie. Zákony euklidovské geometrie byly považovány za fysikální zákony a tehdy si vůbec neuměli představit, že se matematika může zabývat prostory jiné struktury. Tento mechanisticko-materialistický názor se shodoval s filosofií Kantovou. To je dalším příkladem toho, jak metafysické myšlení vede k idealismu.

Jak již bylo uvedeno, panoval tentýž názor nejenom v geometrii, nýbrž i v jiných odvětvích matematiky; rozvoji pojmu čísla byla ve velké míře na překážku metafysicko-materialistická koncepce, která ztotožňovala čísla s fysikálními veličinami. Tato mechanisticko-materialistická koncepce zabraňovala vyjasnění pojmu komplexních čísel. To, že tato koncepce převládala, vysvětluje, proč se komplexní čísla setkávala s takovou nedůvěrou a proč pojem komplexního čísla podle Gaussových slov byl obklopen „mlhou mystiky". Přelom starých předsudků v oboru geometrie a algebry nastal ve stejném období, v první polovině XIX. století a obě tyto revoluční změny spolu úzce souvisí. Již jsem upozornil na to, že se i Jan Bolyai zabýval otázkou komplexních čísel v odpovědi, kterou dal na konkurs lipské Společnosti Jablonovského v r. 1837 (*Článek o imaginárních veličinách*, P. Stäckel, *Geometrická vyšetřování Farkaše a Jana Bolyaie*, Budapešť, 1914, sv. II, str. 239—249). Později v r. 1850 přidal Jan Bolyai do této práce poznámku, podle níž se v souvislosti se svým geometrickým vyšetřováním zabýval ještě kolem r. 1826 vybudováním theorie komplexních čísel. Viděli jsme, že se i Gauss zabýval problémem základů geometrie a theorie komplexních čísel a jejich úzké souvislosti. V tomto směru není výjimkou ani N. I. Lobačevskij, jehož rovněž zajímala otázka theorie komplexních čísel. Ve své práci „*Algebra nebo výpočty konečných veličin*" (str. 25) píše: „Používání $\sqrt{-1}$ je v matematice tolik třeba, že i já jsem začal mluvit mnohem více o imaginárních mocninách, než se to obyčejně činí, při čemž jsem pečoval o to, abych zavedl jasné pojmy a položil pevné základy pro výpočty, kde se užívá $\sqrt{-1}$."

Je nadmíru zajímavé, že ve své práci, uveřejněné v r. 1834, Lobačevskij po prvé definuje goniometrické funkce ryze analytickým způsobem pomocí jejich potenční řady a goniometrii buduje ryze analyticky pomocí Eulerova vztahu. Ač potenční řady goniometrických funkcí a uvedený vztah byly již dávno známy, nezaujal takové methodologické stanovisko před Lobačevským ještě nikdo, jak ukazují v nedávno vyšlém článku A. P. JUŠKEVIČ a I. G. BAŠMAKOVÁ. I v tom opět souhlasí Lobačevského myšlenky s myšlenkami Jana Bolyaie, u něhož v práci „*O imaginárních veličinách*" rovněž najdeme definici goniometrických funkcí pomocí mocninných řad, a to hned pro jakoukoli komplexní hodnotu proměnné. Tuto myšlenku objevili Jan Bolyai a N. I. Lobačevskij nezávisle na sobě a přibližně v téže době, jako myšlenku neeuklidovské geometrie.

Z Bolyaiovy „*Responsio*" citujeme tuto větu: „Jenom takové *věci* a tedy jenom takové veličiny se mohou stát předmětem (zdravého) zkoumání, které fakticky *existují* (na příklad, jsou-li to materiální části tělesného nebo vnějšího světa nebo alespoň jsou-li představitelné a možné)." Tím Bolyai zaujal rozhodné stanovisko proti nesprávnému idealistickému učení o volném vytváření matematických pojmů, které, jak známo, zastával ještě ve XX. století Poincaré. Správné Bolyaiovo stanovisko ukazuje následující věta jeho kritiky, uvedená v jeho „Responsio" v souvislosti s uvedenou prací Gaussovou: „... sotva lze odůvodnit tvrzení, že jiné druhy veličin nelze zahrnout do nauky o veličinách. Neboť jsem shora velmi jasně dokázal, že lze zavésti (podle vlastního uvážení) jakékoli množství druhů veličin, *jenom že se to nejeví nutným.*"

Avšak souvislost mezi neeuklidovskou geometrií a současnou theorií komplexních čísel má nejenom ideologický a historický charakter, nýbrž mezi nimi existuje také úzká věcná souvislost. Tato souvislost je osvětlena mezi jiným, již v *Doplňku* k *Dodatku*, který napsal Farkaš Bolyai, který však obsahuje myšlenky Jana Bolyaie. Během dalšího vývoje se tato souvislost stala ještě jasnější a v dnešní době je natolik obecně známa, že není nutno se zastavit u jejího vysvětlení. Nás především zajímá ideologická stránka otázky: To, že nesprávné metafysické názory na matematiku, bránící jejímu rozvoji, byly vyvráceny v první polovině XIX. století ve dvou oborech: v otázce o pojmu geometrického prostoru a v otázce o theorii komplexních čísel. Obě události mají revoluční význam nejenom v oboru matematiky, nýbrž jsou také vítězstvím materialistického světového názoru.

Po tom všem můžeme přistoupit k tomu, v čem spočívá význam objevu geometrie Bolyai-Lobačevského s hlediska materialistického světového názoru. Budu se to snažit shrnout do tří bodů:

1. Důkazem toho, že je možno několik rovnocenných geometrických soustav a že jenom zkušenost může rozhodnout, která z nich nejvěrněji popisuje faktickou strukturu fysikálního prostoru, vyvrátili Bolyai a Lobačevskij idealistické kantovské pojetí o vrozeném a na zkušenosti nezávislém charakteru absolutního pojmu prostoru.

2. Tím, že svým objevem nezvratně dokázali, že se musí rozlišovat mezi fysikálním prostorem, v němž žijeme, a mezi různými matematickými pojmy prostoru, které slouží k popsání vlastností prostoru fysikálního, stal se neudržitelným vulgární metafysický názor, ztotožňující fysikální realitu s odrážejícím ji matematickým modelem. Tím se otevřela cesta k dalšímu vývoji matematického pojmu prostoru a současně i k hlubokému studiu fysikální struktury prostoru.

3. Svým objevem a celou svou vědeckou činností účinně přispěli k správnému materialistickému chápání vztahu mezi matematickou a skutečným světem. Mezi jiným bojovali uvědoměle proti idealistickým názorům o libovolnosti základních postulátů matematiky a současně bojovali proti metafysickému názoru, který podceňoval a omezoval úlohu a význam matematiky.

K těmto třem bodům je třeba připojit.

K bodu 1: Vyvrácení kantovské koncepce bezesporu bylo významným vítězstvím materialismu. V knize „*Materialismus a empiriokriticismus*" píše V. I. Lenin: „Jestliže materialismus uznává existenci objektivní reality, t. j. pohybující se hmoty, nezávisle na našem vědomí, musí uznávati nutně také objektivní realitu času a prostoru, na rozdíl především od kantovství, které v této otázce stojí na straně idealismu a pokládá čas a prostor nikoliv za objektivní realitu, nýbrž za formy lidského nazírání." (V. I. Lenin, „*Materialismus a empiriokriticismus*", Praha 1952, str. 160). O několik stránek dále Lenin pokračuje: „Neboť něco jiného je otázka, jakým způsobem vnímá člověk prostor pomocí různých smyslových orgánů a jak se dlouhým historickým vývojem z těchto vjemů vypracovávají abstraktní pojmy prostoru — a něco zcela jiného je otázka, odpovídá-li těmto vjemům a těmto lidským pojmům objektivní realita na lidstvu nezávislá." (Tamtéž, str. 171.) V. I. Lenin končí tuto myšlenku těmito slovy: „Naše ‚zkušenost' a naše poznání se přizpůsobují stále více objektivnímu prostoru a času a obrážejí je stále správněji a hlouběji." (Tamtéž, str. 172.)

Spolu s touto otázkou vzniká problém: kterou geometrii potvrzuje zkušenost. Je známo, že se řešením tohoto problému zabýval již N. I. Lobačevskij. Je třeba připomenout, že se Lobačevskij snažil na základě astronomických měření zjistit součet úhlů v trojúhelníku, při čemž vliv pozorovacích chyb se snažil odstranit použitím theorie pravděpodobnosti. Za tímto cílem provedl velmi cenná vyšetřování v oboru theorie pravděpodobnosti, mimo jiné zkoumal rozdělení součtů stejnoměrně rozdělených náhodných proměnných. N. I. Lobačevskij vyšel z toho, že kdyby se zjistilo, že existuje takový trojúhelník, v němž by součet úhlů byl menší než součet dvou pravých, bylo by tím dokázáno, že ve fysikálním prostoru platí neeuklidovská geometrie; to by však neodporovalo prastaré zkušenosti, že v pozemském měřítku platí zákony euklidovské geometrie v mezích přesnosti měření, neboť kdyby byla absolutní jednotka vzdálenosti v hyperbolické geometrii velmi velká, pak by odchylka od euklidovské geometrie byla znatelnou jenom v tom případě, kdybychom zkoumali geometrické obrazce velikosti řádu odpovídajícího této jednotce (vzhledem k součtu úhlů je stav takový, že defekt součtu úhlů je úměrný obsahu trojúhelníka). Je tudíž nemožné dokázat měřením, že v celém vesmíru platí zákony euklidovské geometrie, neboť vždy zbývá možnost, že ve skutečnosti platí hyperbolická geometrie, jenomže jednotka vzdálenosti je v ní velmi velká i ve srovnání s největší změřenou vzdáleností. Bolyai i Lobačevskij v jistém stupni byli pod vlivem metafysického myšlení své epochy, když otázku stavěli takto: Ve skutečném světě platí *buď* euklidovská, nebo neeuklidovská geometrie. Dnes již víme, že stavět otázku v této formě je nesprávné.

Od dob Bolyaiových a Lobačevského výzkumů učinila geometrie a fysika velký krok kupředu. Když dále rozvíjel a zobecňoval geniální výsledky Bolyaiovy a Lobačevského, objevil Riemann třetí druh geometrie: eliptickou geometrii. Výsledků Riemannových výzkumů použil EINSTEIN k vytvoření obecné theorie relativity. Od dob Einsteinových je nám známo, že struktura fysikálního prostoru závisí na rozdělení hmoty a lze ji popsat pomocí eliptické geometrie, odpovídající koncentraci hmoty. Tak tedy výzkumy Bolyaiovy a Lobačevského posunuly fakticky výzkum fysikálního prostoru vpřed, neboť vytvoření Riemannovy geometrie znamená pokračování v cestě, kterou zahájili Bolyai a Lobačevskij. Méně je známo, že i hyperbolická geometrie má velký význam v theorii relativity při Lorentzově transformaci. Odkazuji na § 11 významného článku B. N. DELONE, „*Geometrie N. I. Lobačevského*“, v němž je uvedeno, že Lorentzovy transformace lze chápat jako pohyb hyperbolického prostoru.

K bodu 2. Objasněním pojmu fysikálního prostoru a geometrického pojmu prostoru se otevřela cesta k dalšímu rozvoji geometrie. Geometrie přestala být vědou druhořadého významu a stala se rovnocennou partií matematiky a tím se současně rozšířil okruh jejích problémů. Současná geometrie se již nezabývá jenom popisem obyčejného fysikálního prostoru, nýbrž pojmu prostoru se v geometrii používá v daleko obecnějším smyslu, na příklad geometrie studuje prostory n-rozměrné i prostory nekonečné dimense atd. V souvislosti s tím se slova „prostor“ dnes v matematice používá v přeneseném smyslu. Geometrie, algebra a analysa se slévají ve vyšší jednotu v současné funkcionální analyse. V těchto výzkumech hráli a hrají významnou úlohu i maďarští matematikové: zásluhu o vytvoření pojmu topologického prostoru má BEDŘICH RIESZ, který nad to značně přispěl k dalšímu rozvoji theorie Hilbertova prostoru. Obecné prostory mají důležitou aplikaci i ve fysice, tak na příklad čtyrrozměrný prostor v theorii relativity, n-rozměrné prostory s pojmem t. zv. fázového prostoru na př. ve statistické mechanice, theorie Hilbertova prostoru v kvantové mechanice atd. Slovem „geometrie" dnes zahrnujeme daleko více, než matematický popis fysikálního prostoru. Ve Velké sovětské encyklopedii se o tom píše: „Vyšetřování těchto abstraktních matematických „prostorů" naprosto nemají za svůj jediný cíl vytvoření zásoby hypothetických soustav k obrážení vlastností reálného prostoru. Praktické aplikace jsou v současné geometrii velmi rozsáhlé. Na příklad stav mechanické soustavy n hmotných bodů je znázorňován bodem fázového prostoru soustavy, který je obecně $6n$-rozměrný (bod fázového prostoru je určen $3n$ kartézskými souřadnicemi n hmotných bodů a $3n$ komponentami jejich rychlostí), atd." (*Velká sovětská encyklopedie*, sv. I, str. 615.) Proto my nemůžeme souhlasit se stanoviskem některých fysiků, podle nichž se geometrie stala jednou z partií fysiky. Takové pojetí by znamenalo návrat k zastaralému stanovisku mechanistického materialismu. Zastáncem takového názoru může být jenom ten, kdo v protikladu k dnes obecně přijatému používání slova, rozumí pod geometrií fysikální výzkum fysikálního prostoru. Ovšem v takovém případě toto tvrzení nám nic neříká. Názor, podle něhož se geometrie stala součástí fysiky, v podstatě znamená odmítání matematiky jako samostatné vědy; takový názor odporuje dialektickému materialismu. Tvrzení, že geometrie je součástí fysiky, zásadně odporuje uvedeným slovům soudr. J. V. Stalina o geometrii, neboť je zřejmé, že fysika vykládá věci nikoli jako „tělesa bez vší konkretnosti". Dialektický materialismus učí, že předmětem matematiky jsou prostorové formy a kvantitativní vztahy materiálního světa. Předmětem fysiky je však zkoumání samé hmoty a zákonů jejího pohybu. Je zřejmé, že jsou to různé věci. Z uvedeného plyne, že fysikální a matematické zkoumání musí mít úzkou souvislost, že fysikové a matematikové musí úže spolupracovat. To je na jedné straně třeba zdůraznit proto, abychom nezůstali na nesprávném stanovisku idealismu propagujícího samoúčelnost matematiky, avšak na druhé straně i proto, že v tomto oboru u nás ještě jsme nedospěli k dostatečně těsné spolupráci.

Objev geometrie Bolyai-Lobačevského má s hlediska rozvoje matematiky revoluční význam a měl výjimečně velký vliv na rozvoj celé matematiky. Vyšetřování Bolyaiova a Lobačevského v oblasti axiomatického vybudování geometrie se stala počátkem rozvoje současné axiomatické methody v matematice. V souvislosti s neeuklidovskou geometrií po prvé vznikla otázka o úplnosti axiomatického systému, o jeho bezespornosti, problém konstrukce modelů atd. V této otázce odkazuji na přednášku L. Kalmara. Jenom poznamenávám, že axiomatická methoda nabyla velkého významu nejenom v matematice, nýbrž i ve fysice. Ve *Velké sovětské encyklopedii* se tom píše toto: „Positivního významu nabyla axiomatická methoda výkladu v mechanice a v theoretické fysice. Axiomatické vybudování statiky pochází již od Archimeda, celé klasické mechaniky — od Newtona. Klasickým příkladem axiomatického výkladu partie fysiky může být thermodynamika". (*VSE*, sv. I., str. 616.)

Je velmi zajímavé zkoumat, do jaké míry sám Bolyai a Lobačevskij chápali ideologické důsledky vlastního objevu. Tato přednáška je především věnována ideologickému významu Bolyai—Lobačevského geometrie a nikoli světovému názoru Bolyaiovu a Lobačevského; v tom odkazuji na přednášky P. ALEXITSE a F. KARTESI. Ovšem to, co jsem řekl, dokazuje, že Jan Bolyai stejně jako N. I. Lobačevskij byli v podstatě bojovnými materialisty; je ovšem nutno připomenout, že nikdo z nich nemohl znát dialektický materialismus. V myšlení Jana Bolyaie byly ještě metafysické prvky, ale dialektické myšlení mu nebylo cizí. Jako příklad uvedu malý citát. V práci o komplexních číslech Bolyai píše: „Vezmeme mimo to vůbec jakoukoli zcela substanciální věc, na příklad nulu, ježto nic je jenom negativní pojem, a sledujeme-li tuto otázku blíže, lehko pochopíme, že není možno označovat „nic" a podrobovat je operacím. Nelze tvrdit ani to, že na př. $a + 0$ je rovno a, protože zde nemusíme k a nic přidávat, neboť z téhož důvodu by bylo nutno tvrdit také, že $\frac{a}{0} = a$. Takový přesnější postup ihned ukazuje, že se metafysika výkladu nuly (0) dosud opírala o velmi falešné odůvodnění." (Str. 240—241.) Srovnejme nyní tato slova s Engelsovými slovy o nule v poznámkách k „*Dialektice přírody*": „Nula má zcela určitý obsah". (*Dialektika přírody*, Praha 1950, str. 222.)

Toto srovnání, zdá se, nepotřebuje komentáře, zrovna tak jako Engelsovy a Bolyaiovy výroky, zvolené za motto této přednášky, které nejzřejměji dokazují materialistické názory Bolyaiovy.

Tím, co jsem řekl, chci dokázat, jakou obrovskou, epochální událostí v historii matematiky byl objev geometrie Bolyai-Lobačevského a jak velký význam má pro boj materialismu s idealismem. Viděli jsme, že objev geometrie Bolyai-Lobačevského byl novým vítězstvím materialistického světového názoru, vyvracejícím „vybájené výmysly" idealismu. Týž objev vyvrátil nesprávný kantovský názor na prostor a současně osvětlil neudržitelnost mechanistického metafysického materialismu. Tím byl správně objasněn vztah mezi matematikou a skutečným světem. My, maďarští matematikové, pokračujíce dále ve vědeckém odkazu pýchy maďarské vědy, Jana Bolyaie, vysoko vyzvedáme poznatky pokrokové vědy. „Dějiny vědy znají nemálo statečných lidí, kteří uměli bořit staré a vytvářet nové přes všechny překážky, navzdory všemu" (J. V. Stalin, *O Leninovi*, Praha 1948.) Právě mezi takové lidi, do jejich prvních řad patří Jan Bolyai. Ve své každodenní práci musíme čerpat sílu z památky Jana Bolyaie, geniálního matematika, který neohroženě bojoval za vědeckou pravdu, proti starým předsudkům.

Z ruského textu přeložil *Karel Winkelbauer*, Praha.

LITERATURA ke str. 154:

В. Н. Молодший, *Был ли Евклид последователем Платона?* Труды семинара МГУ по истории математики, Историкоматематические исследования, вып. II, Гостехиздат 1949, str. 499—504.

Л. Е. Майстров, *О статье М. Я. Выгодсково „Начала Евклида“*. Tamtéž, str. 505—507.

Poznámka redakce.