

František Nožička

Skaláry křivosti nadplochy vnořené do euklidovského prostoru a jejich geometrický význam

Časopis pro pěstování matematiky, Vol. 77 (1952), No. 4, 347--372

Persistent URL: <http://dml.cz/dmlcz/117049>

Terms of use:

© Institute of Mathematics AS CR, 1952

Institute of Mathematics of the Academy of Sciences of the Czech Republic provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.



This paper has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* <http://project.dml.cz>

SKALÁRY KŘIVOSTI NADPLOCHY VNOŘENÉ DO EUKLIDOVSKÉHO PROSTORU A JEJICH GEOMETRICKÝ VÝZNAM

FRANTIŠEK NOŽIČKA, Praha.

(Došlo dne 4. března 1952.)

513.738.3

Je dobře znám význam tak zvané střední křivosti H a Gaussovy křivosti K pro plochu v trojrozměrném prostoru euklidovském. Účelem předložené práce je definovat vhodným způsobem skaláry křivosti pro nadplochu ve vícerozměrném prostoru euklidovském tak, aby případ plochy V_2 a E_3 byl speciálním případem této teorie a dále najít pokud možno jednoduchý geometrický význam těchto skalárů. Studium definovaných skalárů a nadplochy samé, jakož i podané geometrické interpretace jsou provedeny užitím sférického zobrazení nadplochy, t. j. zobrazením nadplochy na nadplochu kulovou.

1. Úvodní poznámky.

V euklidovském prostoru E_{n+1} o $n+1$ dimensích s kartézskými pravouhlými souřadnicemi x^A , $A = 1, 2, \dots, n+1$, je dána nadplocha V_n o n dimensích parametrickými rovnicemi

$$x^A = x^A(\xi^\alpha), \quad A = 1, 2, \dots, n+1; \quad \alpha = 1, 2, \dots, n. \quad (1,1)$$

V dalším budeme předpokládat, že funkce $x^A = x^A(\xi^\alpha)$ mají spojité parciální derivace aspoň druhého řádu podle parametrů ξ^α a dále, že hodnost matice

$$(B_\alpha^1, B_\alpha^2, \dots, B_\alpha^{n+1}), \quad B_\alpha^A \equiv \frac{\partial x^A}{\partial \xi^\alpha} \quad (1,2)$$

je v každém bodě uvažovaného oboru rovna n .

Označíme-li g_{AB} metrický tensor prostoru E_{n+1} ,¹⁾ potom indukovaný metrický tensor nadplochy V_n je takto definován

$$a_{\lambda\mu} = g_{AB} B_\lambda^A B_\mu^B. \quad (1,3)$$

Poněvadž předpokládáme, že $x^A = x^A(\xi^\alpha)$ jsou reálné funkce reálných

¹⁾ Tedy podle předpokladu $g_{AB} = 0$ pro $A \neq B$, $g_{AB} = 1$ pro $A = B$; $A, B = 1, 2, \dots, n+1$.

parametrů ξ^α , plyne z (1,3) a předchozích předpokladů, že tensor $a_{\lambda\mu}$ je pozitivně definitní.

Jednotkovým tečným vektorem variety V_n nazýváme vektor T_A , který je řešením rovnic

$$B_\lambda^A T_A = 0, \quad g^{AB} T_A T_B = 1, \quad (1,4)$$

kde g^{AB} je kontragradientní tensor k tensoru g_{AB} . Snadno nahlédneme že za našich předpokladů je rovnicemi (1,4) vektor T_A až na znamení určen jednoznačně.

Vektor N^A takto definovaný

$$N^A = g^{AB} T_B \quad (1,5)$$

nazýváme normálou variety V_n . Ježto vektor T_A je rovnicemi (1,4) definován až na znamení, je vektor N^A definován rovněž až na znamení. K vůli jednoznačnosti vektoru N^A (a tedy též T_A) volme vždy takové znamení u řešení rovnic (1,4), aby determinant ze složek B_α^A a vektoru N^A byl vždy kladný, t. j.

$$\begin{vmatrix} B_1^1, & B_1^2, & \dots, & B_1^{n+1} \\ B_2^1, & B_2^2, & \dots, & B_2^{n+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ B_n^1, & B_n^2, & \dots, & B_n^{n+1} \\ N^1, & N^2, & \dots, & N^{n+1} \end{vmatrix} > 0. \quad (1,6)$$

Druhým metrickým tensorem variety V_n nazýváme tensor $h_{\alpha\beta}$ takto definovaný

$$h_{\alpha\beta} = B_\alpha^A \partial_\beta T_A \left(\partial_\beta \equiv \frac{\partial}{\partial \xi^\beta} \right). \quad (1,7)$$

Označíme-li $\{\beta^\alpha_\gamma\}$ koeficienty indukované konexe ve V_n , kde

$$\{\beta^\alpha_\gamma\} = \frac{1}{2} a^{\alpha\delta} (\partial_\beta a_{\gamma\delta} + \partial_\gamma a_{\beta\delta} - \partial_\delta a_{\beta\gamma}), \quad (3)$$

potom tensor

$$K_{\alpha\beta\gamma}^{\delta} \equiv 2(\partial_{[\alpha} \{\beta^\delta_{\gamma]\}} + \{\alpha^\delta_{[\mu]\} \{\beta^\mu_{\gamma]\}}) \quad (1,8)$$

jest tensorem křivosti prostoru V_n .

V dalším budeme se též odvolávat na dva známé vztahy a to *Gaussovy* rovnice

$$K_{\alpha\beta\gamma\delta}^{\epsilon} = 2h_{\delta\alpha} h_{\beta\gamma}^{\epsilon} \quad (K_{\alpha\beta\gamma\delta}^{\epsilon} = K_{\alpha\beta\gamma}^{\rho} a_{\rho\delta}), \quad (1,9)$$

a formulí *Weingartenových*

$$\partial_\alpha N^A = h_{\alpha\beta} a^{\beta\delta} B_\delta^A. \quad (1,10)$$

²⁾ Z předpokladů plyne, snadno, že determinant (1,6) nemůže být v uvažovaném oboru variety V_n roven nule.

³⁾ $a^{\alpha\delta}$ je kontragradientní tensor k tensoru $a_{\alpha\delta}$ ve V_n .

Ke konci této úvodní statě připojme ještě tyto poznámky:
 buďtež v^A, w^A dva libovolné vektory v E_{n+1} ,
 potom modulem vektoru v^A (modulem vektoru w^A) nazýváme skalár

$$g_{AB}v^Av^B, (g_{AB}w^Aw^B). \quad (1,11)$$

a mírou vektoru $v^A, (w^A)$ skalár

$$+ \sqrt{g_{AB}v^Av^B}, (+ \sqrt{g_{AB}w^Aw^B}) \quad (1,12)$$

Úhel ϑ vektorů v^A, w^B je definován vztahem

$$\cos \vartheta = \frac{g_{AB}v^Av^B}{+ \sqrt{(g_{AB}v^Av^B) \cdot (g_{CD}w^Cw^D)}}, \quad (1,13)$$

při čemž učiníme úmluvu, že úhly v E_{n+1} budeme měřit od nuly do π (předpokládáme samozřejmě, že v^A, w^B nejsou nulové vektory).

Buďtež nyní v^A, v^A, \dots, v^A ($1 < p \leq n+1$) p vektorů v nějakém bodě P prostoru E_{n+1} . Tyto vektory definují v tomto bodě P p -vektor $v^A_1 v^A_2 \dots v^A_p$ se složkami nevesměs rovnými nule, jestliže vektory v^A_1, \dots, v^A_p jsou v P lineárně nezávislé. Modulem p -vektoru $v^A_1 v^A_2 \dots v^A_p$ nazýváme pak skalár⁴⁾

$$m = g_{A_1 A_1} g_{A_2 A_2} \dots g_{A_p A_p} v^A_1 v^A_2 \dots v^A_p v^{B_1} v^{B_2} \dots v^{B_p}. \quad (1,14a)$$

Ježto nám jde stále o reálné veličiny, snadno nahlédneme, že $m \geq 0$, přičemž znamení rovnosti platí tehdy a jen tehdy, je-li $[v^A_1, v^A_2, \dots, v^A_p] = 0$, t. j. jsou-li vektory $v^A_1, v^A_2, \dots, v^A_p$ ($1 < p \leq n+1$) lineárně závislé. To plyne z toho, že tensor g_{AB} je pozitivně definitní.

Modul m můžeme též psát v libovolném z těchto tvarů:

$$m = g_{|A_1|B_1} |g_{A_2|B_2}| \dots |g_{A_p|B_p}| v^A_1 v^A_2 \dots v^A_p v^{B_1} v^{B_2} \dots v^{B_p}, \quad (1,14b)$$

$$m = v_{B_1} v_{B_2} \dots v_{B_p} v^{B_1} v^{B_2} \dots v^{B_p}, \quad v_{B_i} = g_{AB} v^A. \quad (1,14c)$$

Jako míru p -vektoru $v^A_1 v^A_2 \dots v^A_p$ definujeme pak skalár

$$+ \sqrt{m}. \quad (1,15)$$

Buďtež nyní v^A, v^A, \dots, v^A ($1 < p \leq n+1$) lineárně nezávislé vektory v bodě P prostoru E_{n+1} a w^A, w^A, \dots, w^A lineárně nezávislé vektory

⁴⁾ Viz na př. *E. Cartan: Leçons sur la Géométrie des espaces de Riemann, Paris, 1928, str. 15.*

v bodě Q prostoru E_{n+1} (bod Q může být též totožný s bodem P). Jako úhel p -vektorů $v^{A_1}v^{A_2} \dots v^{A_p}, w^{A_1}w^{A_2} \dots w^{A_p}$ pak definujeme úhel ϑ v intervalu $0 \leq \vartheta \leq \pi$ tak, že

$$\cos \vartheta = \frac{g_{[A_1|B_1|} g_{A_2|B_2|} \dots g_{A_p]B_p} v^{A_1} v^{A_2} \dots v^{A_p} w^{B_1} w^{B_2} \dots w^{B_p}}{+ \sqrt{m^{(p)}(v) \cdot m^{(p)}(w)}} \quad (1,16)$$

2. Hlavní křivosti a skaláry K variety V_n vnořené v E_{n+1}

Budiž $a_{\lambda\mu}$ první metrický tensor a $h_{\lambda\mu}$ druhý metrický tensor variety V_n vnořené v E_{n+1} (viz (1,3), (1,7)). Hlavním směrem v bodě variety V_n nazýváme směr každého nenulového vektoru u^ν ve V_n , vyhovujícího rovnicím

$$h_{\lambda\nu} u^\nu = s a_{\lambda\nu} u^\nu, \quad (2,1)$$

kde $s = s(\xi^\alpha)$ je skalár ve V_n . Relace (2,1) můžeme též psát ve tvaru

$$(h_\nu^\alpha - s \delta_\nu^\alpha) u^\nu = 0, \quad \delta_\nu^\alpha = \begin{cases} 0 & \text{pro } \alpha \neq \nu \\ 1 & \text{pro } \alpha = \nu, \end{cases} \quad (2,2a)$$

kde

$$h_\nu^\alpha = h_{\nu\mu} a^{\mu\alpha}. \quad (2,2b)$$

Z elementární algebry plyne: nutná a postačující podmínka pro to, aby existovalo nenulové řešení u^ν rovnic (2,2a) je

$$\text{Det}[h_\nu^\alpha - s \delta_\nu^\alpha] = 0 \quad (\alpha, \nu = 1, 2, \dots, n), \quad (2,3a)$$

což jest (v uvažovaném bodě variety V_n) algebraická rovnice v s stupně n -tého příslušná systému rovnic (2,2a), tak zvaná charakteristická rovnice systému (2,2a). Rovnici (2,3) můžeme psát stručně ve tvaru

$$\sum_{r=0}^n (-1)^{n-r} K_s^{n-r} = 0, \quad (2,3)$$

kde jsme položili pro stručnost

$$\begin{aligned} K &= 1 \\ (0) \\ K &= h_{\lambda_1}^{\lambda_1} \\ (1) \\ K &= h_{[\lambda_1}^{\lambda_1} h_{\lambda_2}^{\lambda_2} \dots h_{\lambda_r}^{\lambda_r]} \quad \text{pro } 2 \leq r \leq n. \end{aligned} \quad (2,4)$$

⁵⁾ Pomocí vět elementární algebry snadno nahlédneme, že výraz na pravé straně v (1,16) je v absolutní hodnotě vždy menší, nebo roven 1 při $m^{(p)}(v) \neq 0, m^{(p)}(w) \neq 0$. Viz rovněž poznámku ⁴⁾. (p)

Definice 1. Skalár K ($1 \leq r \leq n$) z rovnic definičních (2,4) budeme nazývat r -tou křivostí nadplochy V_n vnořené v E_{n+1} .

Je nyní známo,⁷⁾ že rovnice (2,3), za vpředu uvedených předpokladů, má n reálných kořenů s_1, s_2, \dots, s_n . Veličiny s_i ($i = 1, 2, \dots, n$) jsou vnitřními veličinami (skaláry) nadplochy V_n a jsou v každém bodě variety V_n (kde platí naše předpoklady z § 1) jednoznačně určeny. Skaláry s_i ($i = 1, 2, \dots, n$) nazýváme hlavními křivostmi variety V_n . Z diferenciální geometrie metrické je nyní dále známo⁸⁾, že v případě, kdy $s_i = 1, 2, \dots, n$ jsou vzájemně různé v bodě nadplochy, jsou rovnicemi (2,1) v uvažovaném bodě jednoznačně určeny směry $u^i, i = 1, 2, \dots, n$, definiující v onom bodě směry hlavní a dále, že tyto vektory jsou vzájemně kolmé, t. j. — za předpokladu, že u^i jsou jednotkové vektory — platí

$$a_{\lambda\mu} u^{\lambda}_i u^{\mu}_j = \begin{cases} 0 & \text{pro } i \neq j, \\ 1 & \text{pro } i = j, \end{cases} \quad i, j = 1, 2, \dots, n. \quad (2,5)$$

Avšak i v případě, že rovnice (2,3) má vícenásobné kořeny s_i , je možno vždy najít n jednotkových vektorů $u^i, i = 1, 2, \dots, n$, vyhovujících podmínkám (2,3), (2,5). Tyto vektory definují opět v uvažovaném bodě nadplochy hlavní směry, i když v tomto případě nejednoznačně.

Věta (1,2). Skaláry $K, 1 \leq r \leq n$ jsou elementárními symetrickými funkcemi hlavních křivostí s_i ($i = 1, 2, \dots, n$), t. j.

$$K = s_1 + s_2 + \dots + s_n,$$

$$K = s_1 s_2 + s_1 s_3 + \dots + s_1 s_n + s_2 s_3 + \dots + s_2 s_n + s_3 s_4 + \dots + s_3 s_n + \dots + s_{n-1} s_n,$$

$$K = s_1 s_2 \dots s_n,$$

tedy stručně

$$K = \frac{1}{r!} \sum_{i_1, i_2, \dots, i_r} s_{i_1} s_{i_2} \dots s_{i_r} \quad (1 \leq r \leq n), \quad (2,6)$$

⁶⁾ Viz J. A. Schouten-D. J. Strnik: Einführung... I, str. 39, úloha 3.5.

⁷⁾ J. A. Schouten-D. J. Strnik: Einführung in die neueren Methoden der Differentialgeometrie II, str. 70.

⁸⁾ Viz ⁷⁾.

kde sčítáme přes všechny indexy $i_1, i_2, \dots, i_r = 1, 2, \dots, n$ navzájem různé.

Tato věta plyne ihned z (2,3b) na základě známých vlastností kořenů algebraické rovnice n -tého stupně.

3. Jiný tvar skalárů K . (r)

Nyní budeme uvažovat přirozené r takové, že $2 \leq r \leq n$.

Věta (1,3).

Jest

$$K = \frac{1}{2} K_{\alpha\beta\gamma\delta} a^{\alpha\delta} a^{\beta\gamma}. \quad (3,1)$$

Důkaz: Z Gaussovy rovnice (1,9) dostaneme ihned vztah (3,1).

Poznámka: Pro $n = 2$ je skalár K identický s Gaussovou křivostí (2) pro plochu v prostoru E_3 .

Věta (3,2). Pro $2m \leq n$ ($m > 1$ přirozené číslo) je

$$K_{(2m)} = \frac{1}{2^m} K_{[\alpha_1\alpha_2|\beta_2\beta_1]} K_{\alpha_3\alpha_4|\beta_4\beta_3} \dots K_{\alpha_{2m-1}\alpha_{2m}|\beta_{2m}\beta_{2m-1}} a^{\alpha_1\beta_1} \dots a^{\alpha_{2m}\beta_{2m}}.$$

Důkaz: z Gaussovy rovnice (1,9) plyne

$$\begin{aligned} & K_{[\alpha_1\alpha_2|\beta_2\beta_1]} K_{\alpha_3\alpha_4|\beta_4\beta_3} \dots K_{\alpha_{2m-1}\alpha_{2m}|\beta_{2m}\beta_{2m-1}} = \\ & = 2h_{\beta_1} [[\alpha_1 h_{\alpha_2}] \beta_2] K_{\alpha_3\alpha_4|\beta_4\beta_3} \dots K_{\alpha_{2m-1}\alpha_{2m}|\beta_{2m}\beta_{2m-1}} = \\ & = 2h_{\beta_1} [\alpha_1 h_{\alpha_2}] \beta_2 K_{\alpha_3\alpha_4|\beta_4\beta_3} \dots K_{\alpha_{2m-1}\alpha_{2m}|\beta_{2m}\beta_{2m-1}} = \\ & 2^2 h_{\beta_1} [\alpha_1 h_{\alpha_2}] \beta_2 [h_{\beta_3} [\alpha_3 h_{\alpha_4}] \beta_4] K_{\alpha_5\alpha_6|\beta_6\beta_5} \dots K_{\alpha_{2m-1}\alpha_{2m}|\beta_{2m}\beta_{2m-1}} = \text{atd.;} \end{aligned}$$

po m krocích dostaneme zřejmě

$$\begin{aligned} & K_{[\alpha_1\alpha_2|\beta_2\beta_1]} K_{\alpha_3\alpha_4|\beta_4\beta_3} \dots K_{\alpha_{2m-1}\alpha_{2m}|\beta_{2m}\beta_{2m-1}} = \\ & = 2^m h_{[\alpha_1|\beta_1]} h_{\alpha_2|\beta_2} \dots h_{\alpha_{2m}|\beta_{2m}}. \end{aligned}$$

Jest však vzhledem k (2,4)

$$\begin{aligned} & h_{[\alpha_1|\beta_1]} h_{\alpha_2|\beta_2} \dots h_{\alpha_{2m}|\beta_{2m}} a^{\alpha_1\beta_1} a^{\alpha_2\beta_2} \dots a^{\alpha_{2m}\beta_{2m}} = \\ & = h_{[\alpha_1^{\alpha_1} h_{\alpha_2^{\alpha_2}} h_{\alpha_3^{\alpha_3}} \dots h_{\alpha_{2m}^{\alpha_{2m}}]} = K_{(2m)}. \end{aligned}$$

Odtud a z předchozího plyne ihned vztah (3,2).

Poznámka. Z (3,2) plyne, že je možno všechny skaláry K se sudým indexem r vyjádřit pomocí metrického tensoru nadplochy a jeho parciálních derivací prvního a druhého řádu. Tento výsledek je zobecněním Gaussova výsledku pro plochu v trojrozměrném prostoru euklidovském (tento speciální případ plyne z předchozího pro $n = 2$).

Věta (3,3). Pro $3 \leq 2m + 1 \leq n$ ($m \dots$ přirozené číslo) je

$$K_{(2m+1)} = \frac{1}{2^m} K_{[\alpha_1 \alpha_2 | \beta_2 \beta_1]} K_{\alpha_3 \alpha_4 | \beta_4 \beta_3} \dots \dots K_{\alpha_{2m-1} \alpha_{2m} | \beta_{2m} \beta_{2m-1}} | h_{\alpha_{2m+1} \beta_{2m+1}} a^{\alpha_1 \beta_1} a^{\alpha_2 \beta_2} \dots a^{\alpha_{2m-1} \beta_{2m-1}}$$

Důkaz se provede analogicky jako ve větě (3,2).

4. Geometrický význam skalárů $K_{(r)}$

n -rozměrnou nadkouli v prostoru E_{n+1} o poloměru $R > 0$ a o středu $0(x^A)$, $A = 1, 2, \dots, n + 1$, nazýváme množinu všech bodů $X(x^A)$, pro něž platí

$$\sum_{A=1}^{n+1} (x^A - x^A_0)^2 = R^2, \quad (4,1)$$

při čemž x^A jsou pravouhlé kartézské souřadnice bodů v E_{n+1} . Sestrojme v každém bodě variety V_n , dané rovnicemi (1,1) normálu N^A [viz (1,4), (1,5), (1,6)]. Definujeme nyní v E_{n+1} funkce ${}^s x^A(\xi^\alpha)$ takto:

$${}^s x^A = x^A_0 + N^A(\xi^\alpha), \quad \begin{matrix} A = 1, 2, \dots, n + 1, \\ \alpha = 1, 2, \dots, n. \end{matrix} \quad (4,2)$$

Tím jsme přiřadili každému bodu variety V_n jednoznačně bod o souřadnicích ${}^s x^A$ v E_{n+1} . Ježto $N^A(\xi^\alpha)$ jest jednotkovým vektorem v E_{n+1} , je zřejmé

$$\sum_{A=1}^{n+1} ({}^s x^A - x^A_0)^2 = g_{AB} ({}^s x^A - x^A_0) ({}^s x^B - x^B_0) = g_{AB} N^A N^B = 1.$$

Odtud plyne ihned, že body o souřadnicích ${}^s x^A$ ($A = 1, 2, \dots, n + 1$) leží na jednotkové nadkouli v E_{n+1} .

Množinu bodů o souřadnicích ${}^s x^A$ [definovaných v (4,2)] nazýváme sférickým obrazem uvažovaného oboru nadplochy V_n (viz předpoklady v § 1).

Uložme si nyní úkol najít nutné a postačující podmínky pro to, aby rovnicemi (4,2) byla definována p -rozměrná varieta ve V_n , $0 \leq p \leq n$ (lokálně).

Věta (4,1). *Nutná a postačující podmínka pro to, aby sférickým obrazem variety V_n byla varieta p -rozměrná ($0 \leq p \leq n$) jest: hodnost matice*

$$(\partial_\alpha N^1, \partial_\alpha N^2, \dots, \partial_\alpha N^{n+1}) \quad (4,3)$$

jest p .⁹⁾

Důkaz: Věta (4,1) je speciálním případem věty: Nutná a postačující podmínka pro to, aby parametrickými rovnicemi

$$Y^A = Y^A(y^\alpha), \quad A = 1, 2, \dots, n+1; \quad \alpha = 1, 2, \dots, n$$

byla (lokálně) definována varieta p -rozměrná v E_{n+1} ($0 \leq p \leq n$), jest: hodnost matice

$$\left(\frac{\partial Y^1}{\partial y^\alpha}, \frac{\partial Y^2}{\partial y^\alpha}, \dots, \frac{\partial Y^{n+1}}{\partial y^\alpha} \right)$$

jest p (tedy v žádném bodě uvažovaného oboru není hodnost větší než p a aspoň v jednom bodě je rovna p)⁹⁾. Nutnost podmínky této věty plyne z lokální definice p -rozměrné variety, postačitelnost věty pak z teorie závislosti funkcí. V našem případě je

$$\frac{\partial Y^A}{\partial y^\alpha} \equiv \frac{\partial N^A}{\partial \xi^\alpha}.$$

Věta (4,2). *Hodnost matice (4,3) a matice*

$$(\partial_\alpha T_1, \partial_\alpha T_2, \dots, \partial_\alpha T_{n+1}) \quad (4,4)$$

jsou v každém bodě variety V_n (za platnosti předpokladů v § 1 vymezených) stejné.

Důkaz: Podle (1,5) je totiž $N^A = g^{AB} T_B$, kde

$$g_{AB} = \begin{cases} 1 & \text{pro } A = B \\ 0 & \text{pro } A \neq B \end{cases}$$

a tedy

$$\partial_\alpha N^A = g^{AB} \partial_\alpha T_B = g^{AA} \partial_\alpha T_A = \partial_\alpha T_A$$

v uvažovaném bodě variety V_n . Věta plyne zřejmě též z toho, že v E_{n+1} při kartézských pravoúhlých souřadnicích jsou kovariantní a kontravariantní složky vektorů stejné co do hodnoty.

Věta (4,3). *Nechť hodnost druhého metrického tensoru $h_{\alpha\beta}$ jest v nějakém bodě variety V_n rovna p ($0 \leq p \leq n$). Potom matice $(\partial_\alpha T_1, \partial_\alpha T_2, \dots, \partial_\alpha T_{n+1})$ má v tomtéž bodě variety V_n tutéž hodnost.*

Důkaz: Necht za prvé jest

a) $h_{\alpha\beta} = 0$ (t. j. $p = 0$). Potom podle (1,7) $B_\alpha^A \partial_\beta T_A = 0$. Avšak T_A

⁹⁾ Stačí zřejmě předpokládat, že aspoň v jednom bodě variety V_n je hodnost matice rovna právě p . Ze spojitosti plyne pak ihned, že existuje celé okolí onoho bodu, kde hodnost uvažované matice je rovněž p .

je řešením rovnic $B_{\alpha}^A T_A = 0$ (viz (1,4)). Nejobecnějším řešením rovnic předchozích jest $*T_A = kT_A$, kde $k = k(\xi^{\alpha})$ je skalár ve V_n . Odtud a z rovnic $B_{\alpha}^A \partial_{\beta} T_A = 0$ plyne existence vektoru k_{β} tak, že

$$\partial_{\beta} T_A = k_{\beta} T_A. \quad (4,5)$$

Poněvadž však (viz 1,4) $g^{AB} T_A T_B = 1$ a tedy

$$\partial_{\alpha} (g^{AB} T_A T_B) = 2g^{AB} T_A \partial_{\alpha} T_B = 0,$$

plyne odtud a z (4,5)

$$g^{AB} T_A \eta_{\alpha} T_B = k_{\beta} g^{AB} T_A T_B = k_{\beta} = 0,$$

z čehož vyplývá podle (4,5)

$$\partial_{\beta} T_A = 0.$$

Tedy: $h_{\alpha\beta} \equiv 0 \Rightarrow \partial_{\alpha} T_A \equiv 0$. Tím je případ $p = 0$ ověřen.

b) Nechť hodnota tensoru $h_{\alpha\beta}$ je v nějakém bodě variety V_n rovna 1 (t. j. $p = 1$). Pak aspoň jedna složka $h_{\alpha_1\beta_1}$ tensoru $h_{\alpha\beta}$ je různá od nuly. Podle (1,7) je však

$$h_{\alpha_1\beta_1} = B_{\alpha_1}^A \partial_{\beta_1} T_A \neq 0,$$

odkud plyne ihned, že $\partial_{\beta_1} T_A$ není pro každé A rovno nule. Je tedy hodnota matice (4,4) nejméně rovna 1 v uvažovaném bodě.

Podle Weingartenovy formule je (viz (1,10))

$$\partial_{\alpha} N^A = h_{\alpha\beta} a^{\beta\delta} B_{\delta}^A$$

a tedy

$$\partial_{[\alpha_1} N^{A_1} \partial_{\alpha_2]} N^{A_2} = h_{[\alpha_1|\beta_1|} h_{\alpha_2|\beta_2|} a^{\beta_1\delta_1} a^{\beta_2\delta_2} B_{\delta_1}^{A_1} B_{\delta_2}^{A_2} = 0,$$

neboť hodnota tensoru $h_{\alpha\beta}$ je podle předpokladu rovna 1. Má tedy matice (4,3) a podle věty (4,2) též matice (4,4) hodnota nejvýše 1. Je tedy hodnota matice (4,4) v uvažovaném bodě variety rovna právě jedné. Tím je případ $p = 1$ vyřízen.

c) Nechť tensor $h_{\alpha\beta}$ má v bodě variety V_n hodnota p ($2 \leq p \leq n$). Potom existuje aspoň jeden subdeterminant řádu p .

$$h_{[\alpha_1|\beta_1|} h_{\alpha_2|\beta_2|} \dots h_{\alpha_p|\beta_p|} \neq 0 \quad (4,6)$$

v uvažovaném bodě variety V_n . Pak jest podle (1,7)

$$0 \neq h_{[\alpha_1|\beta_1|} h_{\alpha_2|\beta_2|} \dots h_{\alpha_p|\beta_p|} = B_{\beta_1}^{A_1} B_{\beta_2}^{A_2} \dots B_{\beta_p}^{A_p} \partial_{[\alpha_1} T_{|A_1|} \partial_{\alpha_2} T_{|A_2|} \dots \partial_{\alpha_p]} T_{A_p}.$$

Odtud plyne ihned, že hodnota matice (4,4) je nejméně rovna p v uvažovaném bodě.

Z Weingartenovy formule (1,10) plyne pak

$$\begin{aligned} & \partial_{[\alpha_1} N^{A_1} \partial_{\alpha_2} N^{A_2} \dots \partial_{\alpha_p} N^{A_p} \partial_{\alpha_{p+1}} N^{A_{p+1}} = \\ & = h_{[\alpha_1|\beta_1|} h_{\alpha_2|\beta_2|} \dots h_{\alpha_p|\beta_p|} h_{\alpha_{p+1}|\beta_{p+1}|} a^{\beta_1\delta_1} a^{\beta_2\delta_2} \dots \\ & \dots a^{\beta_{p+1}\delta_{p+1}} B_{\delta_1}^{A_1} B_{\delta_2}^{A_2} \dots B_{\delta_{p+1}}^{A_{p+1}} = 0, \end{aligned}$$

neboť podle předpokladu je hodnost tensoru $h_{\alpha\beta}$ rovna p .¹⁰⁾ Z předechozího plyne však ihned, že hodnost matice (4,3) a tedy podle věty (4,2), též hodnost matice (4,4) je nejvýše rovna p v uvažovaném bodě.

Je tedy hodnost matice (4,4) rovna právě p . Tím je věta dokázána.

Věta (4,4). *Nutná a postačující podmínka pro to, aby sférickým obrazem variety V_n byla varieta p -rozměrná V_p ($0 \leq p \leq n$) jest: hodnost druhého metrického tensoru $h_{\alpha\beta}$ variety V_n jest rovna p aspoň v jednom bodě variety V_n ¹¹⁾ a v žádném bodě této variety není větší než p .*

Tato věta je bezprostředním důsledkem vět (4,1), (4,2), (4,3). Je-li totiž hodnost tensoru $h_{\alpha\beta}$ rovna p (aspoň v jednom bodě, v žádném bodě však není větší než p), potom podle věty (4,3) má matice $(\partial_\alpha T_1, \partial_\alpha T_2, \dots, \partial_\alpha T_{n+1})$ a tedy podle věty (4,2) matice $(\partial_\alpha N^1, \partial_\alpha N^2, \dots, \partial_\alpha N^{n+1})$ tutéž hodnost.

Podle věty (4,1) je pak sférický obraz variety V_n varieta p -rozměrná. Nechť je, za druhé, sférickým obrazem variety V_n varieta p -rozměrná V_p . Potom podle věty (4,1) má matice (4,3) a podle věty (4,2) též matice (4,4) hodnost p . Podle věty (4,3) pak tensor $h_{\alpha\beta}$ má rovněž hodnost p .

Věta (4,5). *Nutná a postačující podmínka pro to, aby sférickým obrazem variety V_n byla varieta p -rozměrná V_p ($0 \leq p \leq n$), jest:*

$$K \equiv_{(p+1)} K \equiv_{(p+2)} \dots \equiv_{(n)} K \equiv 0 \quad (4,7a)$$

(t. j. ve všech bodech uvažovaného oboru variety V_n) a aspoň v jednom bodě variety V_n je

$$K \neq_{(p)} 0. \quad (4,7b)$$

Důkaz: Dokážeme nejdříve nutnost podmínky věty. Nechť tedy sférickým obrazem variety V_n je p -rozměrná varieta V_p ($0 \leq p \leq n$). Potom, podle věty (4,4) je hodnost tensoru $h_{\alpha\beta}$ nejvýše rovna p v bodech variety V_n . Z definičních rovnic (2,2b), (2,4) pak plyne ihned $K \equiv_{(p+1)} K \equiv_{(p+2)} \dots \equiv_{(n)} K \equiv 0$ ve všech bodech variety V_n . Uvažujme nyní tři případy:¹²⁾

a) $p = 0$, t. j. $h_{\alpha\beta} \equiv 0$ ve všech bodech variety V_n . Potom podle definičních rovnic je $K = 1$ a tedy (4,7a), (4,7b) v tomto případě jsou správné.¹³⁾

¹⁰⁾ Je-li $p = n$, potom je zřejmá $h_{[\alpha_1|\beta_1], \dots, h_{\alpha_{n+1}|\beta_{n+1}}} \equiv 0$, neboť provádíme alternaci přes více než n indexů.

¹¹⁾ Zde platí analogická poznámka poznámce 9).

¹²⁾ Ze spojitosti funkce K plyne ihned, že existuje celá oblast, kde $K \neq 0$.

¹³⁾ Pro důkaz nutnosti podmínky (4,7b).

b) $p = 1$; potom aspoň v jednom bode variety V_n je hodnota tenzoru $h_{\alpha\beta}$ rovná jedné¹²). Nechť bod $x^A = x^A(\xi_0^\alpha)$ [viz (1,1)] je bodem variety V_n takovým, že pro něj hodnota tenzoru $h_{\alpha\beta}$ je rovná jedné. Potom v tomto bode aspoň jedna složka tohoto tenzoru je různá od nuly, t. j.

$$(h_{\alpha\beta})_{\xi_0^\nu} \neq 0 \quad (4,8)$$

aspoň pro jednu dvojici indexů α, β .

Pro stručnost nechť symbol $(\)_0$ značí hodnotu veličiny v závorce v uvažovaném bode $x^A = x^A(\xi_0^\alpha)$. Nechť $(n^\alpha)_0$ jsou jednotkové vzájemně kolmé vektory v hlavních směrech v uvažovaném bode.¹⁴) Vztáhneme nadplochu V_n k novým parametrům η^α takto zavedeným (což je lokálně možné)

$$\xi^\alpha = \xi_0^\alpha + (n^\alpha)_0 \eta^\alpha, \quad \alpha, \rho = 1, 2, \dots, n. \quad (4,9)$$

Zřejmě vyjadřují rovnice (4,9) v okolí bodu uvažovaného, ten v to počítaje, transformaci parametrů. Označme po levé straně hvězdičkou veličiny v parametrech η^α . Pak je v uvažovaném bode

$$(*a_{\alpha\beta})_0 = \left(\frac{\partial \xi^\nu}{\partial \eta^\alpha} \frac{\partial \xi^\mu}{\partial \eta^\beta} a_{\alpha\beta}(\xi) \right)_0 = (a_{\nu\mu})_0 (n^\nu)_\alpha (n^\mu)_\beta, \quad (4,10a)$$

$$(*h_{\alpha\beta})_0 = \left(\frac{\partial \xi^\nu}{\partial \eta^\alpha} \frac{\partial \xi^\nu}{\partial \eta^\beta} h_{\alpha\beta}(\xi) \right)_0 = (h_{\nu\mu})_0 (n^\nu)_\alpha (n^\mu)_\beta. \quad (4,10b)$$

Odtud plyne ihned podle (2,5)

$$(*a_{\alpha\beta})_0 = 0 \quad \text{pro } \alpha \neq \beta, \quad (4,11a)$$

z (4,10b, a) a (2,1) pak

$$(*h_{\alpha\beta})_0 = (h_{\nu\mu})_0 (n^\nu)_\alpha (n^\mu)_\beta = (s)_0 (a_{\nu\mu})_0 (n^\nu)_\alpha (n^\mu)_\beta = (s^* a_{\alpha\beta})_0$$

a odtud

$$(*h_{\alpha\beta})_0 = 0 \quad \text{pro } \alpha \neq \beta. \quad (4,11b)$$

Ježto podle předpokladu je hodnota tenzoru $h_{\alpha\beta}$ rovná jedné v uvažovaném bode, existuje v uvažovaném bode právě jediná složka

$$(*h_{ii})_0 \neq 0; \quad (*h_{\alpha\alpha})_0 = 0 \quad \text{pro } \alpha \neq i \quad (4,12a)$$

pro nějaký pevný index i ($i = 1, 2, \dots, n$). Ježto hodnota tenzoru $a_{\alpha\beta}$ je pro body variety V_n rovná n a tedy též hodnota $(*a_{\alpha\beta})_0$ je rovná n , plyne z (4,11a)

$$(*a_{\alpha\alpha})_0 \neq 0 \quad \text{pro } \alpha = 1, 2, \dots, n.$$

¹⁴) Takové vektory je možno vždy určit (viz začátek § 2).

Je tedy podle definičních rovnic (2,4), (2,2b)

$$(K)_0 = (*K)_0 = (*h_{\lambda_1}^{\lambda_1})_0 = (*h_{\lambda_1 \alpha} * a^{\alpha \lambda_1})_0;$$

odtud a z (4,12a), (4,12b) plyne (nesčítáno přes i)

$$(K)_0 = (*h_{ii} * a^{ii})_0 \neq 0.$$

Tím je nutnost podmínky (4,7b) pro případ $p = 1$ dokázána.

c) $2 \leq p \leq n$. Potom, podle věty (4,4), aspoň v jednom bodě $x^A = x^A(\xi_0^p)$ hodnost tensoru $h_{\alpha\beta}$ rovna p . Transformujme opět parametry v okolí uvažovaného bodu podle (4,9). Potom platí jednak vztahy (4,11a, b), (4,12b) a dále je právě p složek $*h_{i_1 i_1}, *h_{i_2 i_2}, \dots, *h_{i_p i_p}$ v uvažovaném bodě různé od nuly, tedy ne méně ani více. Pak je však podle definičních rovnic (2,2b), (2,4)

$$\begin{aligned} (K)_0 &= (*K)_0 = (*h_{\lambda_1}^{\lambda_1} * h_{\lambda_2}^{\lambda_2} \dots * h_{\lambda_p}^{\lambda_p})_0 = \\ &= (*h_{[\lambda_1 | \alpha_1] * h_{\lambda_2 | \alpha_2] \dots * h_{\lambda_p] \alpha_p} * a^{\alpha_1 \lambda_1} * a^{\alpha_2 \lambda_2} \dots * a^{\alpha_p \lambda_p})_0 = \\ &= (*h_{i_1 i_1} * h_{i_2 i_2} \dots * h_{i_p i_p} * a^{i_1 i_1} * a^{i_2 i_2} \dots * a^{i_p i_p})_0 \neq 0, \end{aligned} \quad (4,13)$$

při čemž nesčítáme přes indexy i_k ($k = 1, 2, \dots, p$). Tím je však nutnost podmínky (4,7b) pro případ $2 \leq p \leq n$ dokázána. Uvážíme-li ještě počátek důkazu (před případem a), máme tak nutnost podmínky věty dokázanu.

Pro důkaz postačitelnosti podmínky věty předpokládejme, že pro varietu V_n platí podmínky (4,7a), (4,7b), t. j., že pro varietu V_n je $K \equiv K \equiv \dots \equiv K \equiv 0$ (ve všech jejích bodech) a že existuje aspoň jeden bod ξ_0^{α} — označme jeho souřadnice ve V_n ξ_0^{α} — tak, že $(K)_0 \neq 0$.¹²⁾

Podle definičních rovnic (2,2b), (2,4) je tedy

$$0 \neq (K)_0 = \begin{cases} 1 & \text{pro } p = 0 \\ (h_{\alpha\beta} a^{\alpha\beta})_0 & \text{pro } p = 1 \\ (h_{[\alpha_1 | \beta_1} h_{\alpha_2 | \beta_2] \dots h_{\alpha_p] \beta_p} a^{\alpha_1 \beta_1} a^{\alpha_2 \beta_2} \dots a^{\alpha_p \beta_p})_0 & \text{pro } 1 < p \leq n. \end{cases}$$

Odtud plyne ihned, že v uvažovaném bodě (o souřadnicích ξ_0^{α}) je hodnost tensoru $h_{\alpha\beta}$ nejméně rovna p . Je tedy, jak plyne ze spojitosti, hodnost tensoru $h_{\alpha\beta}$ větší nebo rovna p v určitém dostatečně malém okolí uvažovaného bodu. Dokážeme nyní dále, že je-li $K \equiv K \equiv \dots \equiv K \equiv 0$ (ve všech bodech variety), pak ani v jednom bodě variety V_n nemůže být hodnost tensoru $h_{\alpha\beta}$ větší než p ($0 \leq p \leq n$). Důkaz provedeme nepřímo, t. j. budeme předpokládat, že za platnosti (4,7a) existuje aspoň jeden bod

o souřadnicích ξ_1^α ve V_n tak, že v něm hodnota tensoru $h_{\alpha\beta}$ je rovna s , při čemž $p < s$. V úvahu tedy připadá $0 < s \leq n$ při $p = 0$, $1 < s \leq n$ pro $p = 1$, atd. ($s = n$ pro $p = n - 1$).

Vztáhneme varietu V_n (v okolí bodu ξ_1^α) k parametrům η^α transformačním vztahem

$$\xi^\alpha = \xi_1^\alpha + (n^\alpha)_1 \eta^\rho, \quad \alpha, \rho = 1, 2, \dots, n. \quad (15)$$

Potom v bodě o souřadnicích ξ_1^α by platilo (což je analogická úvaha již jsme dříve dospěli ke vztahům (4,10a, b), (4,11a, b) — označíme-li vlevo nahoře hvězdičkou veličiny v tomto bodě

$$\begin{aligned} (*a_{\alpha\beta})_1 &= \begin{cases} 1 & \text{pro } \alpha = \beta, \\ 0 & \text{pro } \alpha \neq \beta, \end{cases} \\ (*h_{\alpha\beta})_1 &= \begin{cases} 0 & \text{pro } \alpha \neq \beta, \\ (s)_1 & \text{pro } \alpha = \beta. \end{cases} \end{aligned} \quad (4,15)$$

Ježto předpokládáme, že hodnota tensoru $h_{\alpha\beta}$ v bodě o souřadnicích ξ_1^α je právě s , kde $p < s \leq n$, má matice z tensoru $*h_{\alpha\beta}$ v uvažovaném bodě, tedy podle (4,16) matice

$$\left\| \begin{array}{ccccccc} (s)_1, & 0, & 0, & \dots, & 0 \\ 0, & (s)_1, & 0, & \dots, & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0, & 0, & 0, & \dots, & (s)_1 \end{array} \right\|$$

hodnotu právě s . To však znamená, že v uvažovaném bodě je právě s čísel $(s)_1, (s)_1, \dots, (s)_1$ z čísel $(s)_1, (s)_1, \dots, (s)_1$ od nuly různých. Není na újmu obecnosti předpokládat $(s)_1 \neq 0$ pro $i = 1, \dots, s$, $(s)_1 = 0$ pro $j = s + 1, \dots, n$. Podle (2,6) by však potom bylo v uvažovaném bodě

$$(K)_1 = (s \dots s)_1 \neq 0,$$

což je ve sporu s předpokladem, že $(K)_1 = 0$ pro $p < s \leq n$.

Tím je dokázáno, že za předpokladu (4,7a) nemůže být v žádném bodě variety hodnota tensoru $h_{\alpha\beta}$ větší než p ($0 \leq p \leq n$). Ježto existují body, v nichž je tato hodnota rovna p (jak jsme na začátku důkazu postačitelnosti podmínky věty ukázali, plyne odtud podle (4,4), že sférickým obrazem variety V_n za platnosti (4,7a), (4,7b) je varieta p -rozměrná, jak jsme chtěli dokázat.

¹⁵⁾ Podobného obratu jsme použili při důkazu nutnosti podmínky věty.

Ke konci tohoto paragrafu připojme ještě tuto větu:

Věta (4,6). *Nutná a postačující podmínka pro to, aby varieta V_n v E_{n+1} byla n -rozměrnou nadrovinou v E_{n+1} jest*

$$K \equiv 0 \text{ pro } r = 1, 2, \dots, n. \quad (4,17)$$

(r)

Důkaz: Nadrovinou euklidovského prostoru E_{n+1} (s kartézskými pravoúhlými souřadnicemi) nazýváme varietu n -rozměrnou V_n , pro jejíž body platí vztah

$$x^A C_A = C_0, \quad A = 1, 2, \dots, n + 1, \quad (4,18)$$

kde C_A jsou konstanty z nichž aspoň jedna je od nuly různá, C_0 rovněž konstanta.

Předpokládáme nejdříve, že varieta V_n v E_{n+1} je nadrovinou, t. j. že mezi souřadnicemi bodů této variety platí vztah (4,18). Není na újmu obecnosti předpokládáme-li $C_{n+1} \neq 0$. Potom můžeme (4,18) přepsat na tvar:

$$x^{n+1} = c_0 - \sum_{k=1}^n c_k x^k, \quad \text{kde } c_k = \frac{C_l}{C_{n+1}}, \quad l = 0, 1, 2, \dots, n.$$

Položíme-li

$$x^1 = \xi^1, \quad x^2 = \xi^2, \dots, x^n = \xi^n, \quad (4,19a)$$

potom jest podle (4,18)

$$x^{n+1} = c_0 - \sum_{k=1}^n c_k \xi^k.$$

Rovnice (4,19a, b) představují parametrické vyjádření nadroviny (4,18). Pro nadrovinu (4,19a, b) jest

$$B_\alpha^A = \begin{cases} 0 & \text{pro } A \neq \alpha, \quad A = 1, 2, \dots, n; \quad \alpha = 1, 2, \dots, n; \\ 1 & \quad \quad \quad A = \alpha, \quad A = 1, 2, \dots, n; \\ -c_\alpha & \text{pro } \quad \quad \quad A = n + 1, \quad \alpha = 1, 2, \dots, n, \end{cases} \quad (4,20)$$

tedy v každém případě je B_α^A konstantní. Podle definičních rovnic (1,4), (1,7) je pak

$$h_{\alpha\beta} = B_\alpha^A \partial_\beta T_A = -T_A \partial_\beta B_\alpha^A \equiv 0.$$

Z definičních rovnic (2,2b), (2,4) plyne pak ihned

$$K \equiv 0 \text{ pro } r = 1, 2, \dots, n. \quad (r)$$

Tím je nutnost podmínky věty dokázána.

Předpokládáme za druhé, pro důkaz postačitelnosti podmínky věty, že pro varietu V_n platí (4,17) v každém jejím bodě. Potom sférickým

obrazem této variety je varieta 0-rozměrná, t. j. bod (podle věty (4,5)). Podle věty (4,4) je pak pro tuto varietu

$$h_{\alpha\beta} \equiv 0, \quad \alpha, \beta = 1, 2, \dots, n \quad (4,21)$$

ve všech jejích bodech.¹⁶⁾

Podle definičních rovnic (1,7) můžeme podmínku (4,21) přepsat na tvar

$$B_{\alpha}^A \partial_{\beta} T_A \equiv 0. \quad (4,22)$$

Poněvadž v naší definici variety V_n předpokládáme, že hodnost matice $(B_{\alpha}^1, B_{\alpha}^2, \dots, B_{\alpha}^{n+1})$ jest n v každém jejím bodě, je rovnicemi (4,22) určeno řešení $\partial_{\beta} T_A$ až na multiplikatívni faktor. Avšak podle (1,4) je rovněž T_A řešením rovnic (4,22). Odtud plyne ihned existence elementu v , tak, že

$$\partial_{\beta} T_A = v_{\beta} \cdot T_A. \quad (4,23)$$

Podle poslední z rovnic (1,4) je $g^{AB} T_A T_B = 1$. Odtud a z (4,23) plyne pak ihned

$$v_{\beta} = g^{AB} T_B \partial_{\beta} T_A = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \xi^{\beta}} (g^{AB} T_A T_B) = 0,$$

t. j. $\partial_{\beta} T_A = 0 \Rightarrow T_A$ je konstantní. Avšak T_A vyhovuje (podle (1,4)) rovnicím

$$B_{\alpha}^A T_A = \frac{\partial x^A}{\partial \xi^{\alpha}} T_A = \frac{\partial}{\partial \xi^{\alpha}} (x^A T_A) = 0.$$

Odtud plyne

$$x^A T_A \equiv \text{konst.}$$

což je rovnice nadroviny v E_{n+1} .¹⁷⁾

Věta (4,7). *Je-li pro varietu V_n v E_{n+1} $K \equiv K \equiv 0$, potom je $K \equiv 0$ pro $r = 1, 2, \dots, n$.* (1) (2) (r)

Důkaz: Především víme z věty (4,6), že existují variety V_n v E_{n+1} pro něž $K \equiv 0$, $K \equiv 0$. Mějme tedy varietu V_n v E_{n+1} , pro niž (1) (2)

$$K \equiv K \equiv 0. \quad (4,24a)$$

Potom podle (2,6)

$$s_1 + s_2 + \dots + s_n \equiv 0,$$

$$s_{12} s_{13} + s_{13} s_{23} + \dots + s_{1n} s_{23} + s_{23} s_{34} + \dots + s_{2n} s_{34} + \dots + s_{n-1n} s_{n-1n} \equiv 0 \quad (4,24b)$$

¹⁶⁾ Jde o varietu ve smyslu zavedeném v § 1, t. j. uvažujeme platnost (aspoň lokální) předpokladů uvedených v § 1.

¹⁷⁾ Ježto $g^{AB} T_A T_B = 1$, není T_A identicky rovno nule.

ve všech bodech variety. Pak je

$$\begin{aligned} K^2 - 2K &= \underset{(1)}{(s + s + \dots + s)^2} - \underset{(2)}{2(s s + s s + \dots + s s)} = \\ &= \sum_{i,k=1}^n s_i s_k - \sum_{\substack{i,k=1 \\ i \neq k}}^n s_i s_k = \sum_{i=1}^n s_i^2. \end{aligned}$$

Odtud a z (4,24a) plyne pak ihned $\sum_{i=1}^n s_i^2 = 0$, což implikuje $s_i = 0$ pro $i = 1, 2, \dots, n$ a tedy, podle (2,6), $K \equiv 0$ pro $r = 1, 2, \dots, n$.

Příklad. Systém rovnic

$$\begin{aligned} x^1 &= R \sin \xi^1 \sin \xi^2 \sin \xi^3 \dots \sin \xi^p \\ x^A &= R \cos \xi^{A-1} \sin \xi^A \dots \sin \xi^p \quad \text{pro } A = 2, 3, \dots, p \quad (\text{A}) \\ x^{p+1} &= R \cos \xi^p \\ x^A &= \xi^{A-1} \quad \text{pro } A = p+2, p+3, \dots, n+1,^{18)} \end{aligned}$$

kde $R > 0$ je konstanta, $1 \leq p \leq n$, definuje (jsou-li x^A pravouhlé kartézské souřadnice v E_{n+1}) n -rozměrnou varietu V_n v E_{n+1} .

Omezíme-li se na $\xi^\alpha \in (0, \frac{1}{2}\pi)$ pro $\alpha \equiv 1, 2, \dots, p$, ξ^α libovolné pro $\alpha = p+1, p+2, \dots, n+1$, potom máme pro elementy $B_\alpha^A \equiv \frac{\partial x^A}{\partial \xi^\alpha}$:

$$\begin{aligned} B_\alpha^1 &= \begin{cases} 0 & \text{pro } p < \alpha \leq n \\ x^1 \cotg \xi^\alpha & \text{pro } 1 \leq \alpha \leq p \end{cases} \\ B_\alpha^A &= \begin{cases} 0 & \text{pro } 1 \leq \alpha < A-1, p < \alpha \leq n \\ -x^A \tg \xi^{A-1} & \text{pro } \alpha = A-1 \\ x^A \cotg \xi^\alpha & \text{pro } A \leq \alpha \leq p \end{cases} \quad \left. \vphantom{B_\alpha^A} \right\} \begin{array}{l} \text{a pro} \\ A = 2, 3, \dots, p. \end{array} \quad (\text{B}) \\ B_\alpha^{p+1} &= \begin{cases} 0 & \text{pro } \alpha \neq p, \\ -x^{p+1} \tg \xi^p & \text{pro } \alpha = p. \end{cases} \end{aligned}$$

$$B_\alpha^A = \begin{cases} 0 & \text{pro } \alpha \neq A-1 \\ 1 & \text{pro } \alpha = A-1 \end{cases} \quad \left. \vphantom{B_\alpha^A} \right\} \text{a pro } A = p+2, p+3, \dots, n+1.$$

Sestavíme-li elementy B_α^A , popsané v (B) v matici $(B_\alpha^1, B_\alpha^2, \dots, B_\alpha^{n+1})^{19)}$ a vezmeme-li n -řadový determinant této matice tak, že vynecháme první sloupec a označíme-li jeho hodnotu D_1 , potom se výpočtem ze vztahů (A), (B) snadno přesvědčíme, že

$$D_1 = (-1)^p R^p \sin \xi^1 \sin^2 \xi^2 \sin^3 \xi^3 \dots \sin^p \xi^p,$$

¹⁸⁾ Pro $p = n$ odpadá čtvrtá z definičních rovnic (A).

¹⁹⁾ Viz (1,2).

tedy za našich předpokladů (t. j. $\xi^\alpha \in (0, \frac{1}{2}\pi)$ pro $\alpha \equiv 1, \dots, p, R > 0$) je $D_1 \neq 0$; hodnost matice $(B_\alpha^1, B_\alpha^2, \dots, B_\alpha^{n+1})$ v uvažované oblasti je rovna n a tedy v této oblasti definují rovnice (A) varietu n rozměrnou.²⁰⁾ Pro první metrický tensor $a_{\lambda\mu}$ naší variety dostaneme ze vztahů (1,3), (B)

$$\begin{aligned} a_{\alpha\alpha} &= R^2 \sin^2 \xi^{\alpha+1} \sin^2 \xi^{\alpha+2} \dots \sin^2 \xi^p \text{ pro } \alpha = 1, \dots, p-1 \\ a_{pp} &= R^2 \\ a_{\alpha\alpha} &= 1 \text{ pro } \alpha = p+1, \dots, n+1 \\ a_{\alpha\beta} &= 0 \text{ pro } \alpha \neq \beta, \alpha, \beta = 1, \dots, n. \end{aligned} \quad (\text{C})$$

Po delším výpočtu dostaneme pro druhý metrický tensor $h_{\alpha\beta}$ [z definičních rovnic (1,7) a ze vztahů (1,4), (1,6), (B)]

$$\begin{aligned} h_{\alpha\beta} &= 0, \text{ je-li aspoň jeden index větší než } p. \\ h_{\alpha\beta} &= (-1)^{n-p} R^{-1} a_{\alpha\beta}. \end{aligned} \quad (\text{D})$$

[Tedy zřejmě $h_{\alpha\beta} = 0$ pro $\alpha \neq \beta$ podle (C)].

Ze vztahů (C), (D) a definičních rovnic (2,2b) plyne pak snadno

$$h_{\beta}^{\alpha} = \begin{cases} 0 & \text{pro } \beta > p, \alpha \text{ libovolné} \\ 0 & \text{pro každé } \alpha \neq \beta \\ (-1)^{n-p} R^{-1} & \text{pro } \alpha = \beta, 1 \leq \beta \leq p. \end{cases} \quad (\text{E})$$

Z (E) a z definičních rovnic (2,4) dostaneme

$$\begin{aligned} K_{(r)} &= (-1)^{(n-p)r} R^{-r} \binom{p}{r} \text{ pro } r = 1, 2, \dots, p \\ K_{(r)} &= 0 \text{ pro } r = p+1, \dots, n. \end{aligned} \quad (\text{F})$$

Z rovnic (F) plyne, že varieta V_n , definovaná rovnicemi (A) (s uvažovaným definičním oborem), má sférický obraz p -rozměrný. Snadnými limitními přechody a vhodnou transformací souřadnic se dá tento výsledek zobecnit na celý existenční obor funkcí x^{λ} definovaných v (A).

Z předchozího příkladu plynou ihned dva speciální případy:

a) pro $p = n$ dostaneme z rovnic (F)

$$K_{(r)} = \binom{n}{r} R^{-r} \text{ pro } r = 1, \dots, n.$$

n -tý skalár křivosti této variety je $K = R^{-n}$. Varieta je nadkoulí ve E_{n+1} .

²⁰⁾ Viz počátek důkazu věty (4,1).

b) Pro $n = 2, p = 1$ redukuje se rovnice (A) na tvar

$$x^1 = R \sin \xi^1, \quad x^2 = R \cos \xi^1, \quad x^3 = \xi^2,$$

což jsou rovnice pro rotační válec v E_3 . Zde je $K = 0$, $K = -R^{-1}$.²¹⁾
(2) (1)

5. Sférické skreslení hlavních vektorů a p - vektorů.

Další význam skalárů K .

(r)

Budiž dáno n funkcí proměnné t

$$\xi^\alpha = \xi^\alpha(t), \quad \alpha = 1, 2, \dots, n, \quad (5,1)$$

a nechť tyto funkce mají tyto vlastnosti

1. pro $t = t_0$ leží bod o souřadnicích $\xi_0^\alpha = \xi^\alpha(t_0)$ na varietě V_n , definované v (1,1);²²⁾

2. existuje otevřený interval (t_1, t_2) obsahující uvnitř bod t_0 , takže pro $t \in (t_1, t_2)$ existují spojitě derivace

$$v^\alpha = \frac{d\xi^\alpha}{dt}, \quad \alpha = 1, 2, \dots, n; \quad (5,2)$$

3. v bodě ξ_0^α je hodnota matice (v^1, v^2, \dots, v^n) rovna jedné.

Za těchto předpokladů představují rovnice (5,1), v dostatečně malém okolí bodu ξ_0^α křivku na nadploše V_n v E_{n+1} [V_n je definována rovnicemi (1,1)]. Tato křivka prochází bodem ξ_0^α a má v tomto bodě zcela určitou tečnu. Ze spojitosti funkcí v^α plyne existence tečny křivky ve všech jejích bodech v dostatečně malém okolí bodu ξ_0^α .

V dalším se omezíme na takové okolí bodu ξ_0^α ve V_n , aby tam platily jednak předpoklady z § 1, jednak hoření tři předpoklady 1, 2, 3.

V kartézských pravoúhlých souřadnicích v E_{n+1} je tedy rovnice křivky (1,1)

$$x^A = x^A[\xi^\alpha(t)], \quad A = 1, \dots, n+1; \quad \alpha = 1, \dots, n. \quad (5,3)$$

Sférický obraz křivky (5,3) je potom, podle (4,2),

$${}^s x^A = x^A + N^A[\xi^\alpha(t)]. \quad (5,4)$$

Každému bodu křivky (5,3) (v uvažovaném oboru) je tak jednoznačně přiřazen bod ${}^s x^A$ sférického obrazu křivky. Označíme-li v^A tečný vektor křivky (5,3) v E_{n+1} , ${}^s v^A$ tečný vektor jejího sférického obrazu (5,4) v E_{n+1} , pak je podle (5,3), (5,2), (1,2), (5,4), (1,10), (2,2b)

²¹⁾ Poslední vztah zdánlivě nesouhlasí (znamení!) se vztahem pro střední křivost. Příčina je v tom, že u mnohých autorů je na pravé straně v definiční rovnici (1,7) pro druhý metrický tensor variety znamení — (minus).

²²⁾ Máme na mysli neustále ten obor, kde platí předpoklady uvedené v § 1.

$$v^A = B_{\alpha}^A v^{\alpha}, \quad (5,5)$$

$${}^s v^A = (\partial_{\alpha} N^A) v^{\alpha} = B_{\beta}^A h_{\alpha}^{\beta} v^{\alpha}. \quad (5,6)$$

Pro míry vektorů v^A , ${}^s v^A$ dostaneme podle (1,12), (1,3), (5,5)

$$\begin{aligned} + \sqrt{m(v^A)} &= + \sqrt{g_{AB} v^A v^B} = + \sqrt{a_{\alpha\beta} v^{\alpha} v^{\beta}}, \\ + \sqrt{m({}^s v^A)} &= + \sqrt{g_{AB} {}^s v^A {}^s v^B} = + \sqrt{a_{\gamma\delta} h_{\alpha}^{\gamma} h_{\beta}^{\delta} v^{\alpha} v^{\beta}} = \\ &= + \sqrt{h_{\delta\alpha} a^{\delta\epsilon} h_{\epsilon\beta} v^{\alpha} v^{\beta}}. \end{aligned} \quad (5,5a)$$

Zavedeme-li ještě označení

$${}^s a_{\alpha\beta} = h_{\alpha\gamma} a^{\gamma\delta} h_{\delta\beta} = h_{\alpha}^{\delta} h_{\delta\beta} {}^{23}) \quad (5,7)$$

potom

$$+ \sqrt{m({}^s v^A)} = + \sqrt{{}^s a_{\alpha\beta} v^{\alpha} v^{\beta}}. \quad (5,5b)$$

Pro úhel vektorů ${}^A v$, ${}^s v^A$ (${}^s v^A$ není v uvažovaném bodě vektor nula) dostaneme z (1,13), (5,5), (1,3), (5,5a), (5,5b), (2,2b)

$$\cos\vartheta = \frac{g_{AB} B_{\alpha}^A v^{\alpha} B_{\gamma}^B h_{\beta}^{\gamma} v^{\beta}}{+ \sqrt{m(v^A)} \cdot m({}^s v^A)} = \frac{a_{\alpha\gamma} h_{\beta}^{\gamma} v^{\alpha} v^{\beta}}{+ \sqrt{m(v^A)} m({}^s v^A)},$$

tedy

$$\cos\vartheta = \frac{h_{\alpha\beta} v^{\alpha} v^{\beta}}{+ \sqrt{m(v^A)} m({}^s v^A)}. \quad (5,8)$$

(${}^s v^A$ je nenulový vektor).

Definice 2. *Sférickým skreslením tečného vektoru křivky (5,3) na ploše V_n v E_{n+1} (v bodě křivky) nazýváme skalár:*

$$\varkappa = \varepsilon \sqrt{\frac{m({}^s v^A)}{m(v^A)}} \quad (5,9)$$

kde $\varepsilon = \begin{cases} 1, & \text{je-li } \cos\vartheta \geq 0 \text{ nebo není-li } \cos\vartheta \text{ definováno} \\ -1, & \text{je-li } \cos\vartheta < 0. \end{cases}$

Poznámka: Je-li $\xi_0^{\alpha} = \xi^{\alpha}(t_0)$ bodem křivky (5,3), potom oblouk křivky od bodu $\xi_0^{\alpha} = \xi^{\alpha}(t_0)$ do bodu $\xi^{\alpha} = \xi^{\alpha}(t)$ jest

$$s = \int_{t_0}^t \sqrt{m(v^A)} dt.$$

Sférickým obrazem tohoto oblouku je pak oblouk křivky (5,4) v těchže mezích, t. j.

$$s_s = \int_{t_0}^t \sqrt{m({}^s v^A)} dt.$$

²³⁾ Je tedy ${}^s a_{\alpha\beta}$ metrickým tensorem sférického zobrazení.

Odtud plyne ihned

$$\lim_{t \rightarrow t_0} \frac{s_s}{s} = \lim_{t \rightarrow t_0} \sqrt{\frac{m(sv^A)}{m(v^A)}} = |x|_0.$$

Budiž nyní n^a , $a = 1, 2, \dots, n$, n jednotkových vzájemně kolmých vektorů v hlavních směrech v bodech variety V_n v E_{n+1} .²⁴⁾ Potom systémem obyčejných diferenciálních rovnic

$$\frac{d\xi^a}{d\sigma} = n^a(\xi^a), \quad a = 1, 2, \dots, n, \quad a \in 1, 2, \dots, n \quad (5,10a)$$

(podle existenčního teorému Cauchyova) je při daném bodě ξ_0^a a hlavním směru v něm $(n^a)_0$ jednoznačně (v dostatečně malém okolí bodu ξ_0^a) určena křivka $\overset{H}{\xi^a}$ ve V_n * $\xi^a = \xi^a(\sigma)$, která má vlastnosti 1, 2, 3 uvedené na počátku tohoto paragrafu a jejíž body mají v E_{n+1} kartézské pravoúhlé souřadnice

$$x^A = x^A[\xi^a(\sigma)], \quad A = 1, 2, \dots, n + 1.$$

Snadno se přesvědčíme z (5,10a), že parametr σ křivky (5,10b) je jejím metrickým obloukem. Tečný vektor této křivky leží (v každém bodě existenčního oboru) ve směru hlavním. Křivka (5,10b) se nazývá *křivkou hlavní*. Tímto způsobem můžeme dojít k n hlavním křivkám H , $a = 1, 2, \dots, n$, jdoucích bodem ξ_0^a variety V_n , definovaných v určitém okolí bodu ξ_0^a .

Věta (5,1). *Sférické zkreslení křivky hlavní (5,10b)²⁵⁾ je rovno příslušné hlavní křivosti s .*

Důkaz: Pro míru $m(n^a)$ plyne ihned podle (1,11) $m(n^a) = 1$; pro míru tečného vektoru ${}^s n^a$ sférického obrazu hlavní křivky $\overset{H}{\xi^a}$ dostaneme podle (5,5b), (5,7), (2,1)

$$+ \sqrt{m({}^s n^a)} = + \sqrt{h_{\alpha\gamma} a^\gamma \delta h_{\delta\beta} n^\alpha n^\beta} = + \sqrt{s n^\delta h_{\delta\beta} n^\beta} = \sqrt{(s)_a^2} = |s|_a.$$

Pro úhel ϑ vektorů n^a a ${}^s n^a$ v odpovídajících si bodech máme podle (5,8), (2,1)

²⁴⁾ Viz počátek § 2.

²⁵⁾ Místo „sférického zkreslení tečného vektoru“ uijeme stručnějšího označení „sférické zkreslení křivky v bodě“.

$$\cos \vartheta = \frac{h_{\alpha\beta} n^\alpha n^\beta}{\frac{a}{|s|} \frac{a}{a}} = \frac{s}{\frac{a}{|s|} \frac{a}{a}} = sgs; \quad (s \neq 0);$$

tedy pro sférické zkreslení κ křivky hlavní H [podle předchozího a podle (5,9)].

$$\frac{\kappa}{a} = \frac{s}{a} \quad (5,11)$$

Věta (5,2). *Hodnota skaláru K , definovaného v (2,4), v bodě nadplochy V_n je rovna součtu sférických zkreslení n ortogonálních hlavních čar v tomto bodě.*

Důkaz plyne ihned z věty (5,1) a vztahu (2,6).

Uvažujme nyní p hlavních čar H, H, \dots, H ($2 \leq p \leq n$) jdoucích bodem variety V_n s tečnými jednotkovými vektory $n^\alpha, i = 1, 2, \dots, p$, vzájemně kolnými. Složky těchto vektorů v E_{n+1} jsou podle (5,5)

$$n^A = B_{\alpha(i)}^A n^\alpha, \quad i = 1, 2, \dots, p. \quad (5,12)$$

Vektory n^A ($i = 1, 2, \dots, p$) tvoří v E_{n+1} p -vektor o složkách

$$\begin{matrix} n^{A_1} n^{A_2} \dots n^{A_p} \\ [1 \quad 2 \quad \dots \quad p] \end{matrix} \quad (5,13)$$

Pro modul tohoto p -vektoru dostaneme podle (1,14a) resp. (1,14b) resp. (1,14b)

$$\begin{aligned} m(p) &= g_{[A_1|B_1|A_2|B_2]} \dots g_{A_p]B_p} n^{A_1} n^{A_2} \dots n^{A_p} n^{B_1} n^{B_2} \dots n^{B_p} = \\ &= g_{[A_1|A_1|A_2|A_2]} \dots g_{A_p]A_p} (n^{A_1} n^{A_2} \dots n^{A_p})^2 = 1. \end{aligned}$$

Každému vektoru n^A ($i = 1, 2, \dots, p$) je jednoznačně přiřazen vektor ${}^s n^A$, tečný jednotkový vektor sférického obrazu křivky H v odpovídajícím bodě. Při sférickém zobrazení je pak p -vektoru (5,13) jednoznačně přiřazen p -vektor

$$\begin{matrix} {}^s n^{A_1} {}^s n^{A_2} \dots {}^s n^{A_p} \\ [1 \quad 2 \quad \dots \quad p] \end{matrix} \quad (5,15)$$

kde pro ${}^s n^A$ platí podle (5,6)

$${}^s n^A = B_{\beta(i)}^A h_{\alpha(i)}^\beta n^\alpha, \quad i = 1, 2, \dots, p. \quad (5,16)$$

Pro modul p -vektoru (5,15), označíme-li tento p -vektor symbolem ${}^s p$, dostaneme podle (1,14)b, (1,3), (5,16), (5,7), (2,1)

$$\begin{aligned}
m^{(sp)} &= g_{[\mathcal{A}_1|\mathcal{B}_1|g_{\mathcal{A}_2|\mathcal{B}_2}] \dots g_{\mathcal{A}_p]B_p} s n^{A_1} s n^{A_2} \dots s n^{A_p} s n^{B_1} s n^{B_2} \dots s n^{B_p} = \\
&g_{[\mathcal{A}_1|\mathcal{B}_1|g_{\mathcal{A}_2|\mathcal{B}_2}] \dots g_{\mathcal{A}_p]B_p} B_{\beta_1}^{A_1} B_{\beta_2}^{A_2} \dots B_{\beta_p}^{A_p} B_{\gamma_1}^{B_1} B_{\gamma_2}^{B_2} \dots B_{\gamma_p}^{B_p} n^{\alpha_1} n^{\alpha_2} \dots n^{\alpha_p} n^{\delta_1} n^{\delta_2} \dots n^{\delta_p} \cdot \\
&\cdot h_{\alpha_1}^{\beta_1} h_{\alpha_2}^{\beta_2} \dots h_{\alpha_p}^{\beta_p} h_{\delta_1}^{\gamma_1} h_{\delta_2}^{\gamma_2} \dots h_{\delta_p}^{\gamma_p} = a_{[\beta_1|\gamma_1|a_{\beta_2|\gamma_2}] \dots a_{\beta_p]\gamma_p} h_{\alpha_1}^{\beta_1} h_{\alpha_2}^{\beta_2} \dots h_{\alpha_p}^{\beta_p} \cdot \\
&\cdot h_{\delta_1}^{\gamma_1} h_{\delta_2}^{\gamma_2} \dots h_{\delta_p}^{\gamma_p} n^{\alpha_1} n^{\alpha_2} \dots n^{\alpha_p} n^{\delta_1} n^{\delta_2} \dots n^{\delta_p} = \\
&= h_{[\beta_1|\delta_1|h_{\beta_2|\delta_2}] \dots h_{\beta_p]\delta_p} h_{\alpha_1}^{\beta_1} h_{\alpha_2}^{\beta_2} \dots h_{\alpha_p}^{\beta_p} n^{\alpha_1} n^{\alpha_2} \dots n^{\alpha_p} n^{\delta_1} n^{\delta_2} \dots n^{\delta_p} = \\
&= h_{[\beta_1|\delta_1|h_{\beta_2|\delta_2}] \dots h_{\beta_p]\delta_p} s s \dots s n^{\beta_1} n^{\beta_2} \dots n^{\beta_p} n^{\delta_1} n^{\delta_2} \dots n^{\delta_p}.
\end{aligned}$$

Odtud plyne pak snadno

$$m^{(sp)} = (s s \dots s)_{12 \dots p}^2. \quad (5,17)$$

Pro míry p -vektorů (5,13), (5,15) plyne pak z (1,15), (5,14),

$$+ \sqrt{m(p)} = 1, \quad + \sqrt{m^{(sp)}} = |s s \dots s|_{12 \dots p}. \quad (5,18)$$

Pro úhel ϑ p -vektorů (5,13), (5,15) plyne z (1,16), (5,17), (5,18)

$$\begin{aligned}
\cos \vartheta &= \frac{g_{[\mathcal{A}_1|\mathcal{B}_1|g_{\mathcal{A}_2|\mathcal{B}_2}] \dots g_{\mathcal{A}_p]B_p} n^{A_1} n^{A_2} \dots n^{A_p} s n^{A_1} s n^{A_2} \dots s n^{A_p}}{|s s \dots s|_{12 \dots p}}, \quad (5,19a) \\
&s s \dots s \neq 0. \\
&12 \quad p
\end{aligned}$$

Pro čitatele na pravé straně v (5,19a) dostaneme podle (5,16), (1,3), (2,1), (5,12)

$$\begin{aligned}
&g_{[\mathcal{A}_1|\mathcal{B}_1|g_{\mathcal{A}_2|\mathcal{B}_2}] \dots g_{\mathcal{A}_p]B_p} n^{A_1} n^{A_2} \dots n^{A_p} s n^{A_1} s n^{A_2} \dots s n^{A_p} = \\
&= g_{[\mathcal{A}_1|\mathcal{B}_1|g_{\mathcal{A}_2|\mathcal{B}_2}] \dots g_{\mathcal{A}_p]B_p} B_{\alpha_1}^{A_1} B_{\alpha_2}^{A_2} \dots B_{\alpha_p}^{A_p} B_{\gamma_1}^{B_1} B_{\gamma_2}^{B_2} \dots B_{\gamma_p}^{B_p} h_{\beta_1}^{\gamma_1} h_{\beta_2}^{\gamma_2} \dots h_{\beta_p}^{\gamma_p} \cdot \\
&\cdot n^{\alpha_1} n^{\alpha_2} \dots n^{\alpha_p} n^{\beta_1} n^{\beta_2} \dots n^{\beta_p} = a_{[\alpha_1|\gamma_1|a_{\alpha_2|\gamma_2}] \dots a_{\alpha_p]\gamma_p} h_{\beta_1}^{\gamma_1} h_{\beta_2}^{\gamma_2} \dots h_{\beta_p}^{\gamma_p} \cdot \\
&\cdot n^{\alpha_1} n^{\alpha_2} \dots n^{\alpha_p} n^{\beta_1} n^{\beta_2} \dots n^{\beta_p} = h_{[\alpha_1|\beta_1|h_{\alpha_2|\beta_2}] \dots h_{\alpha_p]\beta_p} \cdot \\
&\cdot n^{\alpha_1} n^{\alpha_2} \dots n^{\alpha_p} n^{\beta_1} n^{\beta_2} \dots n^{\beta_p} = s s \dots s; \\
&12 \quad p \quad 12 \quad p \quad 12 \quad p
\end{aligned}$$

tedy podle předchozího a (5,19a)

$$\cos \vartheta = \frac{s s \dots s}{|s s \dots s|_{12 \dots p}} = \text{sg}(s s \dots s)_{12 \dots p} \text{ při } s s \dots s \neq 0. \quad (5,19b)$$

Definice 3. Buďtež $v^A, v^A, \dots, v^A, 2 \leq p \leq n$ lineárně nezávislé vektory definované v bodě variety V_n v E_{n+1} . Potom sférickým zkreslením p -vektoru o složkách v^A, v^A, \dots, v^A nazýváme skalár

$$\kappa(p) = \frac{\varepsilon \sqrt{m(p)}}{+ \sqrt{m(s p)}}, \quad (5,20a)$$

kde $+ \sqrt{m(p)}$ je mírou p -vektoru v^A, v^A, \dots, v^A , $+ \sqrt{m(s p)}$ je mírou p -vektoru $s v^A, s v^A, \dots, s v^A$ přiřazeného původnímu p -vektoru při sférickém zobrazení v příslušném bodě²⁶⁾ a dále

$$\varepsilon = \begin{cases} 1 & \text{je-li cosinus úhlu obou } p\text{-vektorů větší nebo roven nule,} \\ & \text{nebo není-li definován,} \\ -1 & \text{je-li cosinus úhlu obou } p\text{-vektorů menší než nula.} \end{cases} \quad (5,20b)$$

Věta (5,3). Buďtež H, H, \dots, H ($2 \leq p \leq n$) hlavní křivky (orthogonální) jdoucí bodem variety V_n , $n^{\alpha}, i = 1, 2, \dots, p$ jejich jednotkové tečné vektory v tomto bodě. Tyto tečné vektory definují v tomto bodě hlavní p -vektor ve složkách $n^{\alpha_1} n^{\alpha_2} \dots n^{\alpha_p}$. Sférické zkreslení tohoto hlavního p -vektoru jest

$$\kappa(p) = s s \dots s. \quad (5,21)$$

Důkaz: Z definice 3 a vztahů (5,18), (5,19b) plyne ihned (5,21).

Věta (5,4). Hodnota skaláru K ($1 \leq p \leq n$), definovaného v (2,4) v bodě nadplochy V_n v E_{n+1} je rovna součtu sférických zkreslení všech hlavních p -vektorů v tomto bodě utvořených z tečných vektorů n -hlavních čar (orthogonálních) jdoucích tímto bodem.

Důkaz plyne pro $p = 1$ z věty (5,2); pro $2 \leq p \leq n$ pak bezprostředně z věty (5,3) a vztahů (2,6).

6. Geometrický význam skaláru K .

Mějme n lineárně nezávislých vektorů

$$v^{\alpha}, v^{\alpha}, \dots, v^{\alpha}, \alpha = 1, 2, \dots, n, \quad (6,1)$$

²⁶⁾ viz (5, 6.)

definovaných v bodě variety V_n (vnořené v E_{n+1}). V E_{n+1} jsou pak složky těchto vektorů

$$v^A = B_{\alpha}^A v^{\alpha}, \text{ kde } A = 1, 2, \dots, n+1, \alpha = 1, 2, \dots, n. \quad (6,2)$$

Vektory v^A definují v uvažovaném bodě variety V_n n -vektor o složkách

$$\begin{matrix} v^{A_1} v^{A_2} \dots v^{A_n}, \\ [1 \quad 2 \quad \dots \quad n] \end{matrix} \quad (6,3)$$

kde A_i probíhá přirozená čísla od 1 do $n+1$.

Pro modul $m(n)$ n -vektoru (6,3) máme podle (6,2), (1,3), (1,14b)

$$\begin{aligned} m(n) &= g_{[A_1|B_1|} g_{A_2|B_2]} \dots g_{A_n|B_n} v^{A_1} v^{A_2} \dots v^{A_n} v^{B_1} v^{B_2} \dots v^{B_n} = \\ &= a_{[\alpha_1|\beta_1|} a_{\alpha_2|\beta_2]} \dots a_{\alpha_n|\beta_n} v^{\alpha_1} v^{\alpha_2} \dots v^{\alpha_n} v^{\beta_1} v^{\beta_2} \dots v^{\beta_n}. \end{aligned} \quad (6,4a)$$

Označíme-li

$$\left. \begin{aligned} [a_{\alpha\beta}] &= \text{determinant } n\text{-tého stupně ze složek prvního metric-} \\ &\text{kého tensoru variety } V_n, \\ [v] &= \text{determinant } \begin{matrix} v^{\alpha} v^{\alpha} \dots v^{\alpha}, \\ 1 \quad 2 \quad \dots \quad n \end{matrix} \end{aligned} \right\} (6,5)$$

pak z (6,4a) a z věty o násobení determinantů plyne snadno

$$m(n) = [a_{\alpha\beta}] \cdot ([v])^2. \quad (6,4b)$$

V uvažovaném bodě variety V_n jsou sférickým zobrazením vektorům v^A (viz (6,2)), $i = 1, 2, \dots, n$ přiřazeny vektory ${}^s v^A$ podle vztahů (5,6); tedy n -vektoru (6,3) je přiřazen n -vektor o složkách

$$\begin{matrix} {}^s v^{A_1} {}^s v^{A_2} \dots {}^s v^{A_n}, \\ [1 \quad 2 \quad \dots \quad n] \end{matrix} \quad (6,6)$$

pro jehož modul $m({}^s n)$ dostaneme z (1,14b), (5,6), (5,7)

$$\begin{aligned} m({}^s n) &= g_{[A_1|B_1|} g_{A_2|B_2]} \dots g_{A_n|B_n} {}^s v^{A_1} {}^s v^{A_2} \dots {}^s v^{A_n} {}^s v^{B_1} {}^s v^{B_2} \dots {}^s v^{B_n} = \\ &= a_{[\alpha_1|\gamma_1|} a_{\alpha_2|\gamma_2]} \dots a_{\alpha_n|\gamma_n} h_{\beta_1}^{\gamma_1} h_{\beta_2}^{\gamma_2} \dots h_{\beta_n}^{\gamma_n} h_{\delta_1}^{\alpha_1} h_{\delta_2}^{\alpha_2} \dots h_{\delta_n}^{\alpha_n} v^{\beta_1} v^{\beta_2} \dots v^{\beta_n} v^{\delta_1} v^{\delta_2} \dots v^{\delta_n} = \\ &= {}^s a_{[\delta_1|\beta_1|} {}^s a_{\delta_2|\beta_2]} \dots {}^s a_{\delta_n|\beta_n} v^{\delta_1} v^{\delta_2} \dots v^{\delta_n} v^{\beta_1} v^{\beta_2} \dots v^{\beta_n}. \end{aligned} \quad (6,7a)$$

Označíme-li

$[{}^s a_{\alpha\beta}] =$ determinant n -tého stupně z metrického (6,8) tensoru sférického zobrazení, potom můžeme s použitím věty o násobení determinantů a vzhledem k (6,5) psát

$$m({}^s n) = [{}^s a_{\alpha\beta}] \cdot ([v])^2. \quad (6,7b)$$

Dosaďme-li do (6,7b) za $([v])^2$ z (6,4b), dostaneme po úpravě

$$\frac{m^{(sn)}}{m(n)} = \frac{[{}^s a_{\alpha\beta}]}{[a_{\alpha\beta}]} \quad (6,9a)$$

Ježto $a_{\alpha\beta} a^{\beta\gamma} = \delta_{\alpha}^{\gamma}$, plyne odtud ihned $\|a^{\alpha\beta}\| = (\|a_{\alpha\beta}\|)^{-1}$, takže můžeme (6,9a) psát též ve tvaru

$$\frac{m^{(sn)}}{m(n)} = [{}^s a_{\alpha\beta}] \cdot [a^{\alpha\beta}]. \quad (6,9b)$$

Podle (5,7) a z věty o násobení determinantů dostaneme snadno

$$[{}^s a_{\alpha\beta}] \cdot [a^{\alpha\beta}] = [h_{\alpha\gamma}] \cdot [h_{\beta}^{\gamma}] \cdot [a^{\alpha\beta}] = ([h_{\beta}^{\gamma}])^2. {}^{27)}$$

Ježto determinant $\|h_{\beta}^{\gamma}\|$ můžeme psát též v jiném označení $h_{\lambda_1}^{\lambda_1} h_{\lambda_2}^{\lambda_2} \dots h_{\lambda_n}^{\lambda_n}$, plyne z předchozího a ze vztahů (2,4), (6,9b)

$$\frac{m^{(sn)}}{m(n)} = \binom{K}{(n)}^2.$$

Odtud a z definice 3 plyne ihned tato věta:

Věta (6,1). *Sférické skreslení libovolného nenulového n -vektoru v bodě variety V_n vnořené v E_{m+1} je v absolutní hodnotě rovno hodnotě $|K|$ v tomto bodě.*

Speciální případ věty (6,1) nás vede k názorné geometrické interpretaci skaláru $\binom{K}{(n)}$, jež je zobecněním známého případu $n = 2$ (t. j. pro plochu v E_3).

Nechť nadplocha V_n vnořená v E_{n+1} je definována parametrickými rovnicemi (1,1). V libovolném bodě variety V_n uvažujme n -vektor, vytvořený elementárními tečnými vektory $\delta_{(i)}^{\xi^{\alpha}}$, $i = 1, 2, \dots, n$ parametrických křivek v tomto bodě. Elementární tečný vektor $\delta_{(i)}^{\xi^{\alpha}}$ i -té parametrické křivky má tedy složky ve V_n

$$\delta_{(i)}^{\xi^{\alpha}} = \begin{cases} 0 & \text{pro } \alpha \neq i, \\ d\xi^i & \text{pro } \alpha = i. \end{cases} \quad (6,10)$$

Pro uvažovaný n -vektor dostaneme z (6,10), (6,4b), (6,7b), (6,5)

$$\begin{aligned} \text{a) } m(n) &= [a_{\alpha\beta}] (d\xi^1 d\xi^2 \dots d\xi^n)^2, \\ \text{b) } m^{(sn)} &= [{}^s a_{\alpha\beta}] (d\xi^1 d\xi^2 \dots d\xi^n)^2. \end{aligned} \quad (6,11)$$

²⁷⁾ Zde nesčítáme nikde přes vyznačené indexy. Jde o součin determinantů, kde indexy označují jen tensor, z jehož složek je determinant vytvořen.

V uvažovaném případě nazýváme

+ $\sqrt{m^{(n)}}$ elementem nadplochy V_n ,

+ $\sqrt{m^{(s)n}}$ elementem sférického obrazu nadplochy a značíme v tomto

pořadí dP , ${}^s(dP)$; tedy

$$\begin{aligned} \text{a) } dP &= + \sqrt{[a_{\alpha\beta}]} \cdot |d\xi^1 d\xi^2 \dots d\xi^n|, \\ \text{b) } {}^s(dP) &= + \sqrt{[{}^s a_{\alpha\beta}]} \cdot |d\xi^1 d\xi^2 \dots d\xi^n|. \end{aligned} \quad (6,12)$$

Z (6,11), (6,12), definice 3 a věty (6,1) plyne pak ihned

$$\frac{{}^s(dP)}{dP} = \underset{(n)}{|K|}.$$

Výsledek (6,13) můžeme vysloviti takto:

Věta (6,2). *Element nadplochy a element jejího sférického obrazu jsou vázány vztahem*

$${}^s(dP) = \underset{(n)}{\vartheta} K dP, \quad \vartheta = \underset{(n)}{\text{sg} K}.$$