Časopis pro pěstování matematiky

Miloš Zlámal

Nelineární vynucené oscilace

Časopis pro pěstování matematiky, Vol. 77 (1952), No. 1, 53--64

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/117017`

NELINEÁRNÍ VYNUCENÉ OSCILACE

MILOŠ ZLÁMAL, Brno.

(Došlo dne 20. června 1951.) 517.9

V článku se pojednává o posledních výsledcích studia obyčejné diferenciální rovnice druhého řádu nelineární [viz (3)], která popisuje t. zv. vynucené oscilace. Takové oscilace vznikají na př. v elektronových lampách a proto jejich studiu je věnována velká pozornost.

Dopadá-li jednoduché sinusové vlnění o kruhové frekvenci Ω a tedy periodě $\frac{2\pi}{\Omega}$ na lineární oscilátor, rozkmitá se tento s touž periodou. Vznikající kmity nazýváme vynucené. Matematicky je tento děj popsán lineární diferenciální rovnicí

$$\ddot{x} + 2b\dot{x} + \omega^2 x = a \sin \Omega t, \tag{1}$$

kde tečka značí derivaci podle času t a $b > 0$ je konstanta útlumu. Je-li $b^2 < \omega^2$, pak obecné řešení je tvaru

$$x = C e^{-bt} \sin(\omega_1 t + \gamma) + A \sin(\Omega t + \varphi) \tag{2}$$

kde

$$\omega_1 = \sqrt{\omega^2 - b^2}, \quad A = \frac{a}{\sqrt{(\omega^2 - \Omega^2)^2 + 4b^2\Omega^2}}.$$

Vidíme tedy, že d. r. (1) má jediné periodické řešení, které dostaneme pro $C = 0$. To jsou zmíněné vynucené oscilace. Kromě toho, poněvadž $e^{-bt} \to 0$ pro $t \to +\infty$, každé jiné řešení k tomuto konverguje při $t \to + +\infty$. Prakticky to znamená, že po dostatečně dlouhé době (u elektrických okruhů v krátkém čase) lineární oscilátor nezávisle na počátečních podmínkách vykonává jen vynucené oscilace. Stejný výsledek dostaneme i v případě $b^2 \geq \omega^2$.

Lineární oscilátor je ovšem případ hodně idealisovaný a v praksi se vyskytují oscilátory, které se nedají linearisovat, t. j. jejich kmitání se nedá popsat lineární d. r. (1), nýbrž nelineární d. r. Tato nelineární d. r. je obyčejně tvaru

$$\ddot{x} + f(x, \dot{x})\,\dot{x} + g(x) = p(t), \tag{3}$$

kde $p(t)$ je periodická funkce času. V poslední době počínaje jednou

Lefschetzovou prací [1] se objevila řada matematických pojednání zabývajících se d. r. (3). Úkolem tohoto referáru je pojednat o methodách a hlavních výsledcích těchto prací. Předem však podotýkám, že nelineárními vynucenými oscilacemi se zabývali už dříve zejména *Van der Pol*, *Krylov*, *Bogoljubov*, *Mandelstam* a *Papalexi*. Společným znakem jejich prací je předpoklad, že nelineární členy v d. r., definující tyto oscilace, obsahují malý parametr jako koeficient. Nebudu však o těchto pracích referovat, poněvadž jsou staršího data a knižně zpracovány (viz [2], [3]).

Přistupme nyní k věci. Máme se, jak bylo řečeno, zabývat nelineárními vynucenými oscilacemi definovanými d. r. (3), čili jinými slovy periodickými řešeními d. r. (3). První otázka, která se naskýtá, je, *zda uvedená rovnice vůbec má periodické řešení*, čili lépe řečeno, za jakých podmínek je má. To je problém, který první řešil *Lefschetz* [1] a o kterém se zmíním šířeji, poněvadž dnes už máme celkem dosti obecné postačující podmínky pro funkce $f(x, y)$ a $g(x)$, aby d. r. (3) měla periodické řešení. Druhá otázka je *problém stability*. Pro fysika totiž samotná existence per. řešení nic neznamená, poněvadž nestabilní řešení je fysikálně totéž jako žádné řešení. Výsledky týkající se stability jsou však podstatně skromnější. Třetí otázkou je *problém analytického* (byť i přibližného) *vyjádření*. Zatím všam máme methody k analytickému výpočtu jen v případech, že v rovnici se vyskytuje malý parametr. To jsou zmíněné methody *Van der Pola*, *Krylova*, *Bogoljubova*, *Mandelstama* a *Papalexiho*.

Při problému existence periodického řešení d. r. (3) hraje velkou úlohu *transformační methoda* v theorii d. r. prvně použitá *Poincarém* a kterou nejdříve vyložím. Uvažujme systém dvou rovnic

$$\dot{x} = F(x, y, t), \ \dot{y} = G(x, y, t), \tag{4}$$

kde $F(x, y, t)$ a $G(x, y, t)$ jsou definovány a spojité pro $-\infty < x < +\infty$, $-\infty < y < +\infty$, $-\infty < t < +\infty$, splňují Lipschitzovu podmínku a jsou periodické s periodou L vzhledem k času t. Rovnici (3) můžeme snadno přepsat do tvaru (4). Stačí položit $\dot{x} = y$ a máme

$$\dot{x} = y, \ \dot{y} = -f(x, y)\, y - g(x) + p(t).$$

Definujme nyní transformaci T roviny (xy) na sebe takto: Z bodu $P_0(x_0, y_0)$ roviny $t = 0$ trojrozměrného prostoru (x, y, t) vychází jediné řešení systému (4), které v čase $t = L$ se nachází v nějakém bodě $P_1(x_1, y_1)$ roviny $t = L$. Pak bodu P_0 přiřadíme bod P_1, tedy $TP_0 = P_1$. Tato transformace je topologická. Neboť na základě předpokládané Lipschitzovy podmínky jsou řešení systému (4) jednoznačně určena počátečními podmínkami, takže transformace T je prostá a z věty o spojité závislosti řešení systému d. r. na počátečních podmínkách plyne, že je spojitá. Totéž však zřejmě platí o inversní transformaci

T^{-1}. Ukážeme nyní, že pevnému bodu této transformace odpovídá periodické řešení systému (4) s periodou L. Nechť $x(t)$, $y(t)$ je řešení systému (4) a nechť $x(0) = x(L)$, $y(0) = y(L)$. $\bar{x}(t) = x(t + L)$, $\bar{y}(t) = y(t + L)$ je rovněž řešením systému (4), neboť

$$\frac{\mathrm{d}\bar{x}(t)}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}x(t + L)}{\mathrm{d}t} = F(x(t + L), y(t + L), t + L) =$$

$$= F(x(t + L),\ y(t + L), t) = F(\bar{x}(t), \bar{y}(t))$$

a podobně pro $\bar{y}(t)$.[1]) Podle předcházejícího $\bar{x}(0) = x(0)$, $\bar{y}(0) = y(0)$, takže z jednoznačnosti řešení plyne $\bar{x}(t) \equiv x(t), \bar{y}(t) \equiv y(t)$, t. j. $x(t + L) = x(t)$, $y(t + L) = y(t)$. Zřejmý je také význam T^nP. Je-li $P = (x_0, y_0)$ a $x(0) = x_0$, $y(0) = y_0$, je $T^nP = (x(nL), y(nL))$.

Nyní, abychom dokázali existenci periodického řešení systému (4) s periodou L, stačí na př. ukázat, že existuje jednoduše souvislá oblast D ohraničená jednoduchou uzavřenou křivkou C, jejíž uzávěr je transformací T zobrazen do sebe, t. j. $T(\bar{D}) \subset \bar{D}$. Pak totiž podle *Brouwerovy* věty o pevném bodu (viz na př. *Lefschetz*, Introduction to topology, str. 117) má transformace T aspoň jeden pevný bod.

Lefschetz, který první použil uvedené methody, zvolil za C jistou elipsu. Výsledek *Lefschetzův* značně zlepšil *Levinson* [4], který křivku C volil komplikovanějším způsobem. Dokázal, že následující podmínky stačí k existenci periodického řešení d. r. (3):

$$f(x, y) > m > 0 \text{ pro } |x| > a,\ |y| > a \text{ a jinak } f(x, y) > -M^2, \quad (5)$$

$$xg(x) > 0 \text{ pro } |x| > a, \lim_{x \to +\infty} |g(x)| = \infty \text{ a } \lim_{x \to +\infty} \frac{g(x)^1}{\int_0^x g'(t)\,\mathrm{d}t} = 0.$$

Levinson [5] udal ještě jinou methodu pro důkaz existence periodického řešení u systémů, které nazývá systémy třídy D. Další podobná methoda pochází od *Cartwright* a *Littlewooda* [6], [7]. Je složitější než prve uvedená, avšak podává obecnější výsledky. Uvedu její hlavní rysy. Skládá se ze dvou částí: analytické a topologické. V analytické části se dokáže, že za jistých podmínek každé řešení d. r. (3) splňuje nerovnost

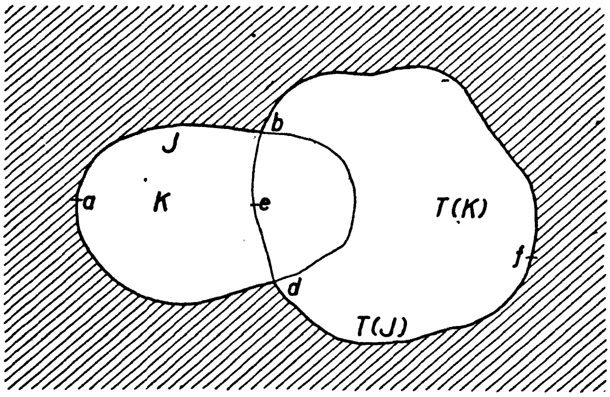
$$x^2(t) + y^2(t) < R_0^2 \quad (6)$$

od jistého t počínaje, kteréžto t závisí na počátečních podmínkách příslušného řešení. Při tom R_0 je konstanta nezávislá na počátečních podmínkách. Na př., máme-li rovnici (1), je, jak se z (2) snadno dokáže, od jistého t počínaje $x^2(t) + x^2(t) < 2(1 + \Omega^2) A^2$. Postačující podmínky zaručující (6) jsou tyto: existují kladné konstanty a, m_1, m_2, m_3 tak, že

[1]) Obecněji platí a stejně se dokáže, že pro n celé, je $x(t + nL)$, $y(t + nL)$ rovněž řešením.

$$f(x, y) > m_1 \text{ pro } |x| > a,\ |y| > a \text{ a jinak } f(x, y) > -m_2,$$
$$g(x) \operatorname{sign} x > m_3 \text{ pro } |x| > a, \tag{7}$$
$$\int_0^L p(t)\, \mathrm{d}t = 0$$

(poslední předpoklad lze vypustit, když předpokládáme $m_3 > \frac{|P_0|}{L}$, kde $P_0 = \int_0^L p(t)\, \mathrm{d}t$). Jsou to zřejmě obecnější podmínky než Levinsonovy. Důkaz jejich postačitelnosti není sice v jednotlivostech těžký, avšak v celku není jednoduchý a je dlouhý. A nyní z tohoto analytického



Obr. 1.

faktu cestou již čistě topologickou dokážeme existenci pevného bodu transformace T.

Jedno pomocné topologické lemma však ještě uvedeme bez důkazu:

Nechť K je oblast ohraničená jednoduchou uzavřenou křivkou J. Jestliže $K \,.\, T(K) \neq 0$, pak hranice Γ_m neohraničené komponenty U_m komplementu součtu $J + T(J) + \ldots + T^m(J)$ je jednoduchá uzavřená křivka, jejíž vnitřek Δ_m obsahuje $K + T(K) + \ldots + T^m(K)$ (t. j. vnitřky J, $T(J), \ldots, T^m(J)$). Při tom $\Gamma_m \subset J + T(J) + \ldots + T^m(J)$.

K vůli lepšímu pochopení je pro

$m = 1$ nakreslen obr. 1, kde křivka *abcda* je J, *edfbe* $T(J)$, silně vytažená čára Γ_1 a vyčárkovaná neohraničená část roviny neohraničená komponenta U_1.

Nyní z (6) plyne, že je-li $P = (x(0), y(0))$ a značí-li K_0 vnitřek kružnice $x^2 + y^2 = R_0^2$, je od jistého $n_0(P)$počínaje $T^n P \in K_0$. Nechť $R > R_0$

a K značí vnitřek kružnice $x^2 + y^2 = R^2$. Nechť $n_1(P)$ je první $n \geqq 1$, pro které $T_n P$ leží v K_0 [toto $n_1(P)$ nemusí míti ovšem vlastnost, že pro všechna $n \geqq n_1$ je $T^n P \in K_0$]. Z *Heine-Borel-Lebesgueova* theorému plyne, že existuje $N > 0$ takové, že $n_1(P) \leqq N$ pro $P \in \overline{K}$, neboť na základě věty o spojité závislosti řešení na počátečních podmínkách existuje ke každému P takové okolí $O(P)$, že pro $Q \in O(P)$ je $n_1(Q) \leqq \leqq n_1(P)$. Dále $K_0 \, . \, T(K_0) \neq 0$. Neboť jinak by z $T^n P \in K_0$ plynulo $T(T^n P) = T^{n+1} P \in K_0$, což je spor pro každé pevné P a $n \geqq n_0(P)$. Jelikož $K \supset K_0$, je $K \, . \, T(K) \neq 0$, takže můžeme použít předcházejícího lemma; použijeme je pro $m = N - 1$. Nechť tedy U_{N-1} je neohraničená komponenta komplementu součtu $J + \ldots + T^{N-1}(J)$, $\Gamma_{N-1} = \Gamma$ její hranice (je to jednoduchá uzavřená křivka) a $\Delta_{N-1} = \Delta$ vnitřek Γ. Platí

$$\Delta \supset K + T(K) + \ldots + T^{N-1}(K) \tag{8}$$

$$\Gamma \subset J + T(J) + \ldots + T^{N-1}(J). \tag{9}$$

Z (8) plyne $\Delta \supset K \supset K_0$. Dále je $\Delta \supset T^N(\overline{K})$. Neboť když $P \in \overline{K}$, je $T^n P = T^{N-n_1(P)}(T^{n_1(P)} P)$ $(T^{n_1(P)} P \in K_0 \subset K)$ a $0 \leqq N - n_1(P) < N$. Proto $\Delta \supset T^N(J)$. Z (8) plyne rovněž $\overline{\Delta} \supset \overline{K} + T(\overline{K}) + \ldots + T^{N-1}(\overline{K}) \supset \supset J + T(J) + \ldots + T^{N-1}(J)$, a z (9)

$$T(\Gamma) \subset T(J + \ldots + T^{N-1}(J)) = T(J) + \ldots + T^N(J) \subset \overline{\Delta}.$$

Poněvadž T je topologická transformace, plyne z $T(\Gamma) \subset \overline{\Delta}$

$$T(\overline{\Delta}) \subset \overline{\Delta}.$$

To podle *Brouwerovy* věty o pevném bodu stačí k existenci pevného bodu transformace T, který ovšem leží v $\overline{\Delta}$.

Další pozoruhodný výsledek pochází od *Massery* [8]. Je to následující theorém:

Nechť všechna řešení systému (4) existují v intervalu $\langle 0, \infty)$ a nechť aspoň jedno je ohraničené. Pak existuje aspoň jedno periodické řešení systému (4) s periodou L.

Při důkaze *Massera* používá tuto upravenou *Brouwerovu větu:* Nechť G je jednoduše souvislá otevřená rovinná množina a T topologické zobrazení G do sebe, $T(G) \subset G$. Jestliže T zachovává smysl a jestliže existuje bod $X \in G$ a částečná posloupnost posloupnosti $\{T^n X_0\}$, která konverguje k bodu z G, pak T má pevný bod.

Důkaz *Masserovy* věty nyní plyne bezprostředně. Za G vezmeme celou rovinu. Poněvadž řešení existují v celém intervalu $(0, \infty)$, je G zobrazena transformací T do sebe. T zachovává smysl, poněvadž je to isotopie. Za X_0 stačí zvolit bod, ze kterého vychází ohraničené řešení. Pak posloupnost $\{T^n X_0\}$ je ohraničená, takže má konvergentní částečnou posloupnost.

Vidíme, že *Masserovy* předpoklady jsou slabší než *Cartwright-Littlewoodovy*, důkaz je ale velmi jednoduchý, ovšem opírá se o *Brouwerovu* větu. Přes to methoda *Cartwright-Littlewooda* nepostrádá na ceně, poněvadž, jak uvidíme dále, získáme pomocí ní další cenné informace o vlastnostech transformace T.

Jako poslední výsledek patřící do problematiky existence periodického řešení uvedu větu *Langenhop-Farnellovu* [9]. Tito dva autoři se nejdříve zabývali d. r.

$$\ddot{x} + a\dot{x} + x + \tfrac{1}{2}x^2 = \tfrac{1}{2}k \cos\omega t, \quad a > 0, \tag{10}$$

kde k je parametr. Ukázali, že je-li k v absolutní hodnotě dostatečně malé, lze konstruovat jednoduše souvislou oblast ohraničenou jednoduchou uzavřenou křivkou, jejíž uzávěr je transformací T zobrazen do sebe. Jinými slovy ukázali, že d. r. (10) má periodické řešení pro k v absolutní hodnotě dostatečně malé. Pak přenesli svou methodu na obecnější problém a dokázali:

Diferenciální rovnice

$$\ddot{x} + f(x)\,\dot{x} + g(x) = kp(t),$$

kde $f(x)$, $g(x)$ a $p(t)$ jsou analytické funkce a $p(t)$ periodická s periodou L, má pro k v absolutní hodnotě dostatečně malé periodické řešení s periodou L v okolí bodu $x = x_0$, $\dot{x} = 0$, pro který $g(x_0) = 0$, $g'(x_0) > 0$ a $f(x_0) \neq 0$.

Předpoklady *Langenhop-Farnellovy* týkající se funkcí $f(x)$ a $g(x)$ jsou tedy povahy lokální, omezují se jen na vlastnosti funkcí $f(x)$ a $g(x)$ v bodě x_0. Přesto stačí zaručit existenci periodického řešení, když pravá strana je v absolutní hodnotě dostatečně malá.

Než přejdeme k otázkám stability, zmíníme se ještě o nejdůležitějších vlastnostech transformace T a o klasifikaci pevných bodů. Budeme v dalším předpokládat, že T má tu vlastnost, že $T^nP \in K_0$ pro $n \geq n_0(P)$. To je splněno na př. za podmínek (7). Ukázali jsme, že existuje obor Δ ohraničený jednoduchou uzavřenou křivkou Γ takový, že $T(\bar{\Delta}) \subset \bar{\Delta}$. Z toho plyne $T^2(\bar{\Delta}) \subset T(\bar{\Delta})$, $T^3(\bar{\Delta}) \subset T^2(\bar{\Delta}), \ldots$, t. j. $\bar{\Delta} \supset \supset T(\bar{\Delta}) \supset T^2(\bar{\Delta}) \supset T^3(\bar{\Delta}) \supset \ldots$, takže $M = \prod_{n=1}^{\infty} T^n(\bar{\Delta})$ je neprázdná kompaktní souvislá množina. Při tom M je invariantní vůči T, neboť $T(M) = T(\prod_{n=1}^{\infty} T^n(\Delta)) = \prod_{n=1}^{\infty} T^{n+1}(\bar{\Delta}) = M$. Snadno se dá dokázat, že M je maximální invariantní množina, že její komplement je jednoduše souvislý, přidáme-li do roviny (x, y) bod v nekonečnu a že $T^nP \to M$ při $n \to \infty$ pro každý bod P roviny (x, y) vyjímaje bod v nekonečnu.

Transformace T rovněž definuje v rovině (x, y) vektorové pole. Každému bodu P_0 můžeme totiž přiřadit vektor určený body P_0 a $P_1 =$

$= TP_0$. Je-li P_0 pevný bod transformace T, je příslušný vektor roven nule, jinak je od nuly různý. Nyní máme-li nějakou orientovanou uzavřenou jednoduchou křivku, na které neleží žádný pevný bod, pak při oběhu bodu P_0 po křivce učiní vektor $\overrightarrow{P_0P_1}$ celý počet otoček, poněvadž se vrátí do počáteční polohy. Počet otoček nazýváme indexem křivky. Deformujeme-li křivku spojitě, aniž by při tom přešla přes nějaké pevné body, mění se index spojitě, t. j. poněvadž nabývá jen celočíselných hodnot, nezmění se. To nám umožňuje definovat index pevného bodu jako index dostatečně malé kružnice se středem v pevném bodě. Dokažme ještě, že index křivky Γ, která je hranicí Δ, je $+ 1$. $T(\Gamma)$ leží v $\overline{\Delta}$. Zobrazme homeomorfně $\overline{\Delta}$ na kruh. Index se nezmění. Γ pak bude kružnice a $T(\Gamma)$ bude ležet uvnitř kružnice. Vektor $\overrightarrow{P_0P_1}$ bude svírat s radiusvektorem bodu P_0 úhel menší než $\frac{1}{2}\pi$. Proto učiní při oběhu P_0 po kružnici tolik otoček, kolik radiusvektor, t. j. právě jednu.

Přejděme ke klasifikaci pevných bodů. Předpokládejme v dalším, že funkce $F(x, y, t)$ a $G(x, y, t)$ jsou analytické. Nechť $\bar{x}(t)$, $\bar{y}(t)$ je periodické řešení, t. j. $(\bar{x}(0), \bar{y}(0))$ pevný bod. Nechť P_0 je $(\bar{x}(0) + u_0, \bar{y}(0) + v_0)$ a nechť souřadnice bodu $P_1 = TP_0$ jsou $\bar{x}(0) + u_1, \bar{y}(0) + v_1$. Z expansního theorému *Poincarého* (viz na př. *Lefschetz*: Lectures on differential equations, str. 35) plyne, že pro řešení $x(t)$, $y(t)$ začínající v bodě P_0 v čase $t = 0$ platí následující rozvoje konvergentní v každém konečném časovém intervalu:

$$x(t) = \bar{x}(t) + c_1(t)\, u_0 + c_2(t)\, v_0 + c_3(t)\, u_0^2 + \dots$$

a podobně pro $y(t)$. Specielně pro $t = L$ dostaneme

$$\begin{aligned} u_1 &= au_0 + bv_0 + \dots \\ v_1 &= cu_0 + dv_0 + \dots \end{aligned} \tag{11}$$

Rovnice (11) určují transformaci T v okolí pevného bodu $(\bar{x}(0), \bar{y}(0))$. Pro malé hodnoty u_0, v_0 je její charakter určen lineárními členy, t. j. transformaci T lze charakterisovat kořeny rovnice

$$\begin{vmatrix} a - \varrho, & b \\ c, & d - \varrho \end{vmatrix} = 0,$$

čili

$$\varrho^2 - (a + d)\, \varrho + ad - bc = 0. \tag{12}$$

Kořeny této rovnice jsou různé od nuly, poněvadž se dá dokázat, že

$$\begin{vmatrix} a, & b \\ c, & d \end{vmatrix} = \exp \int_0^L \left(\frac{\partial F(\bar{x}(t), \bar{y}(t), t)}{\partial x} + \frac{\partial G(\bar{x}(t), \bar{y}(t), t)}{\partial y} \right) dt > 0.$$

Levinson [5] zavedl klasifikaci pevných bodů, která připomíná klasifikaci singulárních bodů d. r. $y' = \dfrac{P(x, y)}{Q(y, x)}$. Budeme uvažovat pouze pevné body, pro něž rovnice (12) má kořeny v absolutní hodnotě různé od jedné. Tyto pevné body nazveme jednoduché. Označíme-li kořeny rovnice (12) ϱ_1, ϱ_2, je $\varrho_1\varrho_2 > 0$, poněvadž $ad - bc > 0$. Vyloučíme-li případy $|\varrho_1| = 1$, $|\varrho_2| = 1$, jsou možny, jak se snadno nahlédne, celkem 4 případy:

1. $|\varrho_1| < 1$, $|\varrho_2| < 1$. Takovému pevnému bodu říkáme *kompletně stabilní*. Bod (u_1, v_1) je totiž blíže bodu $(0, 0)$ než bod (u_0, v_0), takže iterace transformace T přináší bod (u_0, v_0) stále blíže bodu $(0, 0)$, t. j. řešení systému (4) blízké periodickému řešení $\bar{x}(t)$, $\bar{y}(t)$ se tomuto řešení přimykají těsněji a těsněji při $t \to \infty$.

2. $|\varrho_1| > 1$, $|\varrho_2| > 1$. Pevnému bodu říkáme *kompletně nestabilní*. Je to pravý opak kompletně stabilního bodu. Řešení systému (4) blízké periodickému řešení se od něho vzdalují při $t \to +\infty$.

3. $\varrho_1 > 1 > \varrho_2 > 0$. Pevnému bodu říkáme *přímo nestabilní*. To je bod, který má dva páry speciálních invariantních směrů γ_1, γ_2. Body na γ_1 se pohybují k P_0, body na γ_2 směrem od P_0. Pár γ_1 odděluje body, které se pohybují od P_0 v opačných směrech při transformaci T, pár γ_2 odděluje zase body, které se pohybují od P_0 v opačných směrech při inversní transformaci T^{-1}.

4. $\varrho_2 < -1 < \varrho_1 < 0$. Bodu říkáme *inversně nestabilní*. Vlastnosti transformace T jsou podobné jako u přímo nestabilního bodu, jenže každá větev γ_1 a γ_2 přejde v příslušnou opačnou.

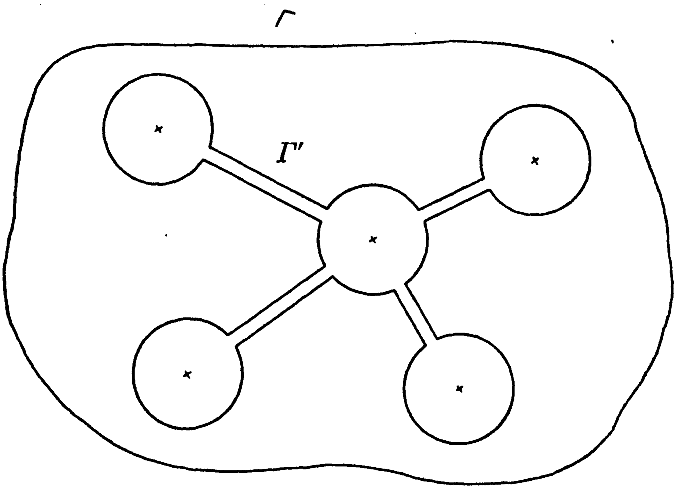
Analytickým vyšetřováním se dá zjistit, že index kompletně stabilního, kompletně nestabilního a inversně nestabilního je roven $+1$, kdežto index přímo nestabilního je roven -1.

Nechť nyní systém (4) má konečný počet periodických řešení a příslušné pevné body nechť jsou jednoduché. Označme počet kompletně stabilních, kompletně nestabilních, přímo nestabilních a inversně nestabilních bodů písmeny S, U, D, J. Pak platí

$$S + U + J - D = 1.$$

K důkazu uzavřeme každý pevný bod malou kružnicí. Spojíme kružnice dohromady dvěma rovnoběžnými úsečkami tak, že kružnice a úsečky dohromady tvoří jednoduchou uzavřenou křivku Γ' (viz obr. 2). Index se nezmění, je tedy index Γ' roven jedné. Přejdeme-li nyní k limitě a necháme splynout rovnoběžné úsečky, je příspěvek úseček k indexu roven nule, neboť každá úsečka spojující dvě kružnice je probíhána dvakrát v opačných směrech. Je tedy index Γ' roven součtu indexů kružnic, t. j. součtu indexů pevných bodů neboli $1 = S + U + J - D$. Značí-li nyní N počet všech jednoduchých periodických řešení, je $N = S + U + J + D = D + 1 + D = 2D + 1$, takže máme větu:

Má-li systém (4) jen konečně mnoho periodických řešení a jsou-li jednoduchá, pak je jich lichý počet N. Přitom je-li $N = 2m + 1$, je m z nich přímo nestabilních.



Obr. 2.

Zmiňme se ještě aspoň několika slovy o t. zv. *subharmonických řešeních.* To jsou periodická řešení, jejichž nejmenší perioda není L, ale násobek L, t. j. qL ($q = 2, 3, \ldots$). Jim odpovídá pevný bod při transformaci T^q. *Levinson* [5], [10] a *Massera* [11] dokázali, že má-li systém (4) $N(q)$ subharmonických řešení s nejmenší periodou qL, kde $q > 1$ je liché číslo, je $N = 2kq$, k celé. Při tom polovina těchto řešení je přímo nestabilní. *Massera* odvodil ještě jiné podobné věty o počtu subharmonik.

Přejdeme k otázkám stability. Připomeňme si nejdříve chování řešení d. r. (1): Existuje jediné periodické řešení a všechna ostatní k tomuto konvergují při $t \to \infty$. Toto periodické řešení je tedy stabilní a sice ve smyslu mnohem silnějším než jak ve smyslu klasické definice *Ljapunovovy* tak ve smyslu definice kompletně stabilního pevného bodu. *Levinson* [12] však ukázal, že nelineární d. r.

$$\ddot{x} + f(x)\,\dot{x} + x = p(t) \tag{13}$$

má tutéž vlastnost za předpokladu, že $f(x) \geqq 0$, při čemž nulové body jsou isolované, a $\int^x f(u)\,du \to \infty$ při $x \to \infty$. Předpoklad $\int^x f(u)\,du \to \infty$ sloužil *Levinsonovi* pouze k zajištění existence periodického řešení, kterou dokázal methodou výše zmíněnou. Tuto část důkazu vynecháme.

Dokážeme jen druhou jednoduchou polovinu, t. j. za předpokladu $f(x) > 0$ (s výjimkou isolovaných bodů) všechna řešení konvergují k periodickému řešení při $t \to \infty$.

Především přepíšeme rovnici (13) na systém. Položme $F(x) = \int_0^x f(u)\,du$, $y = \dot{x} + F(x)$. Pak máme

$$\dot{x} = y - F(x), \ \dot{y} = -x + p(t) \tag{14}$$

Stačí uvedenou větu dokázat pro systém (14). Nechť $(x_1(t), y_1(t))$, $(x_2(t), y_2(t))$ jsou dvě různá řešení systému (14). Položme

$$D(t) = [(x_2(t) - x_1(t))^2 + (y_2(t) - y_1(t))^2]^{\frac{1}{2}} > 0.$$

Je

$$\dot{D} = \frac{(x_2 - x_1)(\dot{x}_2 - \dot{x}_1) + (y_2 - y_1)(\dot{y}_2 - \dot{y}_1)}{D} =$$

$$= -\frac{1}{D}[x_2 - x_1]\ [F(x_2) - F(x_1)] = -\frac{1}{D}(x_2 - x_1)\int_{x_1}^{x_2} f(x)\,dx.$$

Jelikož $f(x) \geqq 0$, při čemž nulové body jsou isolované, je $\dot{D}(t) < 0$ pokud $x_2(t) \neq x_1(t)$. Kromě toho $\dot{D}(t)$ je spojitá funkce a v žádném intervalu neplatí $x_2(t) \equiv x_1(t)$, poněvadž $x_1(t), x_2(t)$ jsou dvě různá řešení. Proto $\int_t^{t+h} \dot{D}(\tau)\,d\tau < 0$ $(h > 0)$, t. j.

$$D(t + h) < D(t) \text{ pro } h > 0,$$

jinými slovy $D(t)$ je klesající funkce. Nechť nyní $(\bar{x}(t), \bar{y}(t))$ je periodické řešení systému (14) s periodou L. Předpokládejme, že (14) má řešení $(x_0(t), y_0(t))$, které nekonverguje k $\bar{x}(t), \bar{y}(t)$ při $t \to \infty$. Máme dojít ke sporu. Položme $D_0(t) = [(\bar{x}(t) - \bar{x}_0(t))^2 + (\bar{y}(t) - y_0(t))^2]^{\frac{1}{2}}$. Jelikož $D_0(t)$ je klesající kladná spojitá funkce a $(x_0(t), y_0(t))$ nekonverguje k $(\bar{x}(t), \bar{y}(t))$, je

$$\lim_{t \to \infty} D_0(t) = A > 0. \tag{15}$$

Nechť $D_n(t)$ značí vzdálenost mezi $(x_0(t + nL), y_0(t + nL))$ a $(\bar{x}(t), \bar{y}(t))$. Poněvadž $(\bar{x}(t), \bar{y}(t))$ je periodické řešení s periodou L, je $D_n(t) = D_0(t + nL)$, takže podle (15)

$$\lim_{n \to \infty} D_n(t) = A \tag{16}$$

pro každé t. Nechť P_n značí bod $(x_0(nL), y_0(nL))$ a $\bar{P}$ bod $(\bar{x}(0), \bar{y}(0))$ v rovině (x, y). Podle (16) vzdálenost $P_n\bar{P}$ má za limitu číslo A. Proto body P_n mají aspoň jeden bod zhuštění Q. Částečnou posloupnost konvergentní ku Q značme P_{n_ν}. Nechť $(x(t), y(t))$ je řešení, které v čase $t = 0$ prochází bodem Q. Je-li $D(t)$ vzdálenost mezi $(x(t)$,

$y(t)$) a ($\bar{x}(t), \bar{y}(t)$), je $D(0) = A$. Ukážeme, že $D(t) = A$, což je ovšem spor, poněvadž jsme dokázali, že $D(t)$ je klesající funkce. Nechť t_0 je libovolné. Uvažujme řešení ($x_{n_\nu}(t) = x_0(t + n_\nu L)$, $y_{n_\nu}(t) = y_0(t + n_\nu L)$) (viz pozn. [1]) na str. 55). Toto se liší v čase $t = 0$ od řešení ($x(t), y(t)$) libovolně málo, jen když ν je dostatečně velké. Z toho vyplývá podle věty o spojité závislosti řešení na počátečních podmínkách, že ($x_{n_\nu}(t_0)$, $y_{n_\nu}(t_0)$) se od ($x(t_0), y(t_0)$) liší libovolně málo, jen když ν je dostatečně velké. Avšak limita $D_{n_\nu}(t_0)$ je rovna limitě vzdálenosti bodů ($x_0(t + n_\nu L) = x_{n_\nu}(t_0)$, $y_0(t + n_\nu L) = J_{n_\nu}(t_0)$) a ($\bar{x}(t_0), \bar{y}(t_0)$) a je rovna A. Proto $D(t_0) = A$.

Cartwright a *Littlewood* [6] zobecnili výsledek *Levinsonův* na případ d. r.

$$\ddot{x} + f(x)\,\dot{x} + g(x) = p(t). \tag{17}$$

Nebudu rozbírat detailně jejich výsledky, nýbrž je jen stručně shrnu. Předpokládají: $f(x) \geqq b_1 > 0$ pro všechna x (tedy v tomto směru více jako *Levinson*), $g(0) = 0$, $g'(x) \geqq b_2 > 0$, $\int_0^L p(t)\,dt = 0$. Ukazují, že d. r. (17) má periodické řešení, ke kterému všechna ostatní konvergují při $t \to \infty$, když buďto $g(x)$ je přibližně lineární, t. j. $|g''(x)|$ dostatečně malá, nebo když, píšeme-li rovnici (17) ve tvaru

$$\ddot{x} + kf(x)\,\dot{x} + g(x) = p(t), \tag{18}$$

parametr k je dostatečně velký, t. j. tlumení je dostatečně velké. Na druhé straně ukázali na příkladech, že i když $f(x) = b > 0$, nemusí rovnice (17) míti jedno periodické řešení, ke kterému ostatní konvergují. V těchto příkladech $g(x)$ se velmi lišila od lineárního případu, takže je vidět, že předpoklad o lineárnosti $g(x)$ je podstatný, jestliže uvažujeme tvar (17).

Dalších výsledků v problému stability mnoho už není. Pokud předpokládáme, že $f(x)$ je pro všechna x kladná nebo dokonce $f(x) \geqq b > 0$, jsou výsledky dosti jednoduché a hlavní byly uvedeny. Jakmile však připustíme, že $f(x)$ nabývá též hodnot záporných, nemáme zatím žádných obecných vět a víme jen z jedné práce *Cartwrighta* a *Littlewooda* [13] a rovněž z jedné práce *Levinsonovy* [14], že může nastat, abych tak řekl, všechno možné. *Cartwright* a *Littlewood* [13] se zabývali *Van der Polovou* d. r. s pravou stranou

$$\ddot{x} + k(x^2 - 1)\,\dot{x} + x = bk\omega \cos(\omega t + \alpha) \tag{19}$$

a ukázali, že když k je dostatečně velký parametr, nastanou dva případy. 1. $b > \frac{2}{3}$; pak d. r. (19) má jedno periodické řešení, ke kterému všechna ostatní konvergují při $t \to \infty$. 2. $b < \frac{2}{3}$; pak existují jak stabilní tak nestabilní periodická řešení. Dále existují subharmonická řešení a ještě jiné zvláštní body.

LITERATURA

[1] *Lefschetz:* Existence of periodic solutions for certain differential equations, Proceedings of the Nat. Acad. of Sc. of the USA, vol. 29, 1943.
[2] *Krylov-Bogoljubov:* Introduction to nonlinear mechanics, Princeton 1942.
[3] *Andronov-Chaikin:* Theory of oscillations, Princeton 1949.
[4] *Levinson:* On the existence of periodic solutions for second order differential equations with forcing term, Journal of Math. and Phys., 1943.
[5] *Levinson:* Transformation theory of nonlinear differential equations of the second order, Annals of Math. 1944.
[6] *Cartwright-Littlewood:* On nonlinear differential equations of the second order II, Annals of Math. 1947.
[7] *Cartwright:* Forced oscillations in nonlinear systems, Contributions to the theory of nonlinear oscillations, Princeton 1950.
[8] *Massera:* The existence of periodic solutions of systems of differential equations, Duke Math. J. 1950.
[9] *Langenhop-Farnell:* The existence of forced periodic solutions of second order differential equations near certain equilibrium points of the unforced equation, Contributions to the theory of nonlinear oscillations, Princeton 1950.
[10] *Levinson:* Correction. Transformation theory of nonlinear differential equations of the second order, Annals of Math. 1948.
[11] *Massera:* The number of subharmonic solutions of nonlinear differential equations of the second order, Annals of math. 1949.
[12] *Levinson:* On a nonlinear differential equation of the second order, Journal of Math. and Phys. 1943.
[13] *Cartwright-Littlewood:* On nonlinear differential equations of the second order *I*, Journal of the London Math. Soc. 1945.
[14] *Levinson:* A second order differential equation with singular motion, Annals of Math. 1949.

Pracováno v Ústředním ústavě matematickém v Praze.