

Recenze knih a článků

Časopis pro pěstování matematiky, Vol. 76 (1951), No. 3, 225--227

Persistent URL: <http://dml.cz/dmlcz/117014>

Terms of use:

© Institute of Mathematics AS CR, 1951

Institute of Mathematics of the Academy of Sciences of the Czech Republic provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.



This paper has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* <http://project.dml.cz>

RECENSE KNIH A ČLÁNKŮ

Josef Novák: O některých uspořádaných kontinuích mohutnosti 2^{\aleph_0} obsahujících hustou část mohutnosti \aleph_1 . Časopis (rus.) 76 (1951), Časopis (anglo-franc.) 76 (1951).*)

Mezi uspořádanými množinami jsou zvláště důležitá *uspořádaná kontinua*, t. j. uspořádané množiny, v nichž za prvé mezi libovolnými dvěma prvky leží další prvky, za druhé, každý Dedekindův řez je vytvořen některým prvkem množiny. Nejjednodušším příkladem uspořádaného kontinua je ovšem obyčejný uzavřený interval reálných čísel, jenž se dá charakterisovat jako (jedině až na isomorfismus) uspořádané kontinuum obsahující *spočetnou hustou část*.

Theorii uspořádaných množin, včetně uspořádaných kontinuí se zabýval soustavně před více než 40 lety *F. Hausdorff*. Zavedl při tom mimo jiné důležitý pojem *charakteru bodu* (po př. mezery, t. j. Dedekindova řezu), jež definuje takto: Je-li x bod uspořádané množiny a je-li ω_ρ (obdobně ω_σ) nejmenší ordinální číslo takové, že existuje (transfinitní) rostoucí (klesající) posloupnost, která konverguje k x , pak říkáme, že x má charakter $c_{\rho\sigma}$.

Později se teorií uspořádaných kontinuí zabýval též *M. Suslin*, jenž r. 1920 položil známý, dosud nevyřešený problém, zda existuje uspořádané kontinuum, v němž každý disjunktní systém intervalů je spočetný, jež však neobsahuje spočetnou hustou část.

Ve své práci se zabývá autor (jenž již v r. 1938 studoval v *Časopise pro pěstování matematiky a fyziky* 68, 1938), str. 147—161, t. zv. Bernsteinovo ultrakontinuum a zejména jeho charaktery (problémy, které souvisí s pracemi *F. Hausdorffa* a částečně též se *Suslinovým* problémem). Předmětem jeho studia jsou kontinua, jež jsou (alespoň s hlediska mohutnosti) nejjednodušší po reálném intervalu, totiž kontinua mohutnosti 2^{\aleph_0} , jež obsahují hustou část mohutnosti \aleph_1 .

V práci používá autor metody identifikace některých bodů uspořádané množiny. Tímto způsobem se z výchozího kontinua, jehož prvky jsou transfinitní posloupnosti nul a jedniček, sestrojí několik typů kontinuí, jejichž vlastnosti jsou podrobně zkoumány. Jedním z významnějších výsledků, vyplývajících z tohoto vyšetřování je to, že kontinuum, splňující *Suslinovu podmínku* a isomorfní s částí kontinua \mathfrak{P}_2 studovaného v této práci, je nutně isomorfní s intervalem reálných čísel.

Práce *J. Nováka* je důležitým přínosem k významné, avšak poměrně málo zpracované teorii uspořádaných kontinuí. *M. Katětov (Praha.)*

L. Mišík: O jednom uspořádaném kontinuu. Časopis (rus.) 76 (1951), Časopis (anglo-franc.) 76 (1951).

J. Novák sestrojil šest různých typů uspořádaných kontinuí \mathfrak{P}_k , $k = 1, 2, \dots, 6$, o mohutnosti 2^{\aleph_0} a separabilitě \aleph_1 . Položil problém, zdali existuje uspořádané kontinuum \mathfrak{P}_7 s body o charakterech c_{00} , c_{01} a c_{10} s vlastností: v každém nedegenerovaném intervalu existuje interval podobný s \mathfrak{P}_7 .

*) Stránky ve všech recenzích v tomto čísle otištěných nemohly být uvedeny, poněvadž citované časopisy jsou dosud v sazbě.

Předmětem tohoto článku je konstrukce takového kontinua. Při tom se vychází od lexikograficky uspořádané množiny Q , jejíž prvky jsou transfinitní posloupnosti nul a jedniček nespočetného typu ω_1 , při čemž každé dva sousední prvky jsou identifikovány. Uspořádané kontinuum \mathfrak{P}_7 se sestrojí methodou identifikace prvků v určitých uzavřených intervalech kontinua Q . Ukazuje se, že \mathfrak{P}_7 je podobné jistě podmnožině v \mathfrak{P}_3 . Kontinuum \mathfrak{P}_7 má stejnou vlastnost π jako ostatní kontinua \mathfrak{P}_k , totiž z každého nespočetného disj. systému intervalů dá se vybrat nespočetný pod-systém intervalů, jejichž levé krajní body tvoří vzrůstající nebo klesající posloupnost.

Množiny \mathfrak{P}_k , $k = 1, 2, \dots, 7$ jsou základními typy uspořádaných kontinuí o mohutnosti 2^{\aleph_0} a separabilitě \aleph_1 , nepřihlížíme-li k Suslinovu uspořádanému kontinuu, o jehož existenci se dodnes nic neví. J. Novák (Praha).

Miroslav Novotný: Konstrukce některých uspořádaných kontinuí o mohutnosti 2^{\aleph_0} . Časopis (rus.) 76 (1951), Časopis (anglo-franc.) 76 (1951).

Pomocí určitých identifikací bodů v uspořádané množině Q , jejíž prvky jsou transfinitní posloupnosti nul a jedniček typu Ω sestrojil J. Novák¹⁾ šest různých uspořádaných kontinuí \mathfrak{P}_k , $k = 1, 2, \dots, 6$. Podobným způsobem sestrojil L. Mišík²⁾ kontinuum \mathfrak{P}_7 . Všechna tato kontinua mají mohutnost 2^{\aleph_0} a separabilitu³⁾ \aleph_1 .

Kontinuum \mathfrak{P}_3 má body čtverého charakteru: c_{00}, c_{01}, c_{10} a c_{11} . Uspořádané kontinuum o podobných vlastnostech jako \mathfrak{P}_3 je známo pod názvem Bernsteinovo ultrakontinuum. J. Novák položil otázku, zda je ultrakontinuum podobno kontinuu \mathfrak{P}_3 . V první části práce se dokazuje, že tomu tak vskutku je. Je udána také konstrukce pro ostatní kontinua \mathfrak{P}_1 až \mathfrak{P}_7 , analogická Bernsteinově.

V druhé části jsou definována kontinua \mathfrak{P}_k^{ω} , $k = 1, 2, \dots, 7$, takto: Prvky jsou všechny obyčejné posloupnosti prvků kontinua \mathfrak{P}_k a uspořádání je lexikografické. — Bod $x \in \mathfrak{P}_k$ se nazývá prvního druhu, je-li to první nebo poslední prvek v \mathfrak{P}_k nebo prvek charakteru c_{00} . Ostatní body v \mathfrak{P}_k se nazývají body druhého druhu. Řekneme, že prvek $x = x_0 x_1 \dots x_{\lambda} \dots$ ($\lambda < \omega$), $x \in \mathfrak{P}_k^{\omega}$ má vlastnost α , existuje-li $p < \omega$ tak, že $x_p \in \mathfrak{P}_k$ je druhého druhu. Buď p nejmenší index, pro nějž je x_p druhého druhu. Každý bod $z \in \mathfrak{P}_k^{\omega}$, $z = z_0 z_1 \dots z_{\lambda} \dots$ ($\lambda < \omega$), pro nějž $x_{\lambda} = z_{\lambda}$ pro $\lambda \leq p$, má rovněž vlastnost α . Řekneme, že množina všech takových bodů z , t. j. interval $J'_{x_0 x_1 \dots x_p} \subset \mathfrak{P}_k^{\omega}$ má vlastnost α .

Bud \mathcal{E}'_k systém všech intervalů $J'_{x_0 x_1 \dots x_p} \subset \mathfrak{P}_k^{\omega}$ minimálních řádů s vlastností α . Pak \mathcal{E}'_k je disjunktní systém uzavřených intervalů kontinua \mathfrak{P}_k^{ω} . Bud \mathfrak{P}'_k systém, jehož prvky jsou jednak všechny uzavřené intervaly $y = J_{x_0 x_1 \dots x_p} \in \mathcal{E}'_k$, jednak všechny jednobodové množiny $(x) \subset \mathfrak{P}_k^{\omega} - \cup \mathcal{E}'_k$. Podle jedné Novákovy věty je množina \mathfrak{P}'_k uspořádané kontinuum. \mathfrak{P}'_k má mohutnost 2^{\aleph_0} a separabilitu 2^{\aleph_0} . Ostatní vlastnosti kontinua \mathfrak{P}'_k jsou podobny vlastnostem \mathfrak{P}_k : \mathfrak{P}'_k je kvasiisomogenní, to

¹⁾ J. Novák: On some ordered continua of power 2^{\aleph_0} containing a dense subset of power \aleph_1 . Časopis (anglo-franc.) 76 (1951).

²⁾ L. Mišík: On an ordered continuum, Časopis (angl.-franc.) 76 (1951).

³⁾ Řekneme, že separabilita množiny M je rovna \aleph_{ν} , jestliže \aleph_{ν} je nejmenší mohutnost podmnožiny husté v M .

jest v každém nedegenerovaném intervalu v \mathfrak{P}'_k existuje podinterval, jenž je podobný s \mathfrak{P}'_k ; charaktery bodů v \mathfrak{P}'_k jsou tytéž jako charaktery bodů v \mathfrak{P}_k : \mathfrak{P}'_k je podobno jisté podmnožině v \mathfrak{P}'_3 . Konečně \mathfrak{P}_k je podobno jisté podmnožině v \mathfrak{P}'_k .

J. Novák (Praha).

Wacław Sierpiński: **O jednom problému J. Nováka.** Časopis (rus.) 76 (1951), Časopis (anglo-franc.) 76 (1951).

Nechť A, B jsou 2 dané množiny, jejichž rozdíl $A - B$ je konečná množina. Symbolicky to vyjádříme takto: $B \supset *A$. Josef Novák předložil tento problém:

Problém N. Existuje transfinite posloupnost $\{N_\xi\}_{\xi < \Omega}$ typu Ω nekonečných podmnožin N_ξ přirozených čísel taková, že $N_\xi \supset *N_\eta$ pro $\xi < \eta < \Omega$ a taková, že neexistuje nekonečná podmnožina A přirozených čísel s vlastností $N_\xi \supset *A$ pro každé $\xi < \Omega$?

V roce 1947 položil Nicolas Lusin tento problém:*)

Problém L. Existuje transfinite posloupnost typu Ω nekonečných podmnožin přirozených čísel $\{N_\xi\}_{\xi < \Omega}$ taková, že $N_\xi \supset *N_\eta$ pro $\xi < \eta < \Omega$ a taková, že množiny $N_\xi - N_\eta$ jsou nekonečné pro $\xi < \eta < \Omega$ a že neexistuje žádná nekonečná podmnožina A přirozených čísel s vlastností $N_\xi \supset *A$ a taková, že množiny $N_\xi - A$ jsou nekonečné pro všechna $\xi < \Omega$?

V první části práce se dokazuje, že problémy N a L jsou ekvivalentní. Jelikož ve *Fundamenta Mathematicae*, 35 (1948), str. 148 bylo W. Sierpinskiem dokázáno, že za předpokladu hypotézy kontinua existuje kladné řešení problému L , vyplývá odtud, že za předpokladu $\aleph_1 = 2^{\aleph_0}$ je také odpověď na problém N kladná. V druhé části práce se toto tvrzení dokazuje přímo.

J. Novák (Praha).

Kazimierz Zarankiewicz: **O kategorii množiny dělicích bodů jednoho typu kontinuí.** Časopis (rus.) 76 (1951), Časopis (anglo-franc.) 76 (1951).

Bod x se nazývá dělicím bodem kontinua C , jestliže množina $C - x$ není souvislá. Nechť $R(C)$ značí množinu všech dělicích bodů kontinua C a nechť $N(C) = C - R(C)$. Pro každý bod $x \in R(C)$ platí $C = A_x \cup B_x$, kde A_x a B_x jsou kontinua taková, že $A_x \cap B_x = x$. Nechť $a \in N(C)$. Symbolem A_x označme nyní to kontinuum, jež obsahuje bod x . Pak je množina $P(a) = \bigcap_{x \in R(C)} A_x$ buď jednobodová nebo kontinuum.

Ukazuje se, že v kontinuu je pojem množiny $P(a)$ identický s pojmem jednoduchého článku (simple link), jak jej definoval R. L. Moore. Z prací Whyburnových pak vyplývá celá řada výsledků, jež se týkají množin $P(a)$. Tak zejména koncový bod x kontinua C se dá definovatí těmito požadavky: $P(x) = x \in N(C)$. Dále vyplývá, že každý izolovaný bod v množině $N(C)$ je koncovým bodem v C .

V práci se dokazuje věta: Ke každému n -dimensionálnímu kontinuu C existuje takové n -dimensionální kontinuum $C^* \subset E_{2n+1}$, že $C \subset C^*$ a $\overline{R(C^*)} = C^* = \overline{N(C^*)}$.

Dále se studuje otázka kategorie množiny $R(C)$. Jestliže množina všech koncových bodů kontinua C je hustá v $N(C)$, pak množina všech ostatních bodů, zejména tedy i množina $R(C)$, je první kategorie. Jestliže obě množiny $N(C)$ a $R(C)$ jsou husté v C a množina $N(C)$ neobsahuje žádný koncový bod, pak $R(C)$ nemusí být první kategorie. Jako doklad tohoto tvrzení je uveden v práci příklad. J. Novák (Praha).

*) Izvestia Akademii nauk SSSR, 11 (1947) str. 410.