Jan Mařík

Lebesgueův integrál v abstraktních prostorech

Časopis pro pěstování matematiky, Vol. 76 (1951), No. 3, 175–194

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/117009`

LEBESGUEŮV INTEGRÁL V ABSTRAKTNÍCH PROSTORECH

JAN MAŘÍK, Praha.

(Došlo dne 20. IV. 1951.)

Hlavním úkolem tohoto článku je seznámit čtenáře s abstraktní theorií integrálu. Jsou zde však také podány elementárním způsobem základy theorie Lebesgueova integrálu v Euklidových prostorech. Čtenář, který zná něco z topologie, snadno pak uvedenými methodami dokáže, že každá nezáporná lineární funkcionála na množině spojitých funkcí v metrickém kompaktním prostoru se dá rozšířit na integrál. Snadno se také dokáže obdobná věta pro prostory lokálně kompaktní.

1. E_1 značí množinu reálných čísel (jednorozměrný Euklidův prostor); E_1^* značí množinu, která vznikne tím, že k E_1 přidáme symboly ∞ a $-\infty$. Význam znamení $<, \leqq, >, \geqq$ v množině E_1^* je jistě zřejmý. Dále klademe

$$a + \infty = \infty + a = \infty + \infty = \infty,$$
$$a - \infty = -\infty + a = -\infty - \infty = -\infty$$

pro každé $a \in E_1$,

$$-(-\infty) = \infty, \ |\infty| = |-\infty| = \infty,$$
$$c \cdot \infty = \infty \text{ resp. } = 0 \text{ resp. } = -\infty$$

podle toho, je-li $c > 0$ resp. $c = 0$ resp. $c < 0$. O symbolech $\infty - \infty$, $-\infty + \infty$ řekneme, že nemají smysl.

Je-li $A \subset E_1^*$, je jistě opět zřejmé, co znamená $\sup A$, $\inf A$. Platí-li $A \subset B \subset E_1^*$, je $\sup A \leqq \sup B$, $\inf A \geqq \inf B$. Je-li $A \neq \emptyset$, je $\sup A \geqq \inf A$; pro $A = \emptyset$ je však $\sup A = -\infty$, $\inf A = \infty$. Neklesající posloupnost prvků z E_1^* má vždy limitu (v E_1^*); ta se rovná jejímu supremu. Podobně je tomu pro posloupnost nerostoucí. Je-li $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ libovolná posloupnost prvků z E_1^*, klademe

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} a_n = \lim_{n\to\infty} (\sup_{k\geqq n} a_k), \quad \underline{\lim_{n\to\infty}} a_n = \lim_{n\to\infty} (\inf_{k\geqq n} a_k).$$

Je-li $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} a_n = \underline{\lim\limits_{n\to\infty}} a_n$, píšeme ovšem $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} a_n = \underline{\lim\limits_{n\to\infty}} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$.

Místo $a = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$ píšeme též $a_n \to a$. Je-li zde $a_1 \leqq a_2 \leqq \ldots$, píšeme $a_n \nearrow a$; obdobný význam má $a_n \searrow a$.

Místo $\sup\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ píšeme obyčejně $\max\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$; podobně zde užíváme znaku min místo inf. Dále označíme $a_+ = \max(a, 0)$, $a_- = \min(a, 0)$. Platí $a = a_+ + a_-$, $|a| = a_+ - a_-$. Všimněme si ještě, že

$$a_n \to a,\ b_n \to b \Rightarrow \max(a_n, b_n) \to \max(a, b),\ \min(a_n, b_n) \to \min(a, b).$$

2. Buď M libovolná neprázdná množina. Funkcí na množině M rozumíme zobrazení množiny M do množiny E_1^*; funkce f je tedy předpis, který každému prvku $x \in M$ přiřazuje jistý prvek $f(x) \in E_1^*$ jako t. zv. funkční hodnotu v bodě x. Je-li $f(x) \in E_1$ pro každé $x \in M$, řekneme, že f je konečná funkce; existuje-li dokonce $c \in E_1$ tak, že $|f(x)| < c$ pro každé $x \in M$, nazveme funkci f omezenou. Jsou-li f, g funkce na množině M takové, že platí $f(x) \leqq g(x)$ pro každé $x \in M$, píšeme $f \leqq g$. Konstantní funkci značíme vždy příslušnou funkční hodnotou; na př. 0 bude znamenat někdy číslo 0 a někdy funkci, která v každém bodě nabývá hodnoty 0. Jistě je jasné, co znamená $\max(f, g)$, f_+, f_-, $\lim\limits_{n\to\infty} f_n$, $f_n \to f$, $f_n \nearrow f$ a pod. Součet funkcí f, g nemusí ovšem mít vždy smysl. Jestliže f_n, f jsou konečné funkce a jestliže ke každému $\varepsilon > 0$ existuje N takové, že pro každé $n > N$ platí $|f_n - f| \leqq \varepsilon$, řekneme, že posloupnost funkcí f_n konverguje stejnoměrně k funkci f. V našich úvahách se však stejnoměrná konvergence nikde nevyskytne; $f_n \to f$ bude vždy značit jen to, že pro každé $x \in M$ platí $f_n(x) \to f(x)$.

3. Neprázdný systém F konečných funkcí na množině $M \neq \emptyset$ nazveme lineárním prostorem, má-li tyto vlastnosti:

L_1) $\qquad f_1, f_2 \in F \Rightarrow f_1 + f_2 \in F$

L_2) $\qquad c \in E_1,\ f \in F \Rightarrow cf \in F.$

Je-li F lineární prostor funkcí na M, pak konečnou funkci J, definovanou na množině F, nazveme lineární funkcionálou, platí-li

L_3) $\qquad J(f_1 + f_2) = J(f_1) + J(f_2),$

L_4) $\qquad J(cf_1) = cJ(f_1),$

kdykoli

$$f_1, f_2 \in F,\ c \in E_1.$$

Zřejmě tedy

$$0 \in F,\ J(0) = 0.$$

Platí-li nadto

L_5) $\qquad f \in F,\ f \geqq 0 \Rightarrow J(f) \geqq 0,$

nazveme J nezápornou funkcionálou.

Je-li v tomto případě $f_1, f_2 \in F$, $f_1 \geqq f_2$, pak platí

$$J(f_1) = J(f_2 + (f_1 - f_2)) = J(f_2) + J(f_1 - f_2) \geqq J(f_2).$$

4. Systém Z konečných funkcí na množině M nazveme základním systémem vzhledem k množině M a funkcionále J, má-li tyto vlastnosti:

L_6) Z je lineární prostor

L_7) $z \in Z,\ c \in E_1,\ c \geqq 0 \Rightarrow \min(c, z) \in Z$

L_8) J je nezáporná lin. funkcionála na Z

L_9) $z_n \in Z,\ z_n \searrow 0 \Rightarrow J(z_n) \to 0.$

Z L_7) plyne, že pro $z_1, z_2 \in Z$ platí též

$$\min(z_1, z_2) = z_2 + \min(z_1 - z_2, 0) \in Z;$$

podobně

$$\max(z_1\, z_2) = -\min(-z_1, -z_2) \in Z.$$

Zejména

$$z \in Z \Rightarrow |z| = z_+ - z_- \in Z.$$

5. Lomenou čarou v intervalu $\langle a, b\rangle$ nazveme funkci f, k níž existují čísla

$$a = t_0 < t_1 < \ldots < t_{n-1} < t_n = b$$

tak, že v každém intervalu $\langle t_{i-1}, t_i\rangle$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ je f lineární. Každá lomená čára má primitivní funkci (to lze snadno zjistit bez použití věty, že spojitá funkce má primitivní funkci); na množině Z všech lomených čar v $\langle a, b\rangle$ můžeme tedy definovat funkcionálu J tímto předpisem: Je-li φ primitivní funkce k funkci $f \in Z$, budiž $J(f) = \varphi(b) - \varphi(a)$. Čtenář nyní snadno dokáže, že jsou splněny předpoklady L_6), L_7), L_8). Z další věty pak plyne, že je splněn i předpoklad L_9).

6. Buď $M = \langle a, b\rangle$; *buď Z lineární prostor, jehož prvky jsou spojité funkce na M a nechť $1 \in Z$. Buď J nezáporná lin. funkcionála na Z. Pak platí L_9).*

Důkaz: Předpokládejme, že L_9) neplatí a odvodíme spor. Nechť tedy existují $z_n \in Z$, $z_n \searrow 0$ tak, že není $J(z_n) \to 0$. Protože však

$$z_n \geqq z_{n+1} \Rightarrow J(z_n) \geqq J(z_{n+1}),\ z_n \geqq 0 \Rightarrow J(z_n) \geqq 0,$$

existuje

$$\lim_{n\to\infty} J(z_n) = c > 0.$$

Buď $c' = J(1)$ $(\geqq 0)$. Zvolme $c'' > c'$. Kdyby bylo pro některé p $z_p \leqq \dfrac{c}{c''}$, bylo by

$$J(z_p) \leqq J\left(\frac{c}{c''}\right) = \frac{c}{c''} \cdot c' < \frac{c}{c''} \cdot c'' = c$$

a tedy tím spíše

$$c = \lim_{n\to\infty} J(z_n) \leqq J(z_p) < c,$$

což není možné.

Ke každému $n = 1, 2, \ldots$ tedy existuje aspoň jedno $x \in M$ tak, že $z_n(x) > \frac{c}{c''}$. Budiž A_n množina těch $x \in M$, pro něž platí $z_n(x) > \frac{c}{c''}$. Buď $x_n = \sup A_n$. Kdyby pro některé n platilo $z_n(x_n) < \frac{c}{c''}$, bylo by $z_n(x) < \frac{c}{c''}$ dokonce pro všechna $x \in M$, dostatečně blízká k x_n (protože funkce z_n je spojitá); to by však odporovalo volbě x_n jako suprema A_n. Je tedy

$$z_n(x_n) \geqq \frac{c}{c''} \text{ pro } n = 1, 2, \ldots$$

Protože

$$z_n(x_n) \leqq z_{n-1}(x_n) \leqq z_{n-2}(x_n) \leqq \ldots,$$

platí

$$(\alpha) \qquad z_m(x_n) \geqq \frac{c}{c''},$$

kdykoli $n \geqq m$.

Protože $A_n \supset A_{n+1}$, je $x_n \geqq x_{n+1}$ pro $n = 1, 2, \ldots$; buď $y = \lim x_n$. (Zřejmě $y \in M$.) Protože $z_n \searrow 0$, je pro jisté m $z_m(y) < \frac{c}{c''}$. Ze spojitosti funkce z_m opět plyne, že platí $z_m(x) < \frac{c}{c''}$ dokonce pro všechna $x \in M$, dostatečně blízká bodu y.

Protože $x_n \to y$, platí tedy pro dostatečně velká n

$$z_m(x_n) < \frac{c}{c''}.$$

To však je ve sporu s (α); tento spor dokazuje správnost věty.

Poznámka: Větu 6 lze snadno zobecnit. Její důkaz spočívá v podstatě na tom, že nerostoucí posloupnost neprázdných uzavřených množin v kompaktním prostoru má neprázdný průnik; odtud plyne, že monotonní posloupnost spojitých funkcí, která konverguje k nule (nebo obecněji k nějaké spojité funkci), konverguje stejnoměrně. Odtud plyne dále, že systém všech spojitých funkcí na daném kompaktním prostoru tvoří základní systém vzhledem k libovolné nezáporné lin. funkcionále, která je na něm definována. Podobnou větu lze dokázat pro lokálně kompaktní prostor P, vezmeme-li však za Z množinu těch funkcí, které jsou spojité na P a vně jisté kompaktní množiny rovny nule.

Význam této poznámky spočívá v tom, že funkcionálu J, definovanou na množině Z, můžeme rozšířit na event. větší množinu L, na níž pak má J vlastnosti integrálu.

Definujeme-li pak pomocí funkcionály J na množině M ještě míru, stane se J integrálem v obvyklém slova smyslu.

Cvičení 1. Funkci f nazveme lomenou čarou v intervalu $(-\infty, \infty)$, jestliže existují $a, b, -\infty < a < b < \infty$, tak, že pro $x \leqq a$ i pro $x \geqq b$ je $f(x) = 0$ a jestliže f je lomenou čarou (podle 5) v $< a, b >$. Pak existuje k f primitivní funkce φ a existují $\varphi(\infty)$ $(= \lim_{x\to\infty}\varphi(x))$, $\varphi(-\infty)$. Klademe-li $J(f) = \varphi(\infty) - \varphi(-\infty)$, tvoří systém všech lomených čar v $(-\infty, \infty)$ základní systém vzhledem k J.

Všude dále předpokládáme, že Z je základní systém vzhledem k množině M a funkcionále J.

7. *Nechť* z_n, $\bar{z}_n \in Z$ $(n = 1, 2, \ldots)$, $z_n \nearrow f$, $\bar{z}_n \nearrow \bar{f}$ *(o funkcích* f, $\bar{f}$ *nepředpokládáme, že patří do* Z*),* $f \leqq \bar{f}$. *Pak* $\lim_{n\to\infty} J(z_n) \leqq \lim_{n\to\infty} J(\bar{z}_n)$.

Důkaz: Zvolme z_N. Buď $g_n = \min(\bar{z}_n, z_N)$. Protože $\bar{z}_n \nearrow \bar{f} \geqq f \geqq z_N$ platí $g_n \nearrow \min(\bar{f}, z_N) = z_N$, $z_N - g_n \searrow 0$ (pro $n \to \infty$); podle L_9) máme

$$J(g_n) \to J(z_N).$$

Protože $\bar{z}_n \geqq g_n$, je

$$\lim J(\bar{z}_n) \geqq \lim J(g_n) = J(z_N).$$

Odtud plyne

$$\lim_{n\to\infty} J(\bar{z}_n) \geqq \lim_{N\to\infty} J(z_N).$$

8. *Nechť* $z_n, \bar{z}_n \in Z$ $(n = 1, 2, \ldots)$, $z_n \searrow f, \bar{z}_n \searrow \bar{f}, f \geqq \bar{f}$. *Pak* $\lim J(z_n) \geqq \lim J(\bar{z}_n)$.

Důkaz: Plyne z 7 změnou znaménka.

9. Buď nyní R systém všech funkcí r na množině M, k nimž existují $z_n \in Z$ tak, že $z_n \nearrow r$. Budiž K systém všech funkcí k na množině M, k nimž existují $z_n \in Z$ tak, že platí $z_n \searrow k$. Jestliže $z_n \nearrow r$, $\bar{z}_n \nearrow r$, plyne z 7 snadno, že $\lim J(z_n) = \lim J(\bar{z}_n)$. Můžeme tedy pro $r \in R$ definovat $J(r) = \lim_{n\to\infty} J(z_n)$, kde $z_n \nearrow r$. (Je-li náhodou $r \in Z$, není toto označení ve sporu s původním významem znaku $J(r)$; můžeme totiž volit $z_n = r$.)

Podobně definujeme $J(k)$ pro $k \in K$. Může být ovšem $J(r) = \infty$, $J(k) = -\infty$.

10. *Jestliže* $r_1, r_2 \in R$, $c \in E_1$, $c \geqq 0$, *pak* $\max(r_1, r_2)$, $\min(r_1, r_2)$, $r_1 + r_2$, $cr_1 \in R$ *a platí* $J(r_1) + J(r_2) = J(r_1 + r_2)$, $J(cr_1) = cJ(r_1)$.

(Důkaz je snadný.)

11. *Jestliže* $r \in R$, $k \in K$, *pak* $(-r) \in K$, $(-k) \in R$ *a platí* $J(-r) = -J(r)$, $J(-k) = -J(k)$.

(Zřejmé.)

12. Pro libovolnou funkci f na množině M definujeme nyní $\overline{J}(f)$, $\underline{J}(f)$ (t. zv. horní a dolní integrál) předpisem

$$\overline{J}(f) = \inf J(r), \text{ kde } r \in R,\ r \geqq f,$$

$$\underline{J}(f) = \sup J(k), \text{ kde } k \in K,\ k \leqq f.$$

(Neexistuje-li k f taková funkce r, klademe ovšem $\overline{J}(f) = \inf \emptyset = \infty$; podobně pro $\underline{J}(f)$.)

13. $\overline{J}(f) = -\underline{J}(-f)$; $f \leqq g \Rightarrow \underline{J}(f) \leqq \underline{J}(g)$, $\overline{J}(f) \leqq \overline{J}(g)$; *pro* $c \in E_1$, $c \geqq 0$ *je* $\overline{J}(cf) = c\overline{J}(f)$, $c\underline{J}(f) = \underline{J}(cf)$.

(Zřejmé.)

14. *Pro* $z \in Z$ *platí* $\underline{J}(z) = \overline{J}(z) = J(z)$.

(Zřejmé.)

15. *Buďte* f, g, h *funkce na množině* M *takové, že platí* $f(x) = g(x) + h(x)$, *kdekoli má smysl poslední součet. Pak platí*

$$\overline{J}(f) \leqq \overline{J}(g) + \overline{J}(h),$$

jakmile má součet napravo smysl.

Důkaz: Můžeme se omezit na případ

$$\overline{J}(g) < \infty,\ \overline{J}(h) < \infty.$$

Nechť r, $s \in R$, $r \geqq g$, $s \geqq h$. Pak platí pro každé $x \in M$

$$(\beta) \qquad f(x) \leqq r(x) + s(x).$$

(Má-li smysl součet $g(x) + h(x)$, dostaneme (β) sečtením dvou nerovností; jinak je na př. $g(x) = \infty$, tedy je $r(x) = r(x) + s(x) = +\infty$.) Odtud plyne (viz 10)

$$\overline{J}(f) \leqq J(r + s) = J(r) + J(s).$$

Přechodem k infimům dostáváme tvrzení věty.

16. *Pro funkce* f, g, h *z věty* 15 *platí*

$$\underline{J}(g) + \underline{J}(h) \leqq \underline{J}(f),$$

jakmile má součet nalevo smysl.

Důkaz: Plyne z 15 změnou znaménka (viz 13).

17. *Pro libovolnou funkci* f *na množině* M *platí*

$$\underline{J}(f) \leqq \overline{J}(f).$$

Důkaz: Platí

$$0 = J(0) = \overline{J}(0) \leqq \overline{J}(f) + \overline{J}(-f) = \overline{J}(f) - \underline{J}(f),$$

jakmile má tento rozdíl smysl. Nemá-li smysl, je buď $\overline{J}(f) = \underline{J}(f) = \infty$ nebo $\overline{J}(f) = \underline{J}(f) = -\infty$, takže věta rovněž platí.

18. *Pro $r \in R$, $k \in K$ je $J(r) = \overline{J}(r) = \underline{J}(r)$, $J(k) = \overline{J}(k) = \underline{J}(k)$.*

Důkaz: Nechť $z_n \in Z$, $z_n \nearrow r$. Protože $r \in R$, $r \leqq r$, je $\overline{J}(r) \leqq J(r)$. Protože $z_n \in K$, $z_n \leqq r$, je $J(z_n) \leqq \underline{J}(r)$, tedy též

$$J(r) = \lim J(z_n) \leqq \underline{J}(r) \leqq \overline{J}(r) \leqq J(r).$$

Větu pro funkci $k \in K$ dostaneme změnou znaménka.

19. Platí-li

$$-\infty < \underline{J}(f) = \overline{J}(f) < \infty,$$

řekneme, že funkce f má (abstraktní Lebesgueův) integrál rovný $J(f) = \underline{J}(f) = \overline{J}(f)$. Množinu všech takových funkcí označíme L.

20. *Nechť g, $h \in L$; buď f funkce na množině M taková, že platí*

$$f(x) = g(x) + (hx),$$

kdekoli má součet napravo smysl. Pak je $f \in L$ a platí

$$J(f) = J(g) + J(h).$$

(Plyne z 15, 16.)

21. $f \in L \Rightarrow (-f) \in L$.
(Plyne z 13.)

22. *Nechť $r_k \in R$ $(k = 1, 2, \ldots)$, $r_k \nearrow f$. Pak $f \in R$, $J(f) = \lim\limits_{k\to\infty} J(r_k)$.*

Důkaz: Nechť při pevném k $z_{nk} \nearrow r_k$ pro $n \to \infty$. Buď $z_m = \max(z_{m1}, z_{m2}, \ldots, z_{mm})$. Zřejmě $z_m \leqq z_{m+1}$; nechť $z_m \nearrow r$. Pro $m \geqq k$ je $z_m \geqq z_{mk}$, tedy

$$r = \lim_{m\to\infty} z_m \geqq \lim_{m\to\infty} z_{mk} = r_k,$$

tedy

$$(\gamma) \qquad r \geqq \lim_{k\to\infty} r_k = f, \ J(r) \geqq \lim_{k\to\infty} J r_k.$$

Avšak $z_m \leqq \max(r_1, r_2, \ldots, r_m) = r_m$, tedy

$$r = \lim_{m\to\infty} z_m \leqq \lim_{m\to\infty} r_m = f,$$

tedy

$$(\delta) \qquad r \leqq f, \ J(r) = \lim_{m\to\infty} J(z_m) \leqq \lim_{m\to\infty} J(r_m).$$

Z (γ), (δ) věta ihned plyne.

23. *Buďte f_n funkce na množině M; nechť $f_n \nearrow f$. Pak platí buď $\overline{J}(f_n) \to -\infty$ nebo $\overline{J}(f_n) \to \overline{J}(f)$.*

Důkaz: Je-li $\overline{J}(f_n) = -\infty$ pro $n = 1, 2, \ldots$, věta platí. Je-li pro některé p $J(f_p) > -\infty$, je pro $n > p$ $J(f_n) \geqq J(f_p) > -\infty$; můžeme tedy předpokládat, že platí $\overline{J}(f_n) > -\infty$ pro $n = 1, 2, \ldots$. Protože $\overline{J}(f_n) \leqq \overline{J}(f)$, je též $\lim \overline{J}(f_n) \leqq \overline{J}(f)$; stačí tedy dokázat, že platí

$$\overline{J}(f) \leqq \lim_{n\to\infty} \overline{J}(f_n).$$

Tento vztah je jistě správný, je-li pro některé n $\overline{J}(f_n) = \infty$. Omezíme se tedy na případ, že platí

$$-\infty < \overline{J}(f_n) < +\infty \quad \text{pro } n = 1, 2, \ldots.$$

Zvolme $\varepsilon > 0$ a čísla $\varepsilon_n > 0$, aby $\sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n \leqq \varepsilon$. Pak existují $r_n \in R$, $r_n \geqq f$ tak, že platí

$$(\varepsilon) \qquad J(r_n) < \overline{J}(f_n) + \varepsilon_n.$$

Buď $s_n = \max(r_1, r_2, \ldots, r_n)$. (Zřejmě $s_n \in R$.)

Dokážeme indukcí, že platí

$$(\zeta) \qquad J(s_n) < \overline{J}(f_n) + \sum_{k=1}^{n} \varepsilon_k \quad \text{pro } n = 1, 2, \ldots.$$

Pro $n = 1$ (ζ) zřejmě platí; nechť platí (ζ) pro jisté n. Dejme symbolu $s_n(x) - r_{n+1}(x)$ nějaké určité hodnoty i pro ta x, kde je $s_n(x) = r_{n+1}(x) = \infty$; takto doplněnou funkci označme $s_n - r_{n+1}$. Pak platí

$$[s_n(x) - r_{n+1}(x)]_+ = s_n(x) - \min(s_n(x), r_{n+1}(x)),$$

kdekoli má rozdíl napravo smysl. (Je-li totiž $s_n(x) < r_{n+1}(x)$, je na obou stranách 0; jinak je napravo symbol $s_n(x) - r_{n+1}(x)$, a má-li tento rozdíl smysl, je nalevo totéž.) Podle 20 tedy platí

$$J((s_n - r_{n+1})_+) = J(s_n) - J(\min(s_n, r_{n+1})).$$

Protože $f_n \leqq f_{n+1} \leqq r_{n+1}$, je $f_n \leqq \min(s_n, r_{n+1})$, $\overline{J}(f_n) \leqq \leqq J(\min(s_n, r_{n+1}))$; podle indukčního předpokladu tedy platí

$$(\eta) \qquad J((s_n - r_{n+1})_+) \leqq J(s_n) - J(f_n) \leqq \sum_{k=1}^{n} \varepsilon_n.$$

Dále platí

$$[s_n(x) - r_{n+1})x)]_+ = \max(s_n(x), r_{n+1}(x)) - r_{n+1}(x),$$

kdekoli má rozdíl napravo smysl. (Stačí opět rozeznat případy $r_{n+1}(x) < < s_n(x)$ a $r_{n+1}(x) \geqq s_n(x)$.)

Protože $\max(s_n, r_{n+1}) = s_{n+1}$, platí

$$J((s_n - r_{n+1})_+) = J(s_{n+1}) - J(r_{n+1})$$

neboli

$$(\vartheta) \qquad J(s_{n+1}) = J(r_{n+1}) + J((s_n - r_{n+1})_+).$$

Z (ε), (η), (ϑ) tedy plyne

$$J(s_{n+1}) < \overline{J}(f_{n+1}) + \varepsilon_{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \varepsilon_k = \overline{J}(f_{n+1}) + \sum_{k=1}^{n+1} \varepsilon_k.$$

To je však (ζ), kde místo n je $n + 1$; tím je proveden indukční krok,

Buď $s = \lim_{n\to\infty} s_n$. Zřejmě $s \geqq f$ a z (ζ) pak dostáváme limitním přechodem (viz též (22))

$$\overline{J}(f) \leqq J(s) = \lim_{n\to\infty} J(s_n) \leqq \lim \overline{J}(f_n) + \varepsilon,$$

tedy, protože ε bylo libovolné číslo > 0,

$$\overline{J}(f) \leqq \lim \overline{J}(f_n).$$

Tím je věta dokázána.

24. *Buďte* f_n $(n = 1, 2, \ldots)$ *funkce na množině* M; *nechť* $\overline{J}(\inf_n f_n) > -\infty$. *Pak platí*

$$\overline{J}(\underline{\lim} f_n) \leqq \underline{\lim} \overline{J}(f_n).$$

Důkaz: Nechť $g_n = \inf_{k \geqq n} f_k$. Pak $g_n \nearrow \underline{\lim}_{n\to\infty} f_n$, $g_n \leqq f_n$, tedy platí podle 23

$$\overline{J}(\underline{\lim} f_n) = \overline{J}(\lim g_n) = \lim \overline{J}(g_n) \leqq \underline{\lim} \overline{J}(f_n).$$

25. *Buďte* f_n $(n = 1, 2, \ldots)$ *funkce na množině* M; *nechť* $\underline{J}(\sup_n f_n) < \infty$. *Pak platí*

$$\overline{\lim} \underline{J}(f_n) \leqq \underline{J}(\overline{\lim} f_n).$$

Důkaz: Plyne z 24 změnou znaménka.

26. *Nechť* φ, ψ, $f_n \in L$, $\varphi \leqq f_n \leqq \psi$ $(n = 1, 2, \ldots)$, $f_n \to f$. *Pak* $f \in L$ *a platí*

$$J(f) = \lim_{n\to\infty} J(f_n).$$

Důkaz: Podle 25, 24 platí

$$\overline{\lim} J(f_n) \leqq \underline{J}(f) \leqq \overline{J}(f) \leqq \underline{\lim} J(f_n).$$

27. *Nechť* $f \in L$, $c \in E_1$, $c \geqq 0$. *Pak* $\min(c, f) \in L$.

Důkaz: Zvolme $\varepsilon > 0$. Pak existuje $r \in R$, $r \geqq f$ tak, že platí $J(r) - J(f) < \varepsilon$. Položíme-li $(r - f)(x) = 0$ pro ta x, kde $r(x) = f(x) = \infty$, máme pro všechna x

$$(r - f)(x) \geqq 0 \text{ a } J(r - f) < \varepsilon.$$

Buď $r_1 = \min(r, c)$, $f_1 = \min(f, c)$. Pak platí

$$r_1 - f_1 \leqq r - f.$$

(Je-li $f(x) \geqq c$, je nalevo nula, jinak $-f_1(x) = -f(x)$ a přičteme nerovnost $r_1(x) \leqq r(x)$.) Je tedy

$$\overline{J}(r_1 - f_1) \leqq J(r - f) < \varepsilon.$$

Zřejmě $r_1 \in R$, tedy $J(r_1) > -\infty$; protože $r_1 \leqq r$, je též $J(r_1) \leqq J(r) < \infty$. Podle 16 platí ($r_1$ je konečná funkce, takže s odčítáním zde nevznikají obtíže)

$$J(r_1) - \varepsilon < J(r_1) - \overline{J}(r_1 - f_1) = \underline{J}(r_1) + \underline{J}(f_1 - r_1) \leqq \underline{J}(f_1) \leqq \overline{J}(f_1) \leqq \leqq J(r_1).$$

Protože ε bylo libovolné, platí

$$-\infty < \underline{J}(f_1) = \overline{J}(f_1) < \infty.$$

28. $f \in L \Rightarrow |f| \in L$; $f_1, f_2 \in L \Rightarrow \max(f_1, f_2)$, $\min(f_1, f_2) \in L$.

Důkaz: Podle 27 $\min(f, 0) = f_- \in L$, podobně $f_+ \in L$, tedy i $f_+ - f_- \in L$. Dále platí $\max(f_1(x), f_2(x)) = f_1(x) + [(f_2 - f_1)(x)]_+$, kdekoli má součet smysl, doplníme-li nějak $f_2 - f_1$ v bodech neurčitosti; podobně pro min.

Cvičení 2. Budiž Z základní systém vzhledem k množině M a funkcionále J. Budiž Z' množina funkcí f takových, že ke každému $\varepsilon > 0$ existují $z_1, z_2 \in Z$ tak, že $z_1 \leqq f \leqq z_2$, $J(z_2 - z_1) < \varepsilon$. Dokažte, že $Z' \subset L$ a že Z' rovněž tvoří základní systém (t. j., že jsou splněny předpoklady L_6—L_9).

Cvičení 3. Buď Z základní systém; utvořme množinu L podle 19. Budiž Z'' systém všech omezených funkcí z L. Ukažte, že Z'' je opět základní systém a že systém R'', příslušný k Z'', je množina všech zdola omezených funkcí z L. Systém L'', příslušný k Z'', se shoduje s L. Podobnou úvahu proveďte pro systém Z''' všech konečných funkcí z L.

Cvičení 4. Buď Z systém všech lomených čar v $\langle a, b \rangle$; funkcionálu J definujme podle 5. Ukažte, že systém Z', definovaný podle cvič. 2, je právě množina funkcí, které mají v $\langle a, b \rangle$ Riemannův integrál. (Funkcionálu J na množině Z' ze cvič. 2 bychom tedy mohli nazvat „abstraktním Riemannovým integrálem".)

Uvědomte si, že Lebesgueův integrál, odvozený ze systému Z všech lomených čar, je zobecněním Riemannova integrálu. Speciálním případem věty 26 je pak tato věta (*Arzelàova*):

Nechť $c \in E_1$; nechť funkce f_n, f mají v $\langle a, b \rangle$ Riemannův integrál; nechť $|f_n| \leqq c$ $(n = 1, 2, \ldots)$, $f_n \to f$. Pak $J(f_n) \to J(f)$.

Všimněte si, že se zde předpokládá existence Riemannova integrálu funkce f a ukažte na příkladě funkce f, která v racionálních bodech nabývá hodnoty 1 a jinde hodnoty 0, že tento předpoklad nelze vynechat. (Existence Lebesgueova integrálu funkce f plyne ovšem z ostatních předpokladů podle 26.)

Poznámka: Podle cvič. 4 je Lebesgueův integrál zobecněním vlastního Riemannova integrálu; snadno však nahlédneme, že není zobecněním nevlastního Riemannova integrálu. Má-li totiž funkce f Lebesgueův integrál, má též funkce $|f|$ Lebesgueův integrál; víme však, že existují nevlastní Riemannovy integrály, které nekonvergují absolutně. Z podobného důvodu nemusí mít funkce Lebesgueův integrál, má-li primitivní funkci. Na př. funkce f, určená v $\langle -1, 1\rangle$ vztahy

$$f(0) = 0,$$

$$f(x) = x^2 \sin \frac{1}{x^2} \quad \text{pro } x \neq 0,$$

má v každém bodě $x \neq 0$ spojitou derivaci a v bodě 0 derivaci rovnou nule. Funkce f' má tedy v $\langle -1, 1\rangle$ primitivní funkci i nevlastní Riemannův integrál, nemá však Lebesgueův integrál; lze ukázat, že $\underline{J}(|f'|) = \overline{J}(|f'|) = +\infty$.

29. Pomocí základního systému Z jsme tedy definovali pro některé funkce na množině M integrál; pomocí integrálu budeme nyní definovat míru. Napřed však zavedeme jistá označení.

Sjednocení, resp. průnik množin budeme značit $A + B$, $\sum_{i=1}^{n} A_i$, AB, $\prod_{i=1}^{n} A_i$ a pod.

$A - B$ značí množinu prvků, které patří k A, ale nepatří k B.

Systém množin $\mathfrak{A} \neq \emptyset$ nazveme množinovým tělesem, platí-li implikace

$$A, B \in \mathfrak{A} \Rightarrow A + B,\ A - B \in \mathfrak{A}.$$

Zřejmě

$$\emptyset = A - A \in \mathfrak{A}.$$

Čtenář snadno dokáže, že systém množin $\mathfrak{A}_1$, pro který platí jednak implikace $A, B \in \mathfrak{A}_1 \Rightarrow A + B \in \mathfrak{A}_1$, jednak implikace $A, B \in \mathfrak{A}_1$, $A \supset B \Rightarrow A - B \in \mathfrak{A}_1$, je již množinovým tělesem.

Systém množin $\mathfrak{B}$ nazveme množinovým σ-tělesem, je-li tělesem a platí-li nadto

$$B_n \in \mathfrak{B}\ (n = 1, 2, \ldots) \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} B_n \in \mathfrak{B}.$$

Je-li $\mathfrak{A}$ těleso, $A, B \in \mathfrak{A}$, pak též $AB = A - (A - B) \in \mathfrak{A}$; jestliže $A_n \in \mathfrak{A}$ $(n = 1, 2, \ldots)$, $A = \sum_{n=1}^{\infty} A_n$ (nepředpokládáme, že $A \in \mathfrak{A}$), pak pro

$B_n = \sum\limits_{i=1}^{n} A_i$ platí $\sum\limits_{n=1}^{\infty} B_n = A$, $B_1 \subset B_2 \subset \ldots$; pro $C_1 = B_1, C_{n+1} = B_{n+1} - B_n$ $(n = 1, 2, \ldots)$ platí $\sum\limits_{n=1}^{\infty} C_n = A$, $C_m C_n = \emptyset$ pro $m \neq n$. Zřejmě

$$B_n, C_n \in \mathfrak{A} \text{ pro } n = 1, 2, \ldots$$

Je-li $\mathfrak{A}$ σ-těleso, $A_n \in \mathfrak{A}$ $(n = 1, 2, \ldots)$, pak též $\prod\limits_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathfrak{A}$, jak čtenář snadno zjistí.

Funkci φ, definovanou na množinovém tělese $\mathfrak{A}$, nazveme σ-aditivní, jestliže ze vztahů

$$A_n \in \mathfrak{A} \ (n = 1, 2, \ldots),\ A_m \,.\, A_n = \emptyset \text{ pro } m \neq n,$$
$$\sum_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathfrak{A}$$

plyne, že součet řady $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \varphi(A_n)$ existuje (ve smyslu limity v $E_1{}^*$) a rovná se $\varphi(\sum\limits_{n=1}^{\infty} A_n)$.

Abychom zjistili, že φ je σ-aditivní, stačí zřejmě zjistit, že pro $A, B \in \mathfrak{A}$, $AB = \emptyset$ platí $\varphi(A) + \varphi(B) = \varphi(A + B)$ a že pro

$$A_n \in \mathfrak{A},\ A_1 \subset A_2 \subset \ldots,\ \sum_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathfrak{A}$$

platí vždy

$$\lim_{n \to \infty} \varphi(A_n) = \varphi(\sum_{n=1}^{\infty} A_n).$$

Cvičení 5. Buď $\mathfrak{B}$ systém částí množiny M, který má tyto vlastnosti: 1) $B_1, B_2 \in \mathfrak{B} \Rightarrow B_1 + B_2 \in \mathfrak{B}$, 2) $B \in \mathfrak{B} \Rightarrow M - B \in \mathfrak{B}$. Pak je $\mathfrak{B}$ množinové těleso.

30. Je-li $A \subset M$, nazveme charakteristickou funkcí množiny A (vzhledem k množině M) funkci c_A, pro niž platí

$$x \in A \Rightarrow c_A(x) = 1,$$
$$x \in M - A \Rightarrow c_A(x) = 0.$$

Zřejmě $c_{A+B} = \max(c_A, c_B)$, $c_{AB} = \min(c_A, c_B) = c_A c_B$; jestliže $AB = \emptyset$, je $c_{A+B} = c_A + c_B$; jestliže $A_1 \subset A_2 \subset \ldots$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} A_n = A$, je $c_{A_n} \nearrow c_A$; je-li $A \subset B$, je $c_{B-A} = c_B - c_A$.

31. Pro libovolnou množinu $A \subset M$ položme

$$\underline{m}(A) = \underline{J}(c_A),\ \overline{m}(A) = \overline{J}(c_A).$$

Jestliže $A_1 \subset A_2 \subset \ldots$, pak $\overline{\mathrm{m}}(A_n) \nearrow \overline{\mathrm{m}}(\sum_{n=1}^{\infty} A_n)$; vždy platí $\overline{\mathrm{m}}(\sum_{n=1}^{\infty} B_n) \leqq \sum_{n=1}^{\infty} \overline{\mathrm{m}}(B_n)$. (Tato tvrzení plynou snadno z příslušných vět o integrálu a z 30.)

32. Buď $\mathfrak{A}$ systém těch $A \subset M$, pro něž $c_A \in L$ neboli $\underline{\mathrm{m}}(A) = \overline{\mathrm{m}}(A) < \infty$; pro $A \in \mathfrak{A}$ píšeme $\mathrm{m}(A) = \underline{\mathrm{m}}(A) = \overline{\mathrm{m}}(A)$ a číslo $\mathrm{m}(A)$ nazveme měrou množiny A. Čísla $\underline{\mathrm{m}}(B)$, $\overline{\mathrm{m}}(B)$ nazýváme též dolní (horní) měrou množiny B. Čtenář se snadno přesvědčí, že systém $\mathfrak{A}$ je množinové těleso a m je na něm σ-aditivní funkce. (Je $\mathfrak{A} \neq \emptyset$, protože jistě $\emptyset \in \mathfrak{A}$.) Jestliže $A_n \in \mathfrak{A}$ $(n = 1, 2, \ldots)$, pak pro $A = \sum_{n=1}^{\infty} A_n$ platí sice $\underline{\mathrm{m}}(A) = \overline{\mathrm{m}}(A)$, ale může nastat případ $\overline{\mathrm{m}}(A) = \infty$.

Cvičení 6. Zvolme $A_0 \in \mathfrak{A}$. Pak systém všech $A \in \mathfrak{A}$, $A \subset A_0$ tvoří σ-těleso.

Cvičení 7. Buď $\mathfrak{A}_0$ systém všech $A \subset M$, pro něž je $\mathrm{m}(A) = 0$. Pak je $\mathfrak{A}_0$ σ-těleso.

Cvičení 8. Buď $\mathfrak{A}_1$ systém všech $\sum_{n=1}^{\infty} A_n$, kde $A_n \in \mathfrak{A}$. Pro $A \in \mathfrak{A}_1$ platí $\overline{\mathrm{m}}(A) = \underline{\mathrm{m}}(A)$. $\mathfrak{A}_1$ je σ-těleso a $\overline{\mathrm{m}}$ je na něm σ-aditivní funkce.

33. Řekneme, že **skoro všechny** body z M mají vlastnost V (nebo, že nějaký vztah platí v M **skoro všude** a pod.), jestliže množina těch bodů, které vlastnost V nemají (nebo kde příslušný vztah neplatí), má míru 0.

34. *Nechť* $A \subset M$, $f(x) = 0$ *pro* $x \in M - A$, $f(x) = \infty$ *pro* $x \in A$. *Je-li* $\overline{\mathrm{m}}(A) > 0$, *je* $\overline{J}(f) = \infty$; *je-li* $\overline{\mathrm{m}}(A) = \underline{\mathrm{m}}(A) = 0$, *je* $\overline{J}(f) = J(f) = 0$.

Důkaz: $f = \lim_{n\to\infty} n \cdot c_A$, tedy podle 23 je

$$\overline{J}(f) = \lim_{n\to\infty} \overline{J}(n \cdot c_A) = \lim_{n\to\infty} n \cdot \overline{\mathrm{m}}(A).$$

35. *Nechť* $-\infty < \underline{J}(f) < \overline{J}(f) < \infty$. *Pak* $|f(x)| < \infty$ *skoro všude.*

Důkaz: Buď $g(x) = 0$, je-li $|f(x)| < \infty$; jinak buď $g(x) = \infty$. Pak platí

$$g(x) = f(x) - f(x),$$

kdekoli má rozdíl napravo smysl, tedy platí

$$\overline{J}(g) \leqq \overline{J}(f) + \overline{J}(-f) = \overline{J}(f) - \underline{J}(f) < \infty.$$

Podle 34 má množina těch x, kde je $g(x) = \infty$ neboli $|f(x)| = \infty$, míru **0**.

36. *Nechť $f(x) = g(x)$ skoro všude. Pak $\overline{J}(f) = \overline{J}(g)$.*

Důkaz: Je-li $f(x) = g(x)$, buď $f_1(x) = f(x)$, $f_2(x) = 0$. Je-li $f(x) \neq g(x)$, buď $f_1(x) = \infty$, $f_2(x) = \infty$. Pak platí podle 34 $J(f_2) = 0$; dále platí

$$f_1(x) = f(x) + f_2(x),$$

kdekoli má součet napravo smysl. Platí tedy (protože $g \leqq f_1$)

$$\overline{J}(g) \leqq \overline{J}(f_1) \leqq \overline{J}(f) + \overline{J}(f_2) = \overline{J}(f).$$

Podobně zjistíme, že též $\overline{J}(f) \leqq \overline{J}(g)$.

Poznámka: V dalším bude symbol $\underset{x}{\mathrm{E}}$ [x má vlastnost V] značit vždy množinu těch x, která mají vlastnost V. Na př. $\underset{x}{\mathrm{E}}[f(x) > 0]$ znamená množinu těch x, pro něž je $f(x) > 0$.

37. *Buď $f \geqq 0$. Pak platí $J(f) = 0$, když a jen když $f(x) = 0$ skoro všude.*

Důkaz: Je-li $f(x) = 0$ skoro všude, platí podle 36 $J(f) = J(0) = 0$. Buď nyní $f \geqq 0$, $J(f) = 0$. Zvolme přirozené číslo n. Buď $A_n = \underset{x}{\mathrm{E}}\left[f(x) > \frac{1}{n}\right]$. Pak

$$\frac{1}{n} \cdot c_{A_n} \leqq f,$$

tedy

$$\overline{\mathrm{m}}(A_n) = \overline{J}(c_{A_n}) \leqq n \,.\, J(f) = 0.$$

Protože $A = \underset{x}{\mathrm{E}}[f(x) > 0] = \sum_{n=1}^{\infty} A_n$, je také $\mathrm{m}(A) = 0$.

Poznámka: Předpokladu L_7) jsme dosud náležitě využili jen ve větě 27; jinak jsme potřebovali jen, aby $\max(z_1, z_2) \in Z$, $\max(r_1, r_2) \in R$ a pod. K tomu by byl postačil slabší předpoklad

L_7'): $\quad z \in Z \Rightarrow \min(z, 0) = z_- \in Z,$

ekvivalentní s požadavkem $z \in Z \Rightarrow |z| \in Z$. Místo věty 27 bychom ovšem byli mohli dokázat jen slabší větu: $f \in L \Rightarrow f_- \in L$, ale ta by opět byla postačila k důkazu věty 28. Příklad systému funkcí tvaru $f(x) = kx$ (k libovolné) v intervalu $\langle 0, 1 \rangle$ ukazuje, že předpoklad L_7') je opravdu slabší.

V podstatě všecky věty tohoto článku bychom mohli odvodit, i kdybychom požadovali platnost L_2) jen pro celá c. V tomto případě by ovšem bylo možné nahradit L_1) i L_2) požadavkem L_1'): $f_1, f_2 \in F \Rightarrow f_1 - f_2 \in F$; L_4) by pak bylo možno vynechat.

38. *Nechť $f \in L$, $b \in E_1$, $b > 0$. Pak platí*

$$\mathop{\mathrm{E}}_{x}[f(x) > b] \in \mathfrak{A}.^{*)}$$

Důkaz: Buď $g_n = \min\left(f, b + \frac{1}{n}\right) - \min(f, b)$ $(n = 1, 2, \ldots)$. (Klademe zde event. $-\infty - (-\infty) = 0$.) Označme $\mathop{\mathrm{E}}_{x}[f(x) > b] = A_b$. Pak

$$n \cdot g_n \nearrow c_{A_b}.$$

(Je-li totiž $f(x) \leqq b$, je $g_n(x) = f(x) - f(x) = 0$ pro každé n; je-li $f(x) > b$, je $f(x) > b + \frac{1}{n}$ pro všechna n od jistého indexu, tedy $g_n(x) = b + \frac{1}{n} - b = \frac{1}{n}$ od jistého indexu.)

Protože $g_n \in L$, $c_{A_b} \leqq \frac{f_+}{b}$, je též $c_{A_b} \in L$.

39. *Nechť $f \in L$, $b \in E_1$, $b > 0$. Pak platí*

$$\mathop{\mathrm{E}}_{x}[f(x) \geqq b],\ \mathop{\mathrm{E}}_{x}[f(x) = b] \in \mathfrak{A}.$$

Důkaz:

$$\mathop{\mathrm{E}}_{x}[f(x) \geqq b] = \prod_{n=1}^{\infty} \mathop{\mathrm{E}}_{x}\left[f(x) > b - \frac{1}{n}\right],$$

$$\mathop{\mathrm{E}}_{x}[f(x) = b] = \mathop{\mathrm{E}}_{x}[f(x) \geqq b] - \mathop{\mathrm{E}}_{x}[f(x) > b].$$

40. Nechť $\overline{\mathrm{m}}(A) < \infty$. *Pak existuje $A_1 \in \mathfrak{A}$ tak, že $A_1 \supset A$, $\overline{\mathrm{m}}(A) = \mathrm{m}(A_1)$.*

Důkaz: Snadno zjistíme, že existují funkce $r_n \in R$, $r_n \geqq c_A$, $r_n \searrow f$ tak, že

$$J(f) = \overline{J}(c_A)$$

(a ovšem $f \geqq c_A$). Buď $A_1 = \mathop{\mathrm{E}}_{x}[f(x) \geqq 1]$. Pak $c_A \leqq c_{A_1} \leqq f$, tedy

$$\overline{\mathrm{m}}(A) \leqq \mathrm{m}(A_1) \leqq J(f) = \overline{J}(c_A) = \overline{\mathrm{m}}(A).$$

41. *Budiž $\mathfrak{B}$ systém těch $B \subset M$, pro něž platí implikace*

$$A \in \mathfrak{A} \Rightarrow AB \in \mathfrak{A}.$$

Pak je $\mathfrak{B}$ σ-těleso a $\overline{\mathrm{m}}$ je na $\mathfrak{B}$ σ-aditivní funkce.

---

*) Systém $\mathfrak{A}$ je definován v 32.

Důkaz: Ze vztahů $A\sum_{n=1}^{\infty}B_n = \sum_{n=1}^{\infty}AB_n \subset A$, $A(B_1 - B_2) = AB_1 - AB_2$ plyne snadno, že $\mathfrak{B}$ je σ-těleso. Je-li $B \in \mathfrak{B}$, $\overline{\mathrm{m}}(B) < \infty$, existuje $A \in \mathfrak{A}$, $A \supset B$, tedy $B = AB \in \mathfrak{A}$, tedy $\overline{\mathrm{m}}(B) = \underline{\mathrm{m}}(B)$. Je-li tedy $\overline{\mathrm{m}}(B_1) < \infty$, $\overline{\mathrm{m}}(B_2) < \infty$, $B_1B_2 = \emptyset$, je jistě $\overline{\mathrm{m}}(B_1) + \overline{\mathrm{m}}(B_2) = \overline{\mathrm{m}}(B_1 + B_2)$; je-li na př. $\overline{\mathrm{m}}(B_1) = \infty$, je tato rovnost triviální. σ-aditivita funkce $\overline{\mathrm{m}}$ na systému $\mathfrak{B}$ nyní plyne ze vztahu $\overline{\mathrm{m}}(B_n) \nearrow \overline{\mathrm{m}}(B)$, který platí, kdykoli $B_1 \subset B_2 \subset \dots$, $\sum_{n=1}^{\infty}B_n = B$.

Poznámka: Prvkům systému $\mathfrak{B}$ budeme říkat měřitelné množiny. Všimněme si, že zejména $M \in \mathfrak{B}$.

42. Funkci f na množině M nazveme měřitelnou, jestliže pro každé $b \in E_1$ je množina

$$\mathop{\mathrm{E}}_x[f(x) > b]$$

měřitelná.

43. *Každá funkce ze systému L je měřitelná.*

Důkaz: Zvolme $f \in L$, $b \in E_1$. Je-li $b > 0$, je podle 38 dokonce $\mathop{\mathrm{E}}_x[f(x) > b] \in \mathfrak{A}$. Dále je $\mathop{\mathrm{E}}_x[f(x) > 0] = \sum_{n=1}^{\infty} \mathop{\mathrm{E}}_x\left[f(x) > \frac{1}{n}\right]$; pro $b < 0$ pak užijeme vztahu

$$\mathop{\mathrm{E}}_x[f(x) > b] = M - \mathop{\mathrm{E}}_x[-f(x) \geqq -b]$$

a věty 39.

Cvičení 9. Zvolme $M = E_1$; budiž Z systém lomených čar v $(-\infty, \infty)$, ale jen těch, které pro $x \leqq 0$ i pro $x \geqq 1$ nabývají jen nulových hodnot. Dokažte, že pro systém $\mathfrak{A}_1$ ze cvič. 8 platí $\mathfrak{A}_1 = \mathfrak{A}$. Dále ukažte, že interval $I = (0, 2)$ je měřitelná množina (patří do příslušného systému $\mathfrak{B}$), ale $\underline{\mathrm{m}}(I) = 1$, $\overline{\mathrm{m}}(I) = \infty$.

Cvičení 10. Konečnou měřitelnou funkci, která nabývá jen konečného počtu hodnot, nazveme jednoduchou funkcí. Ukažte, že každou jednoduchou funkci lze psát právě jedním způsobem ve tvaru

$$\sum_{i=1}^{n} b_i c_{A_i},$$

kde $b_i \neq 0, A_i \neq \emptyset$ pro $i = 1, 2, \dots, n$, $b_i \neq b_j$, $A_iA_j = \emptyset$ pro $i \neq j$.
(Pro nulovou funkci dostáváme prázdný součet.)

Cvičení 11. Dokažte, že ke každé měřitelné funkci $f \geqq 0$ existují jednoduché funkce $f_n \geqq 0$ tak, že $f_n \nearrow f$. (Návod: Rozdělte interval $\langle 0, n\rangle$ body $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_p = n$ na $p = 2^n$ stejných dílů; utvořte $A_i = \mathop{\mathrm{E}}_x[f(x) > t_i]$, $B_i = A_i -$

$-A_{i+1}$ pro $i = 1, 2, \ldots, p-1$, $B_p = A_p$; položte $f_n = \sum\limits_{i=1}^{p} t_i c_{B_i}$. Nakreslete si obrázek; postup je zcela názorný.)

Cvičení 12. Dokažte, že součin dvou jednoduchých funkcí je opět jednoduchá funkce. (Použijte vztahu $c_A \cdot c_B = c_{AB}$.)

Cvičení 13. Je-li $f \in L$, g omezená měřitelná funkce, je $fg \in L$. (Použijte cvičení 11, 12, věty 43 a 26.)

Cvičení 14. Budiž φ σ-aditivní konečná nezáporná funkce na množinovém tělese $\mathfrak{A}$. Pak lze funkci φ rozšířit na jisté σ-těleso $\mathfrak{B} \supset \mathfrak{A}$ tak, že na $\mathfrak{B}$ je φ σ-aditivní a nezáporná. (Návod: Zvolte za M sjednocení všech prvků tělesa $\mathfrak{A}$, za Z množinu všech funkcí, které lze psát ve tvaru

$$f = \sum_{i=1}^{n} b_i c_{A_i},$$

kde $b_i \in E_1$, $A_i \in \mathfrak{A}$ pro $i = 1, 2, \ldots, n$; definujte $J(f) = \sum\limits_{i=1}^{n} b_i \varphi(A_i)$ (je ovšem třeba ukázat, že nezáleží na vyjádření funkce f). L_6)—L_8) se ověří snadno. Jestliže nyní $z_n \searrow 0$, pak je σ-aditivity plyne, že pro libovolné $\delta > 0$ je $\lim\limits_{n\to\infty} \varphi(\mathrm{E}_x[z_n(x) > \delta]) = 0$; volíme tedy δ malé a pak n velké.

Poznámka: Zvolíme-li za systém Z množinu všech lomených čar v $(-\infty, \infty)$, jsou prvky systému $\mathfrak{B}$ t. zv. Lebesgueovsky měřitelné množiny; systém $\mathfrak{B}$ se zde shoduje se systémem $\mathfrak{A}_1$, definovaným ve cvičení 8.

Volíme-li za Z systém všech funkcí, které jsou spojité v metrickém lokálně kompaktním prostoru P a které jsou mimo jistou kompaktní množinu rovny nule, snadno zjistíme, že systém $\mathfrak{A}$ obsahuje všecky kompaktní části P; je-li totiž A kompaktní část P, G_n otevřená v P, $G_n \supset A$, pak existuje otevřená množina A_n tak, že platí $A \subset A_n \subset \overline{A_n} \subset \subset G_n$ a že $\overline{A_n}$ je kompaktní. Pak existuje podle známé věty spojitá funkce $f_n \geqq 0$ tak, že $f_n(x) = 1$ pro $x \in A$, $f_n(x) = 0$ pro $x \in P - A_n$. Volíme-li $G_1, G_2, \ldots$, aby $\prod\limits_{n=1}^{n} G_n = A$ a klademe-li $g_n = \min(f_1, f_2, \ldots, f_n)$, je $g_n \searrow c_A$, tedy $c_A \in L$, $A \in \mathfrak{A}$.

Dále snadno nahlédneme, že systém $\mathfrak{B}$ obsahuje všecky uzavřené množiny. Jestliže totiž $z_n \in Z$, $z_n \nearrow r$, pak existují kompaktní A_n tak, že pro $x \in P - \sum\limits_{n=1}^{\infty} A_n$ je $r(x) = 0$. Je-li tedy $A \in \mathfrak{A}$, existují kompaktní A_n tak, že $A \subset \sum\limits_{n=1}^{\infty} A_n$. Je-li nyní F uzavřená v P, je $AF = A \cdot F \cdot \sum\limits_{n=1}^{\infty} A_n = \sum\limits_{n=1}^{\infty} A \cdot F \cdot A_n$. Protože $F \cdot A_n$ je kompaktní, je $A \cdot F \cdot A_n \in \mathfrak{A}$ pro $n = 1, 2, \ldots$, tedy též $AF \in \mathfrak{A}$.

Systém $\mathfrak{B}$ obsahuje tedy i všecky borelovské množiny prostoru P.*) Všimněme si ještě, že ke každému $A \in \mathfrak{A}$ a ke každému $\varepsilon > 0$ existuje otevřená množina G tak, že $m(G) < m(A) + \varepsilon$, $A \subset G$. (Viz důkaz věty 40; pro $r \in R$ je množina $\underset{x}{E}[r(x) > 1 - \delta]$ otevřená.)

44. Podáme nyní abstraktní definici vícerozměrného integrálu (vlastně jen dvourozměrného; dále lze postupovat indukcí). Poznamenejme, že $M_1 \times M_2$ (kartézský součin množin M_1, M_2) znamená množinu všech uspořádaných dvojic $[x, y]$, kde $x \in M_1$, $y \in M_2$; na př. pro rovinu E_2 platí $E_2 = E_1 \times E_1$. Je-li f funkce na $M_1 \times M_2$ a je-li $y \in M_2$, značí f_y funkci na množině M_1, pro niž platí $f_y(x) = f(x, y)$.

45. *Buďte Z_1, Z_2 základní systémy vzhledem k množinám M_1, M_2 a funkcionálám J_1, J_2. Buď f_n posloupnost funkcí na $M_1 \times M_2$ o těchto vlastnostech: $f_n \searrow 0$; pro každé $y \in M_2$ je $(f_n)_y \in Z_1$ a funkce φ_n, určená vztahem $\varphi_n(y) = J_1((f_n)_y)$, patří do Z_1. Pak $J_2(\varphi_n) \to 0$.*

Důkaz: Zvolme y; pak $(f_n)_y \searrow 0$, tedy podle L_9) (pro systém Z_1) je $J_1((f_n)_y) \searrow 0$. To znamená, že $\varphi_n(y) \searrow 0$; opět podle L_9) (pro systém Z_2) platí $J_2(\varphi_n) \searrow 0$.

Poznámka: V dalším značí $J_2(J_1(f)) = J_2(\varphi)$, kde $\varphi(y) = J_1(f_y)$ a pod.

46. Je-li $\mathfrak{S}$ systém množin, buď $\mathfrak{S}_s$ systém všech $\sum\limits_{i=1}^{n} A_i$, kde $A_i \in \mathfrak{S}$, $A_i A_j = \emptyset$ pro $i \neq j$. (Klademe $\sum\limits_{i=1}^{0} A_i = \emptyset$.) Řekněme, že $\mathfrak{S}$ má vlastnost α, jestliže $A, B \in \mathfrak{S} \Rightarrow A - B \in \mathfrak{S}_s$.

47. *Má-li $\mathfrak{S}$ vlastnost α, je $\mathfrak{S}_s$ množinové těleso.*

Důkaz: I. Jestliže $A, B \in \mathfrak{S}_s$, $AB = \emptyset$, zřejmě $A + B \in \mathfrak{S}_s$.

II. Jestliže $A_i, B \in \mathfrak{S}$, $A = \sum\limits_{i=1}^{n} A_i$, $A_i A_j = \emptyset$ pro $i \neq j$, pak podle I. $A - B = \sum\limits_{i=1}^{n} (A_i - B) \in \mathfrak{S}_s$.

III. Jestliže $A \in \mathfrak{S}_s$, $B_i \in \mathfrak{S}$, pak

$$A - \sum_{i=1}^{n} B_i = (\ldots((A - B_1) - B_2) - \ldots - B_n) \in \mathfrak{S}_s.$$

IV. Jestliže $A, B \in \mathfrak{S}_s$, pak podle III. $A - B \in \mathfrak{S}_s$, podle I. též $A + B = B + (A - B) \in \mathfrak{S}_s$.

*) Systém borelovských množin je definován jako nejmenší σ-těleso, které obsahuje všecky uzavřené množiny.

48. *Buď $\mathfrak{A}$ množinové těleso. Pak lze každou funkci tvaru $\sum_{i=1}^{m} a_i c_{A_i}$, kde $a_i \in E_1$, $A_i \in \mathfrak{A}$, psát ve tvaru $\sum_{i=1}^{n} b_i c_{B_i}$, kde $b_i \in E_1$, $B_i \in \mathfrak{A}$, $B_i B_j = \emptyset$ pro $i \neq j$.*

Důkaz: Zřejmě stačí dokázat, že součet dvou funkcí druhého tvaru je opět funkcí druhého tvaru. Buďte tedy $f = \sum_{i=1}^{n} b_i c_{B_i}$, $g = \sum_{i=1}^{p} d_i \cdot c_{D_i}$ dvě funkce druhého tvaru, t. j. $B_i B_j = \emptyset$ pro $i \neq j$, $D_k D_l = \emptyset$ pro $k \neq l$. Buď $M = \sum_{i=1}^{n} B_i + \sum_{j=1}^{p} D_j$, $B_0 = M - \sum_{i=1}^{n} B_i$, $D_0 = M - \sum_{j=1}^{p} D_j$, $b_0 = d_0 = 0$. Pak $f = \sum_{i=0}^{n} b_i \sum_{j=0}^{p} c_{B_i D_j}$, $g = \sum_{j=0}^{p} d_j \sum_{i=0}^{n} c_{B_i D_j}$, tedy

$$f + g = \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{p} (b_i + d_j)\, c_{B_i D_j},$$

kde $B_i D_j \cdot B_k D_l = \emptyset$ pro $(i, j) \neq (k, l)$.

49. *Buďte Z_1, Z_2 základní systémy vzhledem k množinám M_1, M_2 a funkcionálám J_1, J_2. Předpokládejme (viz cvič. 3), že Z_1, Z_2 jsou systémy všech omezených funkcí z L_1, resp. z L_2. Buďte $\mathfrak{A}_1$, $\mathfrak{A}_2$ příslušné systémy měřitelných množin s konečnou měrou; buď $(\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2)$ systém všech $A_1 \times A_2$, kde $A_1 \in \mathfrak{A}_1$, $A_2 \in \mathfrak{A}_2$. Budiž Z systém všech funkcí z na množině $M_1 \times M_2$, které lze psát ve tvaru*

$$z = \sum_{i=1}^{n} b_i c_{A_i},$$

kde $A_i \in (\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2)$, $b_i \in E_1$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$.

Pak je Z základní systém na množině $M_1 \times M_2$ vzhledem k funkcionále J, definované vztahem

$$J(z) = J_2(J_1(z)) = J_1(J_2(z)).$$

Důkaz: Zřejmě platí L_6), L_8); z 45 plyne, že platí též L_9). Rovněž je snadno patrné, že $J_1(J_2(z)) = J_2(J_1(z))$. Abychom dokázali L_7), uvažme, že $A_1 \times A_2 - B_1 \times B_2 = A_1 \times (A_2 - B_2) + (A_1 - B_1) \times \times A_2 B_2$; odtud plyne, že $(\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2) = \mathfrak{S}$ má vlastnost α. Podle 47 je $\mathfrak{S}_s$ množinové těleso; podle 48 lze každou funkci $z \in Z$ psát ve tvaru $\sum_{i=1}^{n} b_i c_{A_i}$, kde $A_i \in \mathfrak{S}_s$, $A_i A_j = \emptyset$ pro $i \neq j$, tedy též ve tvaru $\sum_{i=1}^{p} d_i c_{B_i}$, kde $B_i \in \mathfrak{S}$, $B_i B_j = \emptyset$ pro $i \neq j$; pak $\min(\sum_{i=1}^{p} d_i \cdot c_{B_i}, c) = \sum_{i=1}^{p} (\min(d_i, c)) \cdot c_{B_i}$ pro $c \geqq 0$.

50. *Pro libovolnou funkci f na množině $M_1 \times M_2$ platí*

$$\underline{J}(f) \leqq \underline{J}_1(\underline{J}_2(f)) \leqq \overline{J}_1(\overline{J}_2(f) \leqq \overline{J}(f).$$

Důkaz: Je-li $r \in R$ (na $M_1 \times M_2$), je zřejmě $J_1(J_2(r)) = J(r)$; pro $r \geqq f$ je tedy

$$\overline{J}_1(\overline{J}_2(f) \leqq J_1(J_2(r)) = J(r),$$

tedy též

$$\overline{J}_1(\overline{J}_2(f)) \leqq \overline{J}(f).$$

Nerovnost pro dolní integrály se dokáže obdobně.

51. *Nechť $f \in L$ (na $M_1 \times M_2$). Pak platí*

$$J(f) = J_1(\underline{J}_2(f)) = J_1(\overline{J}_2(f) = J_2(\underline{J}_1(f) = J_2(\overline{J}_1(f)).$$

Důkaz: Z věty 50 plyne

$$J(f) \leqq \underline{J}_1(\underline{J}_2(f)) \leqq \overline{J}_1(\underline{J}_2(f)) \leqq \overline{J}_1(\overline{J}_2(f)) \leqq J(f),$$

tedy platí $J_1(\underline{J}_2(f)) = J_1(\overline{J}_2(f))$. Ostatní se dokáže obdobně.

Poznámka: Podle vět 35 a 37 platí pro funkci $f \in L$, že pro skoro všecka $y \in M_2$ je $f_y \in L_1$; protože pak nezáleží na hodnotách funkce na množině míry nula, píše se někdy též $J(f) = J_2(J_1(f))$.

Použijeme-li věty 50, resp. 51 na charakteristickou funkci nějaké části $A \subset M_1 \times M_2$, dostaneme větu o vyjádření míry pomocí integrálu. Záleží ovšem více na tom, zda platí $\overline{m}(A) = \underline{m}(A)$ než na tom, zda množina A je měřitelná; víme, že při $\overline{m}(A) = \infty$ může být množina A měřitelná, i když $\underline{m}(A) < \infty$. (Viz cvič. 9; srv. však s cvič. 8.) Naopak se ovšem může stát, že $\underline{m}(A) = \overline{m}(A) = \infty$ a že A není měřitelná; stačí vzít množinu A_1, pro niž $\underline{m}(A_1) < \overline{m}(A_1) < \infty$ a měřitelnou množinu A_2, disjunktní s A_1 a takovou, že $\underline{m}(A_2) = \overline{m}(A_2) = \infty$. Pak jistě $A = A_1 + A_2$ není měřitelná a je $\underline{m}(A) = \overline{m}(A) = \infty$.

LITERATURA.

E. Čech: Bodové množiny, Praha, 1936.

S. Saks: Theory of the Integral, Monografie Matematyczne, Warszawa, 1937.

Л. В. Канторович, Б. З. Вулих и А. Т. Пинскер: Функциональный анализ в полуупорядоченных пространствах, Москва, 1950.