Časopis pro pěstování matematiky

Aleksandr Ja. Chinčin

Nejjednodušší lineární kontinuum

Časopis pro pěstování matematiky, Vol. 76 (1951), No. 3, 158--174

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/117008

NEJJEDNODUŠŠÍ LINEÁRNÍ KONTINUUM

A. JA. CHINČIN.

1. Porovnání obvyklých způsobů výstavby základů analysy a geometrie.

Všeobecně používané methody výstavby logických základů analysy a geometrie — těchto dvou základních oborů matematické vědy — zařadily se tak pevně do běžného obsahu samotné matematiky i jejího vyučování, že nevyvolávají již skoro žádné methodologické diskuse.*) Pokud jde o analysu, jsou tyto methody vyjádřeny především známými — logicky navzájem ekvivalentními — theoriemi iracionálních čísel, které byly vytvořeny ve druhé polovině minulého století; pokud pak jde o geometrii — Hilbertovou soustavou. Obě methody nesou zřetelnou pečeť základní methodologické tendence své doby — tendence k aritmetisaci celé matematické vědy.

Pokud jde o způsob výstavby logických základů analysy a geometrie, projevuje se tato tendence v tom, že se otázka logické korektnosti formální struktury obou těchto oborů redukuje na otázku obdobné korektnosti formální aritmetiky; jakmile se tato redukce podařila, považujeme náš úkol za vyřešený.

Takové pojetí tohoto úkolu může samozřejmě vyvolat a také skutečně vyvolává řadu otázek; chceme přirozeně především vědět, odkud čerpá aritmetika sama své logické zdůvodnění? Tato otázka, stejně jako řada jiných otázek, souvisejících s uvažovaným problémem, byla často diskutována a je stále předmětem diskuse ve vědecké literatuře; zde se jí však úplně vyhneme, neboť se netýká bezprostředně thematu tohoto článku; pro nás bylo důležité jen konstatování, že současné soustavy logických základů analysy a geometrie vidí zcela stejně svůj úkol v úplné redukci formální struktury těchto disciplin na základy aritmetiky.

Ještě důležitější je však pro nás to, abychom zjistili, že se za tímto společným úkolem skrývá velmi hluboký a významný rozdíl v úloze svěřované aritmetice zmíněnými obory. Aritmetika je sice v obou případech jakýmsi logickým kriteriem formální korektnosti dané theorie, plní však tuto svou funkci v analyse a v geometrii zcela různou formou.

*) Ponecháváme v tomto článku úplně stranou otázky, spojené s tak zvaným intuicionistickým směrem, protože se netýkají našeho thematu.

Geometrie se buduje podle klasického plánu výstavby samostatné disciplíny. Nejdříve se stanoví skupina základních nedefinovaných pojmů (v Hilbertově soustavě jsou to především pojmy bodu, přímky a roviny); náhradou za nepodanou definici těchto pojmů je — zavedená rovněž hned na počátku — skupina jejich formálních vlastností a vzájemných vztahů, formulovaných jako matematické věty a tvořících soustavu axiomů geometrie.

Při dalším budování daného oboru musí každý nově zavedený pojem býti plně definován pomocí základních pojmů a pojmů, které již byly definovány; pro každé nově uváděné tvrzení (větu) musí být podán důkaz, spočívající na axiomech a větách, které již byly dokázány. Nezávisle na tom musí býti soustava axiomů podrobena zkoumání, pokud jde o bezespornost, vzájemnou nezávislost a úplnost. Právě při tomto zkoumání uskutečňuje aritmetika svěřený jí úkol logické aprobace geometrické vědy. Tak na př. zjištění bezespornosti soustavy axiomů geometrie se provádí tak, že se vybuduje soustava aritmetických objektů — aritmetický model, jež plně vyhovuje všem axiomům geometrie (úlohu bodu, přímky a roviny při tom hrají skupiny čísel a rovnice, takže takový model není nic jiného než soustava t. zv. analytické geometrie).

Podobně můžeme k důkazu nezávislosti některého axiomu na axiomech ostatních vybudovat — a skutečně také obvykle budujeme — takový aritmetický model, který splňuje všechny ostatní axiomy, pro nějž se však zvolený námi axiom ukáže nesprávným.

Význam aritmetiky pro základy geometrické vědy spočívá tedy právě v tom, že dodává materiál pro vypracování modelů, jejichž účelem je zjištění logické oprávněnosti té neb oné soustavy axiomů. Základní pojmy geometrie zachovávají zde plně svou povahu objektů, jež se nedefinují, nevzniká ani pomyšlení na *definici* na př. bodu jako skupiny čísel; takový úmysl by zde mohl vyvolat pouze podiv.

Zcela jinak je tomu v analyse. Podat logické základy tohoto oboru znamená v podstatě vybudovat logické základy theorie kontinua (a především kontinua lineárního), tedy uspořádané množiny hodnot, jichž nabývá při své spojité změně proměnná veličina, tento nejdůležitější předmět a nástroj každého analytického zkoumání.

Jak se tedy obvykle methodologicky přistupuje k této úloze?

To je sdostatek známo. Postupuje se tak, že se k racionálním číslům, jež jsou předmětem aritmetiky, připojí nová, „iracionální" čísla, která jsou určitými kombinacemi racionálních čísel, t. j. ryze aritmetickými objekty, jež mají přesnou definici a jejichž vlastnosti se přesně dokazují (Dedekindovy „řezy", Cantorovy „fundamentální řady" a pod.). Racionální a iracionální čísla tvoří dohromady množinu reálných čísel; tato množina se uspořádá pomocí několika jednoduchých zásad; definují se všechny algebraické a analytické operace s reálnými čísly a stanoví se zákony těchto operací.

Konečně *nazveme* kontinuem množinu všech reálných čísel. Kontinuum je tedy definováno jako jistý zákonitě vybudovaný aritmetický objekt a nevyžaduje ovšem jako takový žádného dalšího zdůvodňování. O žádné axiomatice není zde ovšem ani řeč, neboť matematická analysa není při tomto pojetí samostatným oborem, nýbrž kapitolou aritmetiky. Aritmetický model, který v případě geometrie byl pouze dočasným prostředkem důkazu logické oprávněnosti axiomatiky této vědy, v případě analysy se ztotožňuje s kontinuem, jež je základním pojmem tohoto oboru. Vidíme tedy, že úloha aritmetického modelu, jenž je stejně určen k zabezpečení základů geometrie i analysy, jeví se podle nynějších tradic jako hluboce rozdílná pro ten nebo onen případ.

2. Methodologická kritika.

Vzhledem k rozdílu, který jsme právě konstatovali, vzniká přirozeně otázka, zda je způsoben skutečným stavem věcí, t. j. zda mu odpovídá skutečný rozdíl mezi analysou a geometrií v jejich logické struktuře, ideovém obsahu nebo praktických aplikacích, či zda se na něj musíme dívat jako na fakt, vyvolaný pouze náhodnými zvláštnostmi historického vývoje a postupně kanonisovaný tradicí; v tomto druhém případě pak, zda je tento rozdíl logicky a methodologicky účelný a zda nemáme porovnat obě dané formy výstavby logických základů, zvolit tu z nich, která je methodologicky dokonalejší a užívat ji v obou případech.

Myslíme především, že ani v ideově-logické ani v reálně-praktické povaze analysy a geometrie není nic, co by činilo nezbytným, anebo aspoň ospravedlňovalo uvedený rozdíl v pojetí jejich logických základů. Jako všechny matematické discipliny, je také analysa a geometrie abstraktním obrazem jistých vztahů mezi předměty reálného světa. V geometrii jde při tom o prostorové vztahy, v analyse (aspoň v jejím klasickém pojetí) o vztahy kvantitativní. V obou případech tvoří základ příslušného obrazu reálného světa jisté nejjednodušší objekty; pro geometrii jsou to nejjednodušší prostorové formy, pro analysu pak souhrn poloh, jimiž prochází při své změně typická proměnná veličina. Obě discipliny jsou stejně — a při tom velmi těsně — spojeny s reálným světem; ty objekty a zákonitosti reálného světa, jejichž abstraktním obrazem jsou pojmy a zákonitosti analysy a geometrie, jsou stejně přístupné a mohou býti předmětem každodenní zkušenosti. S nejjednoduššími geometrickými útvary, stejně tak jako s nejjednoduššími druhy proměnných veličin a funkcionální závislosti se setkává také ten, kdo nikdy neslyšel ani o geometrii a tím spíše ani o analyse.

Jestliže tedy nenalézáme v povaze geometrie a analysy žádné rysy, které by ospravedlňovaly tradiční hluboký rozdíl ve způsobu jejich logického odůvodnění, pak se může zdát, že tento rozdíl je způsoben rozdílnou úlohou aritmetiky v ideovém obsahu těchto dvou věd. Mohli bychom uvažovat asi takto: zatím co geometrie se zabývá převážně *formou* prostorových útvarů, t. j. takovým okruhem problémů, jenž je v zásadě zcela cizí ideji čísla, pracuje analysa vždy s *kvantitou*, t. j. kategorií, která se nedá oddělit od ideje čísla a jejíž studium je proto nemyslitelné bez nerozlučného spojení s aritmetikou; proto může přirozeně aritmetika klesnouti při odůvodnění geometrie k úloze logické sondy, kterou v ní fakticky má, kdežto při budování analysy se nemůže spokojiti s touto dočasnou úlohou, nýbrž musí nutně zaujmouti pevné místo v obsahu a struktuře této disciplíny. Je však snadno patrné, že tato úvaha spočívá na zjednodušené a vulgarisované představě o thematice analysy i geometrie. Skutečně, na jedné straně analysa obsahuje topologickou část, která má velmi značný rozsah i velkou ideovou váhu a je právě tak cizí ideám čísla a měření, jako nejvzdálenější těmto ideám partie geometrie (čtenář uvidí v dalších kapitolách tohoto článku, jaký je asi rozsah této části, jež při obvyklém výkladu není osamostatněna); na druhé straně metrické theorie, neodlučitelně spojené s koncepcemi aritmetiky, tvoří velmi podstatnou část geometrie a v této části idea čísla vystupuje ve stejné formě a se stejným fundamentálním významem jako v metrické části analysy. Analysa a geometrie neprojevují tedy ani ve své vnitřní povaze ani ve svém poměru k aritmetice žádné zásadní rozdíly, které by činily nutným anebo aspoň přirozeným takový rozdíl ve výstavbě jejich logických základů.

Když jsme zjistili tyto okolnosti, zkoumejme nyní, zda některá z obou uvažovaných cest má nějaké podstatné přednosti oproti druhé.

Když přednášející musí říkat svým posluchačům, že na př. π je jistý Dedekindův řez v oboru racionálních čísel, t. j. jistý rozklad souhrnu všech racionálních čísel na dvě skupiny, splňující zcela určité podmínky, pak sotva může nepociťovat jakési zvláštní rozpaky. Tyto rozpaky se jeví při bližším rozboru jako jakási výčitka vědeckého svědomí; vždyť nikdo, ani posluchač ani přednášející, nikdy nespojovali a nebudou spojovat s číslem π představu o jakýchsi dvou třídách racionálních čísel a tím spíše *ztotožňovat* ve svých představách tuto dvojici tříd s číslem π. Stejně tak nikdo nikdy nemyslel na číslo π jako na třídu Cantorových fundamentálních řad. Přednášející chápe ovšem dobře rozdíl mezi formální definicí a reálným významem, ví také velmi dobře, že taková definice čísla π probíhá plně v kolejích ustálené formalistické tradice současné matematiky — tradice bezvýhradného ztotožňování isomorfních útvarů; nemůže se však zbavit rozpaků a tajně závidí geometrovi, který neříká svým posluchačům „přímka *je* rovnice 1. stupně“, nýbrž „přímka *je vyjádřena* rovnicí 1. stupně“, *nedefinuje* bod jako trojici čísel, nýbrž s čistým vědeckým svědomím mluví o tom, že bodu *odpovídá* trojice čísel. S jakou radostí by sdělil také on svým posluchačům, že každému bodu kontinua odpovídá jistý řez v oboru racionálních čísel, a obráceně; jak by to usnadnilo jeho postavení a jeho pedagogický úkol! Tradice to však nedovoluje, vždyť musíme číslo π nějak definovat, musíme odpovědět na otázku „co je to π?“. Jak to však máme učinit, když neztotožňujeme číslo π s řezem? Můžeme ovšem zavést reálné číslo (prvek kontinua) jako základní nedefinovaný pojem; pak bychom však museli začínat axiomatikou kontinua, a to není zvykem; analysa není geometrie.

Proč tedy přece vědecké svědomí, jakýsi cit pro ideovou a methodologickou čistotu a spořádanost protestuje tak vytrvale proti podobným definicím?

Ovšem že proto, že tyto definice, ač jsou formálně bezvadné a vznikají právě v důsledku formalistických tendencí, nejsou při tom v žádné souvislosti ani s myšlenkovým obsahem definovaného pojmu, ani s tím, co mu odpovídá v reálném světě. Příliš horlivý matematik nebude možná vůbec chtít vzít zřetel na tyto argumenty, také on si však musí všimnout myšlenkových a methodologických nesrovnalostí, k nimž vedou, přes veškerou svou formální nezranitelnost, definice tohoto typu. A na tyto nesrovnalosti nemusíme dlouho čekat. V geometrii uvažujeme takto: ztotožňovat bod roviny s dvojicí čísel nesmíme proto, že tentýž bod má v různých souřadných soustavách různé souřadnice a právě to, že různé dvojice čísel jsou přiřazovány jako souřadnice témuž bodu, ukazuje, že bod sám je cosi jiného, je odlišný od kterékoli z těchto dvojic a nezávislý na volbě souřadnicového systému; kdyby mimo tyto dvojice neexistovala žádná geometrická realita, jak bychom pak mohli přiřazovat ve dvou různých soustavách dvě různé číselné dvojice čemusi, co je po každé stejné?

Není však v analyse situace naprosto stejná? Copak zde nemůžeme změnit měřítko a počátek tak, aby hodnoty té neb oné proměnné byly vyjádřeny zcela různými čísly? Copak nemůžeme na př. změřit tutéž teplotu podle Reaumura i podle Celsia? Jestliže Réaumurova stupnice ukazuje 16°, Celsiova pak 20°, zda pak není zřejmé, že číslo 16, to je jedna věc, číslo 20 je něco jiného a skutečná hodnota teploty je zase čímsi jiným, zvláštním, svérázným, co nemůže býti ztotožněno s číslem 16 již proto, že pak bychom je museli stejně oprávněně ztotožnit s číslem 20.

Číselná přímka a především její racionální síť je pohodlný měřicí nástroj, jejž často a s prospěchem *pokládáme* na kontinuum; je však methodologicky chybné *ztotožňovat* tento nástroj s kontinuem, na nějž jej položíme; jak jsme poznamenali, je to chybné již proto, že můžeme přece na totéž kontinuum položit také jinou měřicí síť. Taková záměna je konečně methodologicky chybná také proto, že měřené kontinuum a měřicí síť nejsou zdaleka shodné ve všech svých vlastnostech. Kontinuum se nutně jeví, tak jak je původně dáno, jako zcela homogenní, to znamená, že okolí libovolných dvou jeho prvků se nijak navzájem neliší; při tom je však množina reálných čísel se svou velmi složitou strukturou velmi vzdálena homogenity; uvažujme třeba jen rozdíl mezi racionálními a iracionálními čísly, velmi podstatný pro číselnou přímku, jemuž však neodpovídají naprosto žádné rozdíly uvnitř kontinua, na něž tuto číselnou přímku položíme (tentýž bod dostává racionální nebo iracionální přiřazenou hodnotu podle toho, jaké je měřítko a počátek).

Těchto zřejmých nesrovnalostí zcela postrádá geometrie, v jejichž logických základech pečlivě oddělujeme aritmetický model, jenž je prostředkem logického zdůvodnění a měřicím nástrojem, a ryze geometrický substrát, jemuž má tento model dáti logický základ a jejž má měřiti. Máme všechny důvody k názoru, že ty methodologické a ideové zásady, které jsme zjistili v logických základech analysy, nejsou vadou, která by byla organicky vlastní tomuto oboru matematiky, nýbrž jsou způsobeny výlučně historicky vzniklou tradiční formou těchto základů; tato tradice byla způsobena svou dobou, obdobím extrémní formalisace matematiky, obdobím, kdy se z methodologie matematických věd vylučuje veškerý její ideový obsah a methodologie sama se beze zbytku redukuje na formální logiku a smí klást požadavky pouze jejím jménem.

Zároveň nám však geometrie také přímo ukazuje, jak překonat tuto tradici. Musíme uznat analysu za samostatnou matematickou disciplinu, musíme stanovit její základní pojmy a axiomy, při čemž budeme používat aritmetického modelu — souhrnu reálných čísel — pouze jako prostředků k odůvodnění logické oprávněnosti zavedené soustavy axiomů a — později — jako měřicího nástroje. Že se to vše dá provést bez podstatných obtíží, není ničím novým; všechny jednotlivé podrobnosti této konstrukce v té neb oné formě matematická věda již dávno zná. Naznačíme v dalším jednu z četných možných cest takové výstavby. Učiníme zde ještě jen tuto methodologickou poznámku: způsob výstavby základů analysy, který zde vyložíme, má, kromě již uvedených, také tu přednost, že při něm se nejzřetelněji oddělí topologická část analysy, t. j. ta její část, která se buduje bez použití myšlenky měření; tuto methodologickou přednost běžně užívané soustavy nemají.

3. Axiom spojitosti a princip indukce.

Následující dva axiomy nemohou vyvolat žádné pochybnosti ani pokud jde o výhodnost jejich použití při formální výstavbě theorie, ani pokud jde o jejich ideovou průzračnost a plnou shodu s bezprostřední intuitivní koncepcí kontinua.

Axiom I. *Kontinuum je (lineárně) uspořádaná množina, neobsahující ani první ani poslední prvek.*

Axiom II. *Mezi dvěma různými prvky kontinua existuje vždy aspoň jeden prvek.*

Tyto axiomy skoro nevyžadují komentáře. Učiníme jen dvě samozřejmé poznámky:

1. pojem „mezi“ v axiomu II nevyžaduje ovšem definice; jeho význam je úplně určen uspořádáním prvků kontinua, jež je postulováno v axiomu I;

2. existuje velmi mnoho naprosto rozdílných pořadových typů, vyhovujících axiomům I a II; tak množina racionálních čísel vyhovuje oběma těmto axiomům, jestliže uspořádáme tato čísla podle velikosti.

Budeme vyjadřovat obvyklým termínem „menší než" a označovat obvyklým symbolem $<$ (pro obrácený vztah: „větší než", $>$) ten vztah mezi prvky kontinua, jenž udává uspořádání požadované axiomem I; smluvíme se, že budeme označovat malými písmeny, latinskými i řeckými, prvky kontinua.

Potřebujeme nyní především axiom spojitosti zaručující nepřetržitost našeho kontinua, nepřetržitost, jež je rovněž nepostradatelným rysem našeho intuitivního chápání kontinua a má základní význam při dalším budování analysy. Jak je dobře známo, nemůže množina racionálních čísel ani množina čísel algebraických býti adekvátním aritmetickým modelem kontinua právě proto, že jim chybí tato spojitost; je také známo, jakým způsobem a v jakém smyslu se zjišťuje, že tyto dvě množiny nejsou spojité a zároveň se dokazuje spojitost množiny všech reálných čísel. Každá theorie iracionálních čísel poskytuje nám proto již hotový formální prototyp axiomu, který má vyjádřit spojitost zkoumaného pořadového typu.

Zabývejme se tou formou, která je dána nejrozšířenější totiž Dedekindovou theorií. Smluvíme se, že budeme nazývat *řezem* kontinua každé rozdělení množiny jeho prvků na dvě neprázdné množiny („třídy") A a B takové, že libovolný prvek z A je menší než libovolný prvek z B; smluvíme se dále, že budeme nazývat prvek α *rozhraním* daného řezu, jestliže všechny prvky menší než α patří do třídy A a všechny prvky větší než α patří do třídy B (α samo patří buď do třídy A nebo do třídy B, podle druhu řezu). Axiom spojitosti má pak následující velmi jednoduchou formu.

Dedekindův axiom. *Každý řez kontinua má rozhraní* (a to jediné, jak vyplývá z axiomu II).

Zcela obdobným způsobem vede každá jiná theorie reálných čísel k jinému formálně ekvivalentnímu tvaru axiomu spojitosti. Lze jej ovšem také formulovat způsobem, který není přímo inspirován žádnou z existujících theorií reálných čísel. Budeme se zde zabývat jednou z takových formulací, jež je zajímavá pro svůj zvláštní tvar, který z ní činí svého druhu princip indukce.

Význam, který má ve výstavbě aritmetiky tak zvaný princip úplné matematické indukce, je dobře znám; mezi pořadovými typy, v nichž po každém prvku je prvek bezprostředně následující, je tímto principem jednoznačně charakterisován nejjednodušší typ — typ přirozené řady číselné. Ukazuje se, že axiom spojitosti — jenž charakterisuje spojité typy mezi všemi typy, u nichž neexistují prvky, které by bezprostředně následovaly za daným prvkem, nýbrž u nichž naopak mezi libovolnými dvěma prvky vždy leží další prvek — může mít formu, v níž rovněž vystupuje v úloze tak říkajíc „spojitého" principu indukce. Tato hluboká a obsažná analogie je jednou z předností induktivní formulace; druhá její přednost spočívá v tom, že v tomto tvaru se axiom spojitosti velmi výhodně používá při důkazu všech těch vět analysy, které jej vůbec vyžadují. Uvedeme nyní tuto formulaci.

Axiom III. *Nechť jistá vlastnost* S *prvků kontinua vyhovuje těmto dvěma požadavkům:*

1. *existuje prvek* α *takový, že všechny prvky menší než* α *mají vlastnost* S;

2. *jestliže vlastnost* S *mají všechny prvky menší než jistý prvek* β, *pak existuje takový prvek* $\gamma > \beta$, *že vlastnost* S *mají všechny prvky menší než* γ.

Potom všechny prvky kontinua mají vlastnost S.

Abychom se přesvědčili, že tato formulace je skutečně ekvivalentní s axiomem spojitosti (ovšem za předpokladu, že kontinuum splňuje axiomy I a II), dokážeme, že je rovnocenný s uvedeným Dedekindovým axiomem.

1. Ukážeme nejdříve, že z axiomů I a II a Dedekindova axiomu vyplývá axiom III. Skutečně, nechť pro jistou vlastnost S prvků kontinua jsou splněny předpoklady 1 a 2 tohoto axiomu; máme dokázat, že pak všechny prvky kontinua mají vlastnost S.

Budeme říkat, že prvek kontinua λ patří do třídy A, jestliže všechny prvky menší než λ mají vlastnost S; a do třídy B, není-li tomu tak. Podle prvního předpokladu axiomu III existují prvky, které náleží do A. Jestliže do třídy A náleží všechny prvky kontinua, pak naše tvrzení je dokázáno. Předpokládejme proto, že existují prvky, patřící do třídy B, a ukažme, že to vede ke sporu.

Je zřejmé, že uvedené rozdělení prvků kontinua do tříd A a B je řezem, a tento řez má podle Dedekindova axiomu určité rozhraní α. Ukážeme, že prvek α nutně patří do třídy A. Skutečně, kdyby tomu tak nebylo, pak by to znamenalo, že existuje prvek $\lambda < \alpha$, který nemá vlastnost S; pak by však žádný prvek ležící mezi λ a α (takové prvky existují podle axiomu II) nemohl patřit do třídy A; avšak všechny tyto prvky, jež jsou menší než α, musí patřit do třídy A, jak vyplývá přímo z definice rozhraní. Tedy $\alpha \in A$,*) tedy všechny prvky, jež jsou menší než α, mají vlastnost S; pak však podle druhého předpokladu axiomu III existuje takový prvek $\alpha' > \alpha$, že všechny prvky menší než α' mají rovněž vlastnost S. Z toho plyne, že $\alpha' \in A$; na druhé straně je však α' větší než α, takže $\alpha' \in B$. Spor, který jsme obdrželi, dokazuje naše tvrzení.

2. Dokážeme nyní, že z axiomů I, II a III plyne Dedekindův axiom. Mějme libovolný řez (A, B) našeho kontinua; ukážeme, že musí mít rozhraní. Označíme S vlastnost prvků kontinua — patřiti do třídy A našeho

*) Zde a dále znamená $a \in M$ ovšem, že prvek a patří do množiny M.

řezu. Jestliže α je libovolný prvek třídy A, pak všechny prvky $\lambda < \alpha$ patří rovněž do třídy A a tedy mají rovněž vlastnost $\mathbf{S}$. Pro vlastnost $\mathbf{S}$ je tedy první předpoklad axiomu III splněn. Předpokládejme nyní, že všechny prvky menší než jistý prvek β mají vlastnost $\mathbf{S}$, t. j. patří do třídy A. Uvažujme soubor prvků větších než β. Jestliže patří všechny do třídy B, pak β je rozhraní našeho řezu a naše tvrzení je dokázáno; kdyby však existoval prvek $\gamma > \beta$, který by patřil do třídy A, pak by též všechny prvky menší než β patřily do třídy A; tedy, kdyby náš řez neměl rozhraní, pak by vlastnost $\mathbf{S}$ splňovala též druhý předpoklad axiomu III. Na základě tohoto axiomu bychom pak usoudili, že vlastnost $\mathbf{S}$ mají všechny prvky kontinua, t. j. že patří všechny do třídy A; třída B by byla tedy prázdná, což je ve sporu s předpokladem, že (A, B) je řez. Tento spor dokazuje naše tvrzení.

Náš princip indukce (axiom III) je tedy ekvivalentní Dedekindovu axiomu, a proto též libovolné formě axiomu spojitosti.

Abychom viděli názorně typický způsob užití axiomu III k důkazu vět analysy, uveďme několik příkladů.*)

Věta I. *Každá monotonní omezená posloupnost prvků kontinua má limitu.*

Důkaz. Nechť posloupnost prvků kontinua

$$a_1, a_2. \ldots, a_n, \ldots$$

je monotonní a omezená; pro určitost předpokládejme, že je neklesající a omezená shora, takže

1. $a_n \leqq a_{n+1}$ $(n = 1, 2, \ldots)$,
2. $a_n < c$ $(n = 1, 2, \ldots)$,

kde c je jistý prvek kontinua. Budeme říkat, že prvek λ našeho kontinua má vlastnost $\mathbf{S}$, jestliže pro všechna dosti velká n platí

$$a_n > \lambda,$$

t. j. jestliže členové naší posloupnosti při svém růstu s rostoucím n překročí dříve nebo později prvek λ. Je zřejmé, že vlastnost $\mathbf{S}$ mají všechny prvky $\lambda < a_1$. Pro tuto vlastnost je tedy splněn první předpoklad axiomu III.

Předpokládejme nyní, že naše posloupnost nemá limitu a ukažme, že pak je pro vlastnost $\mathbf{S}$ splněn též druhý předpoklad axiomu III. Skutečně, nechť tuto vlastnost mají všechny prvky menší než jistý prvek β. Snadno se dokáže, že pak také prvek β má vlastnost $\mathbf{S}$; skutečně, kdyby tomu tak

*) Pojmy limity a spojitosti, s nimiž se operuje v dalších dvou větách, jsou ovšem míněny ryze topologicky (viz jejich definice v následujícím oddílu). Čtenář může ostatně spojovat s nimi také obvyklé představy, což zde nevede k žádným nedorozuměním.

nebylo, pak bychom měli $a_n \leqq \beta$ pro každé n; jestliže však λ značí libovolný prvek menší než β, pak pro všechna dosti velká n jest

$$\lambda < a_n \leqq \beta,$$

neboť λ má vlastnost $\mathbf{S}$. Ježto však prvek $\lambda < \beta$ je libovolný, znamená to právě, že $a_n \to \beta$ pro $n \to \infty$. Jestliže tedy, jak jsme předpokládali, limita neexistuje, pak prvek β musí mít vlastnost $\mathbf{S}$; tedy existuje jisté $a_n > \beta$; pak však zřejmě všechny prvky $\lambda < a_n$ mají vlastnost $\mathbf{S}$, pro něž je tedy splněn také druhý předpoklad axiomu III (úlohu γ má zřejmě a_n). Na základě tohoto axiomu usoudíme, že vlastnost $\mathbf{S}$ musí náležet všem prvkům kontinua; prvek c však podle 2 tuto vlastnost nemá, což je právě spor, který jsme potřebovali.

Věta II. *Funkce $f(x)$, spojitá v intervalu*) (a, b), nabývá v tomto intervalu všech hodnot, ležících mezi $f(a)$ a $f(b)$.*

Důkaz. Mějme pro určitost $f(a) < f(b)$ a nechť u je libovolný prvek kontinua, ležící mezi $f(a)$ a $f(b)$. Budeme říkat, že prvek λ má vlastnost $\mathbf{S}$, jestliže buď splňuje nerovnost $f(\lambda) < u$ anebo leží mimo interval (a, b). Vlastnost $\mathbf{S}$ zřejmě náleží všem $\lambda < a$ a tedy splňuje první předpoklad axiomu III.

Ukážeme nyní, že není-li pro žádný prvek x hodnota funkce $f(x)$ rovna u, vlastnost $\mathbf{S}$ vyhovuje též druhému předpokladu tohoto axiomu. Nechť všechny prvky menší než jistý prvek β mají vlastnost $\mathbf{S}$; ukážeme, že se najde prvek $\gamma > \beta$ takový, že vlastnost $\mathbf{S}$ mají též všechny prvky menší než γ. Je-li $\beta < a$ nebo $\beta > b$, pak je to zřejmé (v prvním případě můžeme vzít jako γ prvek a, ve druhém pak libovolný prvek větší než β). Nechť proto platí $a \leqq \beta \leqq b$. Je-li $a \leqq \lambda < \beta$, pak $f(\lambda) < u$; ježto funkce $f(x)$ je pro $x = \beta$ spojitá, musíme mít také $f(\beta) \leqq u$ (je-li $\beta = a$, pak je tato nerovnost zřejmě rovněž splněna). Ježto podle našeho předpokladu $f(\beta)$ musí býti různé od u, je $f(\beta) < u$; z toho především plyne, že $\beta < b$, neboť podle předpokladů o prvku u jest $f(b) > u$; dále, ježto $f(\beta) < u$, můžeme zase v důsledku spojitosti funkce $f(x)$ pro $x = \beta$ tvrdit: v intervalu (a, b) existuje prvek $\gamma > \beta$ takový, že $f(\lambda) < u$ pro všechna λ z intervalu daného nerovnostmi $a \leqq \lambda \leqq \gamma$; to však znamená, že všechny prvky $\lambda < \gamma$ mají vlastnost $\mathbf{S}$, která tedy skutečně splňuje také druhý předpoklad axiomu III.

Na základě tohoto axiomu můžeme usoudit, že vlastnost $\mathbf{S}$ mají všechny prvky kontinua, t. j. že $f(\lambda) < u$ pro $a \leqq \lambda \leqq b$; to však není pravda, neboť $f(b) > u$. Tímto sporem je věta dokázána.

Uvedené dva příklady ukazují, jak snadno se užívá axiomu III k důkazu vět analysy.

---

*) *Intervalem* (někdy přesněji: *uzavřeným intervalem*) (a, b) nazýváme zde a v dalším množinu prvků x, vyhovujících nerovnostem $a \leqq x \leqq b$; nerovnosti $a < x < b$ definují *otevřený interval* (a, b).

Axiom III vyznačuje mezi pořadovými typy, které vyhovují axiomu II, spojité čili kontinuální typy. Nejjednodušší lineární kontinuum, které je základem matematické analysy, je jedním z těchto typů a jeho vyznačení v jejich souhrnu je úkolem dalších axiomů. Je však důležité poznamenat, že skoro celá topologická část analysy*) může být vybudována na základě axiomů I—III a není proto specifická pro nejjednodušší lineární kontinuum, nýbrž se přenáší bez jakýchkoliv změn na libovolný kontinuální typ.

Pokud jde o tyto typy samotné, jsou, jak známo, velmi rozmanité. Jsou mezi nimi především typy, které mají stejnou mohutnost jako nejjednodušší lineární kontinuum, na př. lineárně uspořádaná mnohorozměrná kontinua. Příkladem takového kontinua může být množina „číselných dvojic" (x, y), kde $0 < x < 1$, $0 \leq y \leq 1$, při čemž $(a, b) < (c, d)$, jestliže $a < c$ nebo $a = c$, $b < d$; geometrickým obrazem tohoto kontinua je množina bodů čtverce $0 < x < 1$, $0 \leq y \leq 1$, uspořádaná tak, že uvnitř každé svislé úsečky jsou body uspořádány zdola nahoru, samotné svislé úsečky pak zleva napravo; toto kontinuum má stejnou mohutnost jako nejjednodušší lineární kontinuum, liší se však od něho svým pořadovým typem; to zjistíme nejsnadněji, když si všimneme toho, že na tomto kontinuu nemůže býti hustou**) žádná spočetná množina, neboť množina všech svislých úseček má nespočetnou mohutnost (mohutnost kontinua) a proto vždy budou existovat svislé úsečky, které neobsahují žádný bod této spočetné množiny.

Takové „linearisované" mnohorozměrné kontinuum obsahuje na každém svém úseku intervaly, podobné (ve smyslu shodnosti pořadových typů) nejjednoduššímu lineárnímu kontinuu, a je tedy jakýmsi postupným navrstvením nejjednodušších lineárních kontinuí. Existují však, jak známo, též taková kontinua, která se liší v mnohem hlubším smyslu od nejjednoduššího kontinua, neboť mají větší mohutnost a vůbec neobsahují intervalů podobných nejjednoduššímu kontinuu; jsou to především „hyper-kontinua", sestrojovaná pomocí transfinitních schemat. Takovým hyperkontinuem je na př. soubor všech „řetězců", jejichž členy jsou přirozená čísla a jež mají typ množiny transfinitních čísel druhé třídy. Pravidlo uspořádání spočívá zde v tom, že ze dvou takových řetězců pokládáme za první ten, u něhož stojí menší přirozené číslo na tom místě, kde se po prvé v těchto dvou řetězcích objevují různá čísla.

Všechny tyto rozmanité kontinuální typy, z nichž jsme si všimli jako příkladů pouze několika nejjednodušších, vyhovují axiomům I až

*) Rozumíme tím souhrn těch pojmů a vět analysy, které mohou býti formulovány a dokázány bez pomoci pojmů spojených s měřením; všechny vlastnosti objektů analysy, s nimiž má co činiti tato část, jsou invariantní vůči spojitým transformacím; proto je právě vhodné nazývat tuto část topologickou.

**) Množinu M prvků daného kontinua nazýváme všude hustou v tomto kontinuu, jestliže každý interval kontinua obsahuje aspoň jeden prvek z množiny M.

III, takže všechny věty topologické části analysy zůstávají pro ně v platnosti. Vyznačení nejjednoduššího lineárního kontinua v tomto souboru je nerozlučně spjato se zavedením metriky a stává se nezbytným pouze při přechodu od topologické části analysy k její metrické části.

4. Vybudování topologických kapitol analysy.

Topologické kapitoly analysy spočívají tedy plně na axiomech I až III, a můžeme již nyní přistoupit k jejich vybudování. Rozumí se samo sebou, že takové uspořádání výkladu, kdy celá topologická část se plně rozvine před zavedením elementů metriky, je sice velmi vhodná pro methodologické zkoumání, naprosto se však nehodí při vyučování (pokud ovšem nejde o kurs se zvláštním methodologickým určením). Abychom to učinili zřejmým, stačí si připomenout, že před zavedením metriky nemůžeme provádět s prvky kontinua žádné aritmetické operace a nemůžeme definovat elementární funkce (kromě konstant a funkce $y = x$).

Je samozřejmé, že v rámci tohoto článku můžeme podat pouze nejstručnější náčrtek vybudování analysy a zvláště její topologické části. Definujeme obvyklým způsobem pojem funkcionální závislosti a pak přejdeme k rozboru pojmu limity a k theorii limitního přechodu. Nemůžeme především mluvit, ze zřejmých důvodů, o rozdílu proměnné veličiny a její limity a musíme tedy formulovat samotnou definici limity topologicky, poněkud odlišně od obvyklé formulace. K tomu je, jak známo, velmi vhodné zavést pojem okolí daného prvku. Nazýváme *okolím* prvku a každý interval (otevřený nebo uzavřený), který obsahuje uvnitř prvek a. Smluvíme se dále, že budeme nazývat „okolím bodu $+\infty$ (po př. $-\infty$)" množinu všech prvků, které jsou větší (menší) než jakýsi určitý prvek. Je-li y funkcí z, pak výraz „$y \to b$ pro $x \to a$", jenž je ekvivalentní s výrazem

$$\lim_{x \to a} y = b,$$

má tento přesný smysl: *ať je V jakékoliv okolí bodu b, existuje takové okolí U bodu a, že y patří do V kdykoli x je různé od a a patří do U.* Není obtížné definovat tímto způsobem též pojmy limes superior a limes inferior. Stejně tak jako při obvyklém výkladu, je vhodné zavést k tomu nejdříve pojem „částečných limit" funkce y (při $x \to a$). Označujeme tak každý prvek b, který má následující vlastnost: ať je V jakékoliv okolí prvku b a U jakékoliv okolí prvku a, existuje takové (různé od a) $x \in U$, že příslušné y patří do V. Limes superior a limes inferior se pak definují jako horní resp. dolní hranice množiny částečných limit (za předpokladu, že tato množina je omezená; existence horní a dolní hranice u každé omezené množiny se dokáže před tím pomocí axiomu III). Obvyklým způsobem se dokazuje, že limes superior a limes inferior jsou částečnými limitami (anebo obecněji, že množina částečných limit je uzavřená) a jestliže splývají, pak funkce má určitou jedinou limitu. Stejně jako při obvyklém výkladu (ba dokonce v poněkud širším smyslu) případy, kdy a nebo b se stávají rovnými $+\infty$ nebo $-\infty$, nevyžadují zvláštních method a plně se zařazují do obecného schematu.

Věty o limitě součtu, součinu atd. zde ovšem scházejí. Plně je zachována a dokazuje se snadněji než při obvyklém výkladu věta o proměnné veličině, vložené mezi dvěma jinými, které mají stejnou limitu: celý důkaz se redukuje na poznámku, že patří-li tyto dvě veličiny do určitého okolí daného prvku, pak sevřená mezi nimi veličina patří do něho také. Vůbec je zajímavé, že když formulujeme definici pojmu limity topologicky, zjednodušujeme zpravidla podstatně výklad důkazů většiny vět z theorie limit; tato skutečnost zasluhuje pozornosti, především v pedagogickém směru, také s hlediska obvyklého výkladu kursu analysy.

Když jsme takto probrali theorii limity, přecházíme k topologické části nauky o funkční závislosti.

Spojitost funkce $f(x)$ pro $x = a$ lze definovat stejně jako při obvyklém způsobu výkladu dvojím způsobem: buď požadavkem

$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a),$$

anebo pomocí podmínky: $f(x)$ leží v libovolně blízkém okolí prvku $f(a)$, jestliže x patří do dostatečně blízkého okolí prvku a; ekvivalence těchto dvou definicí nevyžaduje ovšem při topologickém pojetí pojmu limity žádného důkazu, neboť vyplývá přímo z této koncepce.

Spojitost na intervalu se definuje podobně jako při obvyklém výkladu jako spojitost v každém prvku tohoto intervalu. Pojem stejnoměrné spojitosti postrádá obsahu, protože nelze porovnávat velikost okolí dvou různých prvků.

Pojmy bodů nespojitosti prvního a druhého druhu se definují stejně jako při obvyklém výkladu, neboť se opírají pouze o pojem limity. Obvyklým způsobem zjistíme, že monotonní funkce může mít pouze nespojitosti prvního druhu. Otázka mohutnosti množiny bodů nespojitosti ovšem odpadá, neboť mohutnost samotného kontinua není určena. Pojmy úplné variace, funkce s omezenou variací a pojem absolutní spojitosti zde ovšem chybí.

Většina vlastností spojitých funkcí zůstává v platnosti a snadno se dokazuje. Viděli jsme již, jak lze dokázat, že spojitá funkce nabývá všech hodnot ležících mezi dvěma danými. Stejně jednoduše se dokazuje omezenost a uzavřenost množiny hodnot spojité funkce na libovolném intervalu. Jako ilustraci probereme větu o tom, že *funkce $f(x)$, spojitá v intervalu (a, b) dosahuje v něm své horní hranice β.*

Při **důkazu** budeme říkat, že prvek kontinua λ má vlastnost **S**, jestliže je splněna jedna z těchto podmínek:

1. λ leží vně intervalu (a, b);

2. $a \leqq \lambda \leqq b$, a horní hranice funkce $f(x)$ v intervalu (a, λ) je menší než β.

Zřejmě všechna $\lambda < a$ mají vlastnost **S**, takže tato vlastnost vyhovuje prvnímu předpokladu axiomu III. Ukážeme nyní, že není-li tvrzení věty správné, pak tato vlastnost vyhovuje též druhému předpokladu axiomu III; předpokládáme tedy, že $f(x) < \beta$ pro všechna x z intervalu (a, b).

Nechť vlastnost **S** mají všechny prvky menší než jistý prvek α; máme ukázat, že pak existuje prvek $\gamma > \alpha$, který má rovněž zmíněnou vlastnost prvku α. Jestliže $\alpha < a$, můžeme zřejmě položit $\gamma = a$; případ $\alpha > b$ není možný, neboť pak prvek b by měl též vlastnost **S**, t. j. horní hranice funkce $f(x)$ v intervalu (a, b) by byla menší, než β, což je ve sporu s definicí β; tedy $a \leqq \alpha \leqq b$.

Podle našeho předpokladu $f(\alpha) < \beta$; nechť β' je libovolný prvek ležící mezi $f(\alpha)$ a β, takže $f(\alpha) < \beta'$; ježto funkce $f(x)$ je spojitá pro $x = \alpha$, platí tato nerovnost též pro všechny prvky x z jistého okolí (γ', γ) prvku α. Nechť nejdříve $a < \alpha < b$; pak zřejmě můžeme předpokládat, že $a < \gamma' < \alpha < \gamma < b$; pro všechny prvky x intervalu (γ', γ) máme $f(x) < < \beta' < \beta$; tedy horní hranice funkce $f(x)$ v tomto intervalu nepřekračuje β' a tedy je menší než β; totéž však platí také pro interval (a, γ'), neboť γ' je menší než α, a proto má vlastnost **S**; tedy též v celém intervalu (a, γ) je horní hranice funkce $f(x)$ menší než β, t. j. prvek γ (a tedy též všechny prvky $\lambda < \gamma$) má vlastnost **S**. Jestliže $\alpha = a$, pak z $f(\alpha) < \beta'$ plyne, že $f(x) < \beta'$ pro všechna x z jistého (a, γ) a docházíme ke stejnému výsledku; konečně při $\alpha = b$ zjistili bychom stejným způsobem, že pro jisté γ', kde $a < \gamma' < b$, horní hranice funkce $f(x)$ je menší než β v každém z intervalů (a, γ') a (γ', b), a tedy také v celém intervalu (a, b), což odporuje definici prvku β. Tedy vlastnost **S** splňuje druhý předpoklad axiomu III.

Použijeme-li tohoto axiomu, dospíváme k závěru, že tuto vlastnost mají všechny prvky kontinua. Pro prvek b značí však vlastnost **S**, že horní hranice funkce $f(x)$ v intervalu (a, b) je menší než β, což není správné. Tento spor dokazuje větu.

Vidíme tedy, že všechny nejdůležitější vlastnosti spojitých funkcí zůstávají zachovány pro všechny kontinuální typy. Rozumí se, že odpadají věty o součtu, součinu atd. spojitých funkcí; naproti tomu věta o spojitosti složené funkce zůstává zřejmě zachována v plném rozsahu.

Můžeme dále na základě známé Baireovy konstrukce definovat funkce první, druhé atd. třídy (počítaje v to ovšem též transfinitní třídy). Nejen všechny pojmy, nýbrž také všechny výsledky této topologické theorie platí v neztenčené míře; zvláště platí na př. známá Bairova věta o charakteristické strukturální vlastnosti funkcí první třídy.

5. Vyznačení nejjednoduššího kontinua.

Nejjednodušší kontinuum se odlišuje od ostatních lineárních kontinuálních typů tím, že obsahuje spočetnou hustou množinu. Snadno se dokáže, že všechna kontinua, která mají tuto vlastnost, jsou si navzájem podobná a že tedy požadavek existence spočetné „base" definuje jediný kontinuální typ; je to, jak se rozumí samo sebou, právě lineární kontinuum matematické analysy.

S formálního hlediska můžeme ovšem rovnou zavést jako čtvrtý axiom postulát existence spočetné base, což by bylo nejkratší cestou k zavedení metriky a vybudování metrické části analysy; není však bez zajímavosti otázka, zda není možné nahradit tento postulát takovým ekvivalentním požadavkem, jehož formulace by neobsahovala pojem mohutnosti, jenž je cizí naší (a vlastně také obvyklé) soustavě, a opírala se jen o pojmy a termíny, dobře známé z již vybudované části analysy.

Lze udat několik takových ekvivalentních tvarů čtvrtého axiomu, a některé z nich nejsou methodologicky nezajímavé. Jeden z nich nyní zvolíme.

Axiom IV. *Existuje taková spojitá funkce $\varphi(x, y)$ dvou proměnných, že pro $x < y$ je vždy*

$$x < \varphi(x, y) < y. \tag{*}$$

Poznámka I. Předpokládá se, že spojitost funkce φ i nerovnosti (*) zůstávají v platnosti pro hodnoty $\pm\infty$ veličin x a y; jinak řečeno, předpokládá se existence pro libovolná a a b konečných limitních hodnot $\varphi(a, +\infty) > a$, $\varphi(-\infty, b) < b$, $\varphi(-\infty, +\infty)$.

Poznámka 2. Je zřejmé, že axiom II je bezprostředním důsledkem axiomu IV. Proto, kdybychom si nekladli za cíl sestrojit celou topologickou větev analysy před zavedením axiomu IV, mohli bychom úplně vynechat axiom II.

Je výhodné představovat si veličinu $\varphi(x, y)$ jako „střed" intervalu (x, y) (to je pojem, jenž se dosud pochopitelně nevyskytoval). Lze proto pojímat axiom IV jako postulát existence středu v každém intervalu, při čemž na tomto středu se požaduje pouze, aby ležel vždy uvnitř intervalu a závisel spojitě na jeho koncových bodech. Ukazuje se, že tento postulát platí pouze pro nejjednodušší kontinuum jako jediné ze všech kontinuálních typů (tato okolnost ukazuje, s jakými potížemi a obětmi musí býti spojeny pokusy zavésti metriku do některého složitějšího kontinua). Abychom se o tom přesvědčili, stačí ovšem ukázat, že z axiomu IV vyplývá existence spočetné base daného kontinua; k tomu nyní přistoupíme.

Bude pro nás výhodné zavést za symboly $+\infty$, $-\infty$ nová označení a položit $-\infty = a_0$, $+\infty = a_1$. Položíme dále

$$\varphi(a_0, a_1) = a_{\frac{1}{2}},$$
$$\varphi(a_0, a_{\frac{1}{2}}) = a_{\frac{1}{4}},\ \varphi(a_{\frac{1}{2}}, a_1) = a_{\frac{3}{4}},$$
$$\varphi(a_0, a_{\frac{1}{4}}) = a_{\frac{1}{8}},\ \varphi(a_{\frac{1}{4}}, a_{\frac{1}{2}}) = a_{\frac{3}{8}},\ \varphi(a_{\frac{1}{2}}, a_{\frac{3}{4}}) = a_{\frac{5}{8}},\ \varphi(a_{\frac{3}{4}}, a_1) = a_{\frac{7}{8}}, \text{ atd.}$$

Myslíme si, že tento postup pokračuje neomezeně; každý nový krok spočívá v tom, že pro dva sousední již sestrojené prvky a_α a a_β klademe

$$\varphi(a_\alpha, a_\beta) = a_{\frac{\alpha+\beta}{2}}.$$

Obdržíme takto zřejmě spočetnou množinu D prvků a_α, kde α nabývá všech možných hodnot tvaru $\frac{k}{2^n}$, $0 \leqq k \leqq 2^n$. Nazveme prvek a_α, kde $\alpha = \frac{k}{2^n}$, „prvkem řádu n"; ježto $\frac{k}{2^n} = \frac{2k}{2^{n+1}}$, je každý prvek řádu n zároveň prvkem řádu $n + 1$. Ukážeme nyní, že množina D je hustá v našem kontinuu. Za tím účelem připojíme k množině D všechny její hromadné body, t. j. utvoříme t. zv. „uzávěr" D^* množiny D. Jak známo, množina D^* je uzavřená, t. j. obsahuje všechny své hromadné body. Máme ukázat, že tato množina D^* je právě celé naše kontinuum.

Předpokládejme, že tomu tak není; jak známo, jestliže nějaká uzavřená množina není totožná s celým kontinuem, pak ty prvky kontinua, které do ní nepatří, nutně tvoří celé otevřené — t. zv. styčné — intervaly. Nechť (a, b) je jeden ze styčných intervalů množiny D^*, takže prvky a a b patří do této množiny, avšak ani jeden prvek, ležící mezi a a b, do ní nepatří. Poznamenáváme, že nevylučujeme ze zkoumání případy $a = -\infty$ a $b = +\infty$.

Označme r_n největší prvek řádu n, který není větší než a; a označme s_n nejmenší prvek řádu n, který není menší než b; je zřejmé, že r_n a s_n jsou *sousední* prvky řádu n; ježto (jak jsme již zjistili) prvky řádu n jsou vždy zároveň prvky řádu $n + 1$, zřejmě je $r_n \leqq r_{n+1}$, $s_n \geqq s_{n+1}$; každá z posloupností r_n $(n = 1, 2, \ldots)$ a s_n $(n = 1, 2, \ldots)$ je omezená a monotonní a tedy má určitou limitu. Snadno zjistíme, že $\lim\limits_{n\to\infty} r_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = b$; skutečně, ježto máme $r_n \leqq a$, je jistě $a' = \lim\limits_{n\to\infty} r_n \leqq a$; kdybychom však měli $a' < a$, pak by interval (a', b), jenž je částí každého z intervalů (r_n, s_n), nemohl obsahovat uvnitř žádný bod množiny D a tedy také žádný bod množiny D^*; zvláště by nemohl prvek a patřit do množiny D^*, kdežto ve skutečnosti do této množiny patří. Podobným způsobem se přesvědčíme, že $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = b$. Z toho vyplývá, ježto funkce $\varphi(x, y)$ je spojitá, že

$$\lim_{n\to\infty} \varphi(r_n, s_n) = \varphi(a, b) = c.$$

Protože však r_n a s_n jsou dva sousední prvky řádu n, $\varphi(r_n, s_n)$ je prvek řádu $n + 1$; tento prvek patří do množiny D a nemůže proto ležet uvnitř intervalu (a, b), a tedy ani prvek $c = \varphi(a, b)$, jenž je limitou prvků $\varphi(r_n, s_n)$ pro $n \to \infty$, nemůže ležet uvnitř tohoto intervalu, což zřejmě odporuje vlastnosti 2 funkce $\varphi(x, y)$. Tento spor dokazuje naše tvrzení.

Každé kontinuum, splňující axiom IV, má tedy skutečně spočetnou basi, t. j. je podobné, ve smyslu pořadového typu, nejjednoduššímu lineárnímu kontinuu.

Tím je dovršena axiomatika kontinua a tedy také celé budovy matematické analysy.

Příští krok musí spočívat v důkazu podobnosti mezi kontinuem, které jsme zbudovali a souborem všech řezů množiny racionálních čísel; tímto krokem zároveň dokazujeme bezespornost naší soustavy axiomů a zavádíme metriku do našeho kontinua. Provedení tohoto kroku, když již je dokázána existence spočetné base kontinua, jakož i vybudování metrických kapitol analysy na základě takto zavedené metriky je dobře známo a nevyžaduje žádného zvláštního komentáře; proto můžeme považovat náš úkol za skončený.

Uspěchi matematičeskich nauk,
sv. IV, seš. 2 (30), s. 180—197 (r. 1949).