Miroslav Laitoch
Über die Nullstellenanzahl del Lösungen der Differentialgleichung $y'' = Q(t) \cdot y$

Acta Universitatis Palackianae Olomucensis. Facultas Rerum Naturalium. Mathematica-Physica-Chemica, Vol. 1 (1960), No. 1, 5--9

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/116988`

1960 – ACTA UNIVERSITATIS PALACKIANAE OLOMUCENSIS FACULTAS RERUM SCIENTIARUM TOM 3

Katedra matematiky přírodovědecké fakulty.
Vedoucí: prof. RNDr. J. Metelka.

ÜBER DIE NULLSTELLENANZAHL DER LÖSUNGEN DER DIFFERENTIALGLEICHUNG $y'' = Q(t) . y$

MIROSLAV LAITOCH

(Eingelangt am 14. September 1959)

In diesem Artikel werden mittels der Transformationstheorie [1] der Lösungen der Differentialgleichung $y'' = Q(t) . y$ einige Kriterien für die Bestimmung der Nullstellenanzahl der Lösungen im Intervall $\langle a, b\rangle$ abgeleitet. Die angeführte Transformationstheorie dient auch zur Ableitung der Oszillationskriterien für die erwähnte Differentialgleichung [2].

Betrachten wir die Differentialgleichung

$$y'' = Q(t) . y, \tag{a}$$

wobei der Koeffizient Q im Intervall $\langle a, b\rangle$ eine stetige Funktion ist.

Nun führen wir zwei Definitionen ein.

1. *Wir sagen, dass die Differentialgleichung* (a) *im Intervall $\langle a, b\rangle$ vom Typus m ist, wenn in diesem Intervall mindestens eine ihrer Lösungen gerade m Nullstellen hat und die übrigen Lösungen höchstens m (genauer m oder $m - 1$) Nullstellen besitzen.*

2. *Wir sagen, dass die Differentialgleichung* (a) *im Intervall $\langle a, b\rangle$ vom Typus m^* ist, wenn eine Losung $y = y(t)$ dieser Differentialgleichung im Intervall $\langle a, b\rangle$ mit gerade m Nullstellen existiert, für welche $y(a) = y(b) = 0$ ist, wobei jede andere Lösung, die im Intervall $\langle a, b\rangle$ auch gerade m Nullstellen hat, von der Lösung $y = y(t)$ linear abhängt.*

Satz 1. *Es sei im Intervall $\langle a, b\rangle$ die Differentialgleichung $y'' = Q_n(t) . y$ vom Typus n und die Differentialgleichung $y'' = Q_{n+1}(t) . y$ vom Typus $n + 1$ gegeben. Wenn für den Koeffizienten Q der Diferentialgleichung* (a) *im Intervall $\langle a, b\rangle$ die Relationen $Q_{n+1}(t) \leqq Q(t) \leqq Q_n(t)$ gelten, wobei die erste Gleichheit nicht identisch gilt, dann ist die Differentialgleichung* (a) *im Intervall $\langle a, b\rangle$ vom Typus n.*

Beweis. Zuerst zeigen wir, daß im Intervall $\langle a, b\rangle$ in diesem Fall keine Lösung der Differentialgleichung (a) mehr als n Nullstellen besitzen kann.

Wäre dies der Fall, dann hätte im Intervall $\langle a, b\rangle$ die Lösung $y = y(t)$ der Differentialgleichung $y'' = Q_{n+1}(t) \,.\, y$ mit $y(a) = y(b) = 0$ dem bekannten Sturm'schen Vergleichssatz zufolge mindestens $n + 2$ Nullstellen gegen Voraussetzung.

Umgekehrt, es existiert eine Lösung der Differentialgleichung (a), die im Intervall $\langle a, b\rangle$ mindestens n Nullstellen besitzt. Zum Beispiel, diese Eigenschaft hat die Lösung $y = y(t)$, für welche $y(a) = 0$ ist, wie es aus der Sturm'schen Vergleichssatz folgt, denn der Voraussetzung zufolge gilt im Intervall $\langle a, b\rangle$ die Ungleichung $Q(t) \leqq Q_n(t)$.

Satz 2. *Es sei im Intervall $\langle a, b\rangle$*

$$Q_n(t) = \sqrt{\varphi'(t)} \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{\varphi'(t)}}\right)'' - \varphi'^2(t),$$

wobei folgendes gilt:

1) *die Funktion φ besitzt eine stetige Ableitung 3. Ordnung,*
2) $\varphi'(t) > 0$,
3) $\varphi(b) - \varphi(a) = (n - 1) \,.\, \pi$;

dann ist die Differentialgleichung

$$y'' = Q_n(t) \,.\, y \tag{a_n}$$

im Interval $\langle a, b\rangle$ vom Typus n^*.

Beweis. Die Differentialgleichung (a_n) hat eine partikulare Lösung

$$y(t) = \frac{\sin\,[\varphi(t) - \varphi(a)]}{\sqrt{\varphi'(t)}}$$

mit $y(a) = y(b) = 0$, die im Intervall $\langle a, b\rangle$ gerade n Nullstellen besitzt. Jede andere, von dieser unabhängige Lösung hat im Intervall $\langle a, b\rangle$ gerade $n - 1$ Nullstellen, wie aus dem Sturm'-schen Vergleichssatz folgt.

Spezielle Kriterien

1. *Wenn im Intervall $\langle a, b\rangle$ für den Koeffizienten Q der Differentialgleichung* (a) *folgende Relationen*

$$-n^2\pi^2 \leqq (b - a)^2 \,.\, Q(t) \leqq -(n - 1)^2\,\pi^2 \qquad (n \ldots \text{natürliche Zahl})$$

gelten, wobei die erste Gleichheit nicht identisch gilt, dann ist die Differentialgleichung (a) *im Intervall $\langle a, b\rangle$ vom Typus n.*

2. *Wenn im Intervall $\langle a, b\rangle$, $a > 0$, für den Koeffizienten Q der Differentialgleichung* (a) *folgende Relationen*

$$-4n^2\pi^2 \leqq \log^2 \frac{b}{a} \,.\, [4t^2 + 1 + Q(t)] \leqq -4(n - 1)^2\,\pi^2 \qquad (n \ldots \text{natürliche Zahl})$$

gelten, wobei die erste Gleichheit nicht identisch gilt, dann ist die Differentialgleichung (a) *im Intervall $\langle a, b\rangle$ vom Typus n.*

Beweis. Die Funktion $\varphi(t) = \frac{(n-1)\pi}{b-a}(t-a)$ erfüllt die Voraussetzungen 1—3 des Satzes 2. Es ist leicht zu zeigen, daß in diesem Fall $Q_n = -\frac{(n-1)^2\pi^2}{(b-a)^2}$ ist. Die Differentialgleichung $y'' = -\frac{(n-1)^2\pi^2}{(b-a)^2} . y$ ist also im Intervall $\langle a, b\rangle$ vom Typus n^* und die Differentialgleichung $y'' = -\frac{n^2\pi^2}{(b-a)^2} . y$ vom Typus $(n+1)^*$ — dem Satze 2 zufolge.

Das erste Kriterium ist jetzt eine Folgerung des Satzes 1.

Ähnlich beweist man das zweite Kriterium, wenn $\varphi(t) = \frac{(n-1)\pi}{\log b - \log a} . \log\frac{t}{a}$ gewählt wird.

In dieser Weise kann man weitere spezielle Kriterien ableiten.

Literatur

[1] *Borůvka O.*, Sur la transformation des intégrales des équations différentielles linéaires ordinaires du second ordre, Annali di matematica pura ed aplicata, Bologna 1956, S. IV, T. XLI.

[2] *Laitoch M.*, Sur une théorie des critères comparatifs sur l'oscillation des intégrales de l'équation différentielle $u'' = P(x) . u$. Spisy vydávané přír. fak. MU v Brně, No 365, 1955.

РЕЗЮМЕ

О ЧИСЛЕ НУЛЕВЫХ ТОЧЕК РЕШЕНИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ $y'' = Q(t) . y$

МИРОСЛАВ ЛАЙТОХ

(Получено 14. 9. 1959 г.)

В настоящей работе выведены теоремы, определяющие число нулевых точек решения дифференциального уравнения

$$y'' = Q(t) . y \tag{a}$$

в интервале $\langle a, b\rangle$, в котором коэффициент Q является непрерывной функцией.

С начала приведем два определения.

1. *Дифференциальное уравнение* (a) *назовем в интервале* $\langle a, b\rangle$ *типа* m, *если хотя бы одно решение дифференциального уравнения* (a) *имеет в интервале* $\langle a, b\rangle$ *как раз* m *нулевых точек и все остальные решения дифференциального уравнения* (a) *имеют в интервале* $\langle a, b\rangle$ *не более чем* m *(т. е.* m *или* $m-1$*) нулевых точек.*

2. *Дифференциальное уравнение* (a) *назовем в интервале* $\langle a, b\rangle$ *типа* m^*, *если существует такое решение* $y = y(t)$ *дифференциального уравнения* (a) *которое имеет в интервале $\langle a, b\rangle$ как раз m нулевых точек и для которого имеет место, что $y(a) = y(b) = 0$, и всякое другое решение дифференциального уравнения* (a), *которое имеет в интервале $\langle a, b\rangle$ как раз m нулевых точек линейно зависит от решения $y = y(t)$.*

В статье доказываются следующие предложения:

1. *Пусть в интервале $\langle a, b\rangle$ дифференциальное уравнение $y'' = Q_n(t) \cdot y$ является типа n^* и дифференциальное уравнение $y'' = Q_{n+1}(t) \cdot y$ типа $(n + 1)^*$. Пусть в интервале $\langle a, b\rangle$ для коэффициента Q дифференциального уравнения* (a) *выполняется соотношение $Q_{n+1}(t) \leqq Q(t) \leqq Q_n(t)$, где равенство слева не выполняется тождественно. Тогда дифференциальное уравнение* (a) *является в интервале $\langle a, b\rangle$ типа n.*

2. *Пусть в интервале $\langle a, b\rangle$ имеет место $Q_n(t) = \sqrt{\varphi'(t)} \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{\varphi'(t)}}\right)'' - \varphi'^2(t)$ и кроме того*

1. *функция φ имеет непрерывную производную* 3-го *порядка,*
2. $\varphi'(t) > 0$,
3. $\varphi(b) - \varphi(a) = (n - 1) \,.\, \pi$.

Тогда дифференциальное уравнение (a) *является в интервале $\langle a, b\rangle$ типа n^*.*

С помощью этих теорем доказываются следующие критерии.

1. *Пусть коэффициент Q дифференциального уравнения* (a) *удовлетворяет в интервале $\langle a, b\rangle$ соотношению*

$$-n^2\pi^2 \leqq (b - a)^2 \,.\, Q(t) \leqq -(n - 1)^2 \pi^2$$

при чем равенство слева не выполняется тождественно и n-натуральное число. Потом дифференциальное уравнение (a) *является в интервале $\langle a, b\rangle$ типа n.*

2. *Пусть коэффициент Q дифференциального уравнения* (a) *удовлетворяют в интервале $\langle a, b\rangle$, $a > 0$, соотношению*

$$-4n^2\pi^2 \leqq \log^2 \frac{b}{a} \cdot [4t^2 + 1 + Q(t)] \leqq 4(n - 1)^2 \pi^2,$$

при чем равенство слева не выполняется тождественно и n-натуральное число. Тогда дифференциальное уравнение (a) *является в интервале $\langle a, b\rangle$ типа n.*

SHRNUTÍ

O POČTU NULOVÝCH BODŮ ŘEŠENÍ DIFERENCIÁLNÍ ROVNICE $y'' = Q(t) \,.\, y$

MIROSLAV LAITOCH

(Došlo 14. 9. 1959)

V tomto článku jsou odvozeny věty pro stanovení počtu nulových bodů řešení dif. rovnice

$$y'' = Q(t) \,.\, y \tag{a}$$

v intervalu $\langle a, b\rangle$, v němž je koeficient Q spojitou funkcí.

Nejdříve uvedeme následující dvě definice.

1. *Diferenciální rovnici* (a) *nazveme v intervalu $\langle a, b\rangle$ typu m, když aspoň jedno řešení diferenciální rovnice* (a) *má v intervalu $\langle a, b\rangle$ právě m nulových bodů a ostatní řešení diferenciální rovnice* (a) *mají v intervalu $\langle a, b\rangle$ nejvýše m (tj. m nebo $m - 1$) nulových bodů.*

2. *Diferenciální rovnici* (a) *nazveme v intervalu $\langle a, b\rangle$ typu m^*, existuje-li řešení $y = y(t)$ dif. rovnice* (a), *které má v intervalu $\langle a, b\rangle$ právě m nulových bodů a pro něž platí $y(a) = y(b) = 0$, při čemž každé jiné řešení diferenciální rovnice* (a), *které má v intervalu $\langle a, b\rangle$ právě m nulových bodů, je na řešení $y = y(t)$ lineárně závislé.*

V článku jsou pak dokázány tyto věty:

1. *Nechť v intervalu $\langle a, b\rangle$ je diferenciální rovnice $y'' = Q_n(t) \,.\, y$ typu n^* a diferenciální rovnice $y'' = Q_{n+1}(t) \,.\, y$ typu $(n + 1)^*$. Nechť v intervalu $\langle a, b\rangle$ platí pro koeficient Q diferenciální rovnice* (a) *relace $Q_{n+1}(t) \leqq Q(t) \leqq Q_n(t)$, při čemž první rovnost neplatí identicky. Potom diferenciální rovnice* (a) *je v intervalu $\langle a, b\rangle$ typu n.*

2. *Nechť v intervalu $\langle a, b\rangle$ je $Q_n(t) = \sqrt{\varphi'(t)} \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{\varphi'(t)}}\right)'' - \varphi'^2(t)$, při čemž platí:*

1) *funkce φ má spojitou derivaci 3. řádu,*
2) $\varphi'(t) > 0$,
3) $\varphi(b) - \varphi(a) = (n - 1) \,.\, \pi$.

Potom je diferenciální rovnice (a) *v intervalu $\langle a, b\rangle$ typu n^*.*

Pomocí těchto vět jsou dokázána následující kriteria.

1. *Nechť koeficient Q diferenciální rovnice* (a) *splňuje v intervalu $\langle a, b\rangle$ relace*

$$- n^2\pi^2 \leqq (b - a)^2 \,.\, Q(t) \leqq - (n - 1)^2 \,\pi^2$$

při čemž první rovnost neplatí identicky a n je přirozené číslo, potom diferenciální rovnice (a) *je v intervalu $\langle a, b\rangle$ typu n.*

2. *Nechť koeficient Q diferenciální rovnice* (a) *splňuje v intervalu $\langle a, b\rangle$, $a > 0$, relace*

$$-4n^2\pi^2 \leqq \log^2 \frac{b}{a} \,.\, [4t^2 + 1 + Q(t)] \leqq -4(n - 1)^2 \,\pi^2,$$

při čemž první rovnost neplatí identicky a n je přirozené číslo, potom diferenciální rovnice (a) *je v intervalu $\langle a, b\rangle$ typu n.*