Časopis pro pěstování matematiky a fysiky

Bedřich Pospíšil

Mohutnost prostoru s hustou částí dané mohutnosti

Časopis pro pěstování matematiky a fysiky, Vol. 67 (1938), No. 2, 89--96

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/109453`

ČASOPIS PRO PĚSTOVÁNÍ MATEMATIKY A FYSIKY

ČÁST MATEMATICKÁ

Mohutnost prostoru s hustou částí dané mohutnosti.[1])

Bedřich Pospíšil, Brno.

(Došlo dne 27. března 1937.)

Malá německá písmena jsou transfinitní mohutnosti; místo $2^{\mathfrak{m}}$ pišme exp $\mathfrak{m}$. Citát v závorce se vždy vztahuje k Čechovým „Topologickým prostorům".[2])

Definice: Množina H *leží hustě* v topologickém prostoru P, když uzávěr v P množiny H je roven P (1.1).

V tomto článku budeme studovat, jaká může být mohutnost prostoru, ve kterém *leží hustě* množina dané mohutnosti. Důkladnějšího studia bude třeba toliko v případě AHU-prostorů (6.1, 8.4, 7.1). Rozšíříme-li totiž úvahy už i jen na ABU-prostory (8.3), je odpověď triviální. K libovolnému danému $\mathfrak{x}$ sestrojme totiž prostor R takto: Mohutnost prostoru R bude $\mathfrak{x}$ a za uzávěry nekonečných částí prostoru prohlásíme prostor R; jinak bude uzávěr množiny roven té množině samotné. Zřejmě R je ABU-prostor mohutnosti $\mathfrak{x}$, v němž leží hustě každá nekonečná část. V případě AHU-prostorů je odpověď takováto:

Nutná a dostatečná podmínka, aby existoval AHU-prostor mohutnosti $\mathfrak{p}$, ve kterém leží hustě množina mohutnosti $\mathfrak{h}$, jest, aby byly splněny nerovnosti $\mathfrak{h} \leq \mathfrak{p} \leq exp\, exp\, \mathfrak{h}$.

Důkaz: Jest jasno, že musí být $\mathfrak{h} \leq \mathfrak{p}$. Nechť tedy P je AHU-prostor mohutnosti $\mathfrak{p}$, ve kterém leží hustě množina H mohutnosti $\mathfrak{h}$. Každému bodu p prostoru P přiřaďme systém $\mathfrak{S}_p$ částí množiny H takový, že jest $S \in \mathfrak{S}_p$, když a jen když p leží v uzávěru množiny S. Buď $p \in P$, $q \in P$, $p \neq q$. Poněvadž P je H-prostor (8.4), existují disjunktní okolí O_p a O_q (2.1) bodů resp. p a q. Z toho, že množina H leží hustě v P, se snadno vidí (4.1.1), že uzávěr množiny HO_p resp. HO_q obsahuje p resp. q, tedy, že $HO_p \in \mathfrak{S}_p$, $HO_q \in \mathfrak{S}_q$. Zřejmě však HO_q nepatří do $\mathfrak{S}_p$ a HO_p nepatří do $\mathfrak{S}_q$ (4.1.1). Tedy $\mathfrak{S}_p \neq \mathfrak{S}_q$. Tedy různým bodům p a q jsou přiřazeny různé systémy $\mathfrak{S}_p$ a $\mathfrak{S}_q$.

[1]) Tento můj článek patří do serie článků řešících problémy položené panem profesorem Čechem v jeho topologickém semináři.

[2]) Časopis 66 (1937), str. D 225—264.

Ale $\mathfrak{S}_p$ jsou množiny, jejichž elementy jsou části množiny H. Částí množiny H je ale $\exp \mathfrak{h}$ a tedy množin $\mathfrak{S}_p$ je nanejvýše $\exp \exp \mathfrak{h}$. Tedy i bodů v P je nanejvýš tolik, to jest $\mathfrak{p} \leqq \exp \exp \mathfrak{h}$, c. b. d.

Zbývá ještě dokázat, že podmínka jest dostatečná. To ale plyne z tvrzení ostřejšího, které následuje a které se ukáže později užitečným. Pro důkaz dostatečnosti naší podmínky stačí totiž v tom, co následuje, klásti $\mathfrak{a} = \exp \mathfrak{h}$.

Jestliže $\mathfrak{h} \leqq \mathfrak{a} \leqq \exp \mathfrak{h}$, pak nutná a dostatečná podmínka, aby existoval AHU-prostor mohutnosti $\mathfrak{p}$, ve kterém leží hustě množina mohutnosti $\mathfrak{h}$ a jehož všecky body mají charakter $\leqq \mathfrak{a}$, jest, aby byly splněny nerovnosti $\mathfrak{h} \leqq \mathfrak{p} \leqq \exp \mathfrak{a}$.

Zase musí být $\mathfrak{h} \leqq \mathfrak{p}$. Nechť P a H splňují podmínky jako v předešlém důkaze a mimo to ještě $\chi_P(p) \leqq \mathfrak{a}$ pro každý $p \in P$. Každému bodu $p \in P$ přiřaďme úplný systém $\mathfrak{U}_p$ okolí (4.2) bodu p mohutnosti $\chi_P(p)$. Buď $\mathfrak{V}_p$ množina všech HU, kde $U \in \mathfrak{U}_p$. Jako v předešlém důkaze se vidí, že $\mathfrak{V}_p \neq \mathfrak{V}_q$ pro $p \neq q$. Avšak $\mathfrak{V}_p$ jsou části množiny mohutnosti $\exp \mathfrak{h}$, totiž množiny všech částí množiny H. Při tom ale $\mathfrak{V}_p$ má mohutnost $\leqq \mathfrak{a}$. Ale částí množiny mohutnosti $\exp \mathfrak{h}$, které samy mají mohutnost $\leqq \mathfrak{a}$, je nanejvýš $\mathfrak{a}$-tá mocnost čísla $\exp \mathfrak{h}$, to jest nanejvýš $\exp (\mathfrak{h}\mathfrak{a}) = \exp \mathfrak{a}$. Bodů prostoru P je nanejvýš tolik co těch $\mathfrak{V}_p$ a tedy $\mathfrak{p} \leqq \exp \mathfrak{a}$, c. b. d.

D ů k a z d o s t a t e č n o s t i:

1. N e c h ť X j e AH-p r o s t o r, x_k k o n e č n ě m n o h o j e h o b o d ů. P a k k a ž d é m u k l z e p ř i ř a d i t i o k o l í J_k b o d u x_k t a k, ž e J_k j s o u p o d v o u d i s j u n k t n í. Nechť totiž O_{ij} a O_{ji} pro $i \neq j$ jsou disjunktní okolí bodů resp. x_i a x_j. Pak stačí za J_k brát společnou část (průnik) všech O_{kj} s pevným k.

2. Pro pevnou množinu M mohutnosti $\mathfrak{h}$ nechť je Φ prostor všech funkcí, jichž argument probíhá M a které nabývají hodnot *1* a *2*. Při tom definující okolí (4.1.1) bodu φ v Φ budou odpovídat konečným částem množiny M. Okolí odpovídající konečné části K množiny M bude prostě množina všech $\psi \in \Phi$ takových, že $\psi(k) = \varphi(k)$ pro $k \in K$. Φ je AHU-prostor mohutnosti $\exp \mathfrak{h}$, jak se lehko uváží (4.1 — (I°) a (II°), axiomy (III°) v 7.1, 6.3, 8.4). Vyberme tedy z Φ část X mohutnosti $\mathfrak{a} \leqq \exp \mathfrak{h}$.

3. X j e AHU-p r o s t o r (1.5) m o h u t n o s t i $\mathfrak{a}$ a m á o t e v ř e n o u b a s i m o h u t n o s t i $\leqq \mathfrak{h}$ (6.4). Definující okolí v Φ a tedy i v X jsou otevřená. Stačí tedy ukázat, že definujících okolí v Φ je nanejvýš $\mathfrak{h}$. Zvolme na okamžik K pevně. Všech odpovídajících mu okolí všech možných bodů v Φ je zřejmě tolik, kolik je všech možných parciálních funkcí definovaných na K k funkcím z Φ. Je jich tedy $\exp k$, kde k je mohutnost množiny K. Tedy pevnému K odpovídá konečně mnoho těch okolí, to jest méně než $\aleph_0$. Probíhá-li nyní K všecky možné konečné části množiny M, kterých je celkem $\mathfrak{h}$,

je těch okolí nanejvýš $\aleph_0 \mathfrak{h} = \mathfrak{h}$, c. b. d. Buď $\mathfrak{B}$ pevná otevřená base mohutnosti $\leqq \mathfrak{h}$ v prostoru X.

4. „Čtverečkem" budu nazývat vždy množinu všech uspořádaných párů $\{x, y\}$, kde $x \in J_1$, $y \in J_2$, při čemž J_1 a J_2 jsou pevné — na čtverečku závislé — elementy base $\mathfrak{B}$. Ten čtvereček označme $J_1 \times J_2$; J_1 a J_2 jsou jím určeny.

5. Označme F množinu všech funkcí, jichž argument probíhá X a jichž hodnoty jsou v X. Pak F má mohutnost

$$\mathfrak{a}^{\mathfrak{a}} \leqq (\exp \mathfrak{h})^{\mathfrak{a}} = \exp (\mathfrak{h}\mathfrak{a}) = \exp \mathfrak{a} \leqq \mathfrak{a}^{\mathfrak{a}},$$

to jest F má mohutnost $\exp \mathfrak{a}$.

6. Buď D množina všech konečných skupin d čtverečků:

$$J_1 \times J'_1, \; J_2 \times J'_2, \ldots, J_n \times J'_n$$

— na pořádku nezáleží — takových, že množiny J_k jsou po dvou disjunktní. Při tom $J_k \times J'_k$ jsou t. zv. „souřadnice" elementu d.

7. Při pevné funkci $f \in F$ nechť K_f je množina všech uspořádaných párů $\{x, y\}$, kde $x \in X$, $y \in X$, $y = f(x)$. K_f je „křivka o rovnici $y = f(x)$".

8. Označme $Q = F + D$ a zaveďme v Q topologii takto: Definujícím okolím bodu $d \in D$ bude množina obsahující jeden jediný bod d. Nechť z_k pro $k = 1, 2, \ldots, n$ jsou prvky množiny K_f v konečném počtu. Každý element z_k zavřeme do čtverečku Z_k. Definujícím okolím bodu f patřícím k (neuspořádaným) skupinám $(z_1, z_2, \ldots, z_n)$ a $(Z_1, Z_2, \ldots, Z_n)$ rozumíme každou množinu, která obsahuje f a všecky $d \in D$ — leda až na konečně mnoho — takové, že ke každému $k = 1, 2, \ldots, n$ existuje souřadnice bodu d (ta souřadnice je čtvereček) ležící v Z_k a obsahující z_k.

9. Q má mohutnost $\exp \mathfrak{a}$. Q má mohutnost aspoň $\exp \mathfrak{a}$ podle 5. Base $\mathfrak{B}$ má podle 3 mohutnost nejvýš $\mathfrak{h}$. Tedy čtverečků je nanejvýše $\mathfrak{h}^2 = \mathfrak{h}$. Tedy konečných skupin čtverečků je rovněž nanejvýš $\mathfrak{h}$ a tedy D má mohutnost $\leqq \mathfrak{h}$. S 5 dohromady to dá, že Q má mohutnost nejvýš $\exp \mathfrak{a} + \mathfrak{h}$, t. j. $\exp \mathfrak{a}$, c. b. d.

10. Buď $f_1 \in F$, $f_2 \in F$, $f_1 \neq f_2$. Existuje tedy $x \in X$, pro něž $y_1 \neq y_2$, kde $y_l = f_l(x)$ pro $l = 1, 2$. Existují pak disjunktní množiny J'_1 a J'_2, prvky to base $\mathfrak{B}$, takové, že $y_l \in J'_l$. Buď $J \in \mathfrak{B}$ a nechť $x \in J$. Nechť $z_l = \{x, y_l\}$ a nechť $Z_l = J \times J'_l$. Je-li O_l nějaké okolí bodu f_l patřící ke skupinám (z_l) a (Z_l), pak okolí O_1 a O_2 jsou disjunktní. Pro jiné páry bodů z Q se axiom $(\mathrm{III}^0)_H$ v (6.3.9) verifikuje zcela triviálně. Rovněž i ostatní podmínky pro *AHU*-prostor — jsou citovány v 2. Tedy: Q je *AHU*-prostor.

11. Nechť definující okolí O_1 bodu $f \in F$ patří ke skupinám $(z, \ldots)$ a $(Z, \ldots)$; nechť def. okolí O_2 bodu f patří ke skupinám $(z_1, z_2, \ldots, z_n)$, $(Z_1, Z_2, \ldots, Z_n)$; nechť $z \neq z_k$. Pak O_1 neobsahuje O_2 a tedy zvláště $O_1 \neq O_2$. Nechť $Z_k = J_k \times J'_k$.

Podle 1 a 3 lze každé konečné skupině $(z_1, z_2, \ldots, z_n, z_{n+1}, \ldots, z_N)$, kde $z_l = \{x_l, y_l\}$, $x_l \in X$, $y_l \in X$, $z_r \neq z$, nalézti taková okolí J_r^* pro $r = 1, \ldots, N$ bodů resp. x_r v X, že jsou po dvou disjunktní. Lze o nich zřejmě předpokládat, když jsme je eventuálně zmenšili, že jsou to prvky base $\mathfrak{B}$, že neobsahují x při označení $z = \{x, y\}$ a že $J_k^* \subset J_k$. Buď $J''_k = J'_k$ a jinak buď J'_r libovolné definující okolí bodu y_r. Nechť $Z_r^* = J_r^* \times J''_r$. Pak množina všech Z_r^* je bodem z D. Takových bodů je ale nekonečně mnoho, neboť ke každému přirozenému N takový existuje. Do O_2 jich ale nepatří nejvýš konečně mnoho. Tedy nějaký takový bod náleží do O_2 a zřejmě nenáleží do O_1, c. b. d. Skupinu $(z_1, \ldots, z_n)$, k níž patří O_2, označujme vždy O_2'.

12. Buď $f \in F$. Pak okolí bodu f patřící k pevným skupinám $(z_1, \ldots, z_n)$ a $(Z_1, \ldots, Z_n)$ vzniknou všecka z jednoho z nich ubíráním konečných částí. Je jich tedy tolik co těch konečných částí, tedy nanejvýš tolik co konečných částí množiny D, to jest nejvýš $\mathfrak{h}$. Všech skupin $(z_1, z_2, \ldots, z_n)$ je ale $\mathfrak{a}$ a skupin $(Z_1, Z_2, \ldots, Z_n)$ nejvýše $\mathfrak{h}$. Tedy všech těch okolí vůbec je nanejvýš $\mathfrak{h}^2\mathfrak{a} = \mathfrak{a}$. Tedy $\chi_Q(f) \leqq \mathfrak{a}$.

13. Buď $\mathfrak{B}$ systém definujících okolí bodu $f \in F$ a nechť má mohutnost $< \mathfrak{a}$. Buď $\mathfrak{B}'$ součet všech O'_2 pro $O'_2 \in \mathfrak{B}$. Pak $\mathfrak{B}'$ má mohutnost $< \mathfrak{a}$. Poněvadž však K_f má mohutnost $\mathfrak{a}$, existuje v K_f prvek z, který do $\mathfrak{B}'$ nenáleží. Nechť okolí I bodu f patří ke skupinám (z) a (Z) s libovolným z. Podle 11 I neobsahuje žádné $O_2 \in \mathfrak{B}$ a tedy $\mathfrak{B}$ není úplný systém okolí bodu f. Ze systému definujících okolí nelze tedy vybrat úplný systém okolí bodu f, který by měl mohutnost $< \mathfrak{a}$. Tedy $\chi_Q(f) \geqq \mathfrak{a}$ (4.2.3). 12 a 13 dá tedy celkem $\chi_Q(f) = \mathfrak{a}$.

14. Podle 9 prostor Q má mohutnost $\exp \mathfrak{a}$ a obsahuje množinu D mohutnosti $\leqq \mathfrak{h} \leqq \exp \mathfrak{a}$. Existuje tedy v Q množina D' mohutnosti $\mathfrak{h}$ obsahující D. Množina D leží ale v Q hustě: Pro $d \in D$ je totiž d v uzávěru množiny D a priori (1.1 — (II^u)). Pro $f \in F$ z $\chi_Q(f) = \mathfrak{a} > 1$ plyne pro každé definující okolí O_f bodu f existence bodu $q \in Q$, $q \neq f$, $q \in O_f$. Z toho pak plyne $q \in D$ a tedy každé okolí bodu f protne D a tedy f náleží do uzávěru množiny D (4.1.1), c. b. d. Tím spíše leží D' v Q hustě (1.1 — (III^u)). Z nerovností $\mathfrak{h} \leqq \mathfrak{p} \leqq \exp \mathfrak{a}$ vychází existence prostoru $Q' \supset D'$ vnořeného do Q (1.5), jehož mohutnost je $\mathfrak{p}$. Množina D' leží v Q' zřejmě hustě a jest učiněno zadost požadavkům naší věty.

Poznámka: Při důkazu první věty nechť si čtenář povšimne toho, že podmínka zůstane nutnou i při AH-prostorech. Stačí však už ke konstrukci AHU-prostoru.

Aplikace: Písmeno I (eventuálně s indexy) značí vždy AHU-prostor, jehož každý bod p — mimo jeden výjimečný, který vždy označujme symbolem ∞ (se stejnými indexy jako I) — má okolí obsahující jedině p. Okolí bodu ∞ mají vesměs mohutnost > 1.

Aby ukázal, že charakter bodu může převýšit mohutnost prostoru, sestrojil Urysohn[3]) spočetný prostor I', kde $\chi_{I'}(\infty') > \aleph_0$. Jinak však se o $\chi_{I'}(\infty')$ neví nic. Jako aplikace předchozí konstrukce uvádím ještě prostor I libovolné předem dané mohutnosti $\mathfrak{h}$ (místo $\aleph_0$ u Urysohna) s charakterem bodu ∞ netoliko známým $\geqq \mathfrak{h}$, ale dokonce v přípustných mezích libovolně volitelným:

Nutná a dostatečná podmínka, aby existoval prostor I mohutnosti $\mathfrak{h}$, kde ∞ má charakter $\mathfrak{a} \geqq \mathfrak{h}$, jest aby bylo $\mathfrak{a} \leqq \exp \mathfrak{h}$.

Počet okolí bodu a tedy ani charakter nemůže převýšit počet všech částí prostoru a tedy $\mathfrak{a} \leqq \exp \mathfrak{h}$. Tím je nutnost odůvodněna.

Prostor I vyhovující tvrzení věty se skládá z jednoho bodu $f \in F$, z celé množiny D a z jakési množiny mohutnosti $\mathfrak{h}$, jejíž prvky nejsou ani v F ani v D. Definující okolí bodu f budou stejná jako v prostoru Q v důkaze druhé věty. Podle 13 stačí klást $f = \infty$.

Novák zlepšil Urysohnův příklad v jiném směru. Sestrojil totiž spočetný dědičný N-prostor (8.6.5), jehož body mají vesměs nespočetné, jinak však neznámé, charaktery. V příštím čísle Časopisu podám konstrukci zahrnující Novákovo i moje nynější zlepšení Urysohnova prostoru. Bude to dědičný N-prostor předem dané mohutnosti $\mathfrak{h}$ s charaktery bodů vesměs rovnými předem dané mohutnosti $\geqq \mathfrak{h}$ v přípustných mezích.

Poznámka: Říkáme, že prostor Θ je R_0-prostor, když pro každý bod $p \in \Theta$ a každé jeho okolí O v Θ existuje okolí Ω v Θ bodu p takové, že $\Omega = \overline{\Omega} = \Theta - \overline{\Theta - \Omega} \subset O$; při tom $\overline{\Gamma}$ je uzávěr v Θ množiny $\Gamma \subset \Theta$. Místo „AHU-prostor" možno v předešlých větách psát „AHR_0U-prostor". Stačí místo Q uvažovat prostor Θ takový, že zase $\Theta = F + D$ a (d) je okolím v Θ bodu $d \in D$; avšak okolím v Θ bodu $f \in F$ patřícím ke skupinám $(z_1, z_2, \ldots, z_n)$ a $(Z_1, Z_2, \ldots, Z_n)$ — se stejnými podmínkami jako prve — bude každá množina $A - K + B$ s konečným K, kde A je množina těch $d \in D$, že pro každé $k = 1, 2, \ldots, n$ jakási souřadnice $J_k \times J'_k$ bodu d jest $\subset Z_k$ a $x_k \in J_k$ při $z_k = \{x_k, y_k\}$, $x_k \in X$, $y_k \in X$, a kde B je množina těch $g \in F$, že $\{x_k, g(x_k)\} \in Z_k$ pro každé $k = 1, 2, \ldots, n$. Θ je R_0-prostor, neboť definující okolí v Θ jsou uzavřená, poněvadž definující okolí v X jsou uzavřená. Ostatek se doslova opakuje.

*

[3]) Über die Mächtigkeit zusammenhängender Mengen, Math. Annalen 94 (1925), 262—295.

Sur la puissance d'un espace contenant une partie dense de puissance donnée.

(Extrait de l'article précédent.)

Les petits types allemands désigneront toujours des puissances infinies; je pose $\exp \mathfrak{m} = 2^{\mathfrak{m}}$. Sous le nom de caractère $\chi_E(p)$ du point p dans l'espace E, on entend[4]) la plus petite puissance d'un système $\mathfrak{E}$ d'entourages de p dans E tel que, pour tout G ouvert dans E et contenant p, il existe un $U \in \mathfrak{E}$ avec $U \subset G$.

La réponse à la question proposée au titre étant triviale pour les espaces topologiques plus généraux, je me bornerai toujours à l'étude des espaces de Hausdorff, c'est à dire des espaces vérifiant les axiomes A, B, C, D des „Grundzüge der Mengenlehre" de Hausdorff (p. 213) sans vérifier peut-être aucun des deux „Abzählbarkeitsaxiome". Dans ce cas, on a le théorème suivant:

La condition $\mathfrak{h} \leqq \mathfrak{p} \leqq \exp \exp \mathfrak{h}$ est nécessaire et suffisante pour qu'il existe un espace de Hausdorff de puissance $\mathfrak{p}$ contenant une partie dense de puissance $\mathfrak{h}$.

La nécessité résulte immédiatement des axiomes B et D (sans faire intervenir les autres). La suffisance peut être tirée du théorème suivant dont nous ferons l'usage plus tard encore.

Soit $\mathfrak{h} \leqq \mathfrak{a} \leqq \exp \mathfrak{h}$. Alors la condition $\mathfrak{h} \leqq \mathfrak{p} \leqq \exp \mathfrak{a}$ est nécessaire et suffisante pour qui'l existe un espace de Hausdorff de puissance $\mathfrak{p}$ contenant une partie dense de puissance $\mathfrak{h}$ et où le caractère d'aucun point ne surpasse $\mathfrak{a}$.

Il est aisé d'en prouver la nécessité. Alors, soit M un ensemble de puissance $\mathfrak{h}$. Soit Φ l'espace de toutes les fonctions dont l'argument parcourt M et dont les valeurs sont égales à *1* ou à *2*. Les ensembles

$$\underset{\psi}{E}\,(\psi \in \Phi,\ \psi(k) = \varphi(k) \text{ pour } k \in K),$$

K parcourant les sous-ensembles finis de M, seront les entourages (définissants) de φ dans Φ. Soit X un sous-espace de puissance $\mathfrak{a}$ de l'espace Φ. C'est un espace de Hausdorff ayant une base ouverte $\mathfrak{B}$ de puissance $\leqq \mathfrak{h}$. Soit F la famille de toutes les fonctions qui transforment X en un sous-ensemble de X. Sous le nom de „carré", j'entends tout produit cartésien $J_1 \times J_2$ où $J_1 \in \mathfrak{B}$, $J_2 \in \mathfrak{B}$. Soit D la famille de tous les systèmes d finis de carrés

$$J_1 \times J'_1,\ J_2 \times J'_2, \ldots, J_n \times J'_n$$

[4]) P. Alexandroff et P. Urysohn, Mémoire sur les espaces topologiques compacts, Verhandligen der Kon. Akademie Amsterdam, Deel XIV, No. 1, 1929.

tels que les J_k sont disjoints deux à deux. Les carrés $J_k \times J'_k$ sont les ,,coordonnées" de d. Chaque point de D sera isolé dans l'espace $Q = F + D$, dont je vais construire la topologie. Soit $f \in F$, $z_k \in \underset{\{x,y\}}{E} [y = f(x)]$, $k = 1, 2, \ldots, n$, (n naturel). Soit Z_k un carré contenant z_k. Les entourages dans Q de f correspondant à $(z_1, z_2, \ldots, z_n)$ et $(Z_1, \ldots, Z_n)$ seront tous les ensembles contenant f ainsi que tous les $d \in D$ — sauf un nombre fini tout au plus — tels que, pour tout $k = 1, 2, \ldots, n$, il existe une coordonnée de d contenant z_k et contenue dans Z_k. O_f étant un tel entourage, soit O'_f l'ensemble des z_k en question. Alors, Q est un espace de Hausdorff. Soit $f \in F$ et soit $\mathfrak{B}$ un système de puissance $< \mathfrak{a}$ d'entourages (définissants) de f. Il existe alors un point $z \in \underset{\{x,y\}}{E} [y = f(x)]$ qui n'est contenu dans aucun O'_f pour $O_f \in \mathfrak{B}$. Les entourages de f correspondant à (z) et (Z) avec un Z quelconque ne contiennent aucun $O_f \in \mathfrak{B}$. Alors $\chi_Q(f) \geqq \mathfrak{a}$, d'où $\chi_Q(f) = \mathfrak{a}$, car il n'existe pas plus de $\mathfrak{a}$ entourages définissants de f. Or, f n'est pas isolé ce qui entraîne la densité de D dans Q. Soit $D \subset D' \subset Q' \subset Q$, D' et Q' ayant la puissance $\mathfrak{h}$ et $\mathfrak{p}$ resp. L'espace Q' et sa partie dense D' satisfont évidemment à la thèse du théorème.

Application: Le symbole I (muni d'indices éventuellement) désigne toujours un espace de Hausdorff dont tous les points sont isolés sauf un seul qui ne l'est pas et qui sera toujours désigné par ∞ (muni des mêmes indices que l'est I). Pour démontrer qu'un caractère peut surpasser la puissance de l'espace tout entier, Urysohn a construit[3]) un espace I' dénombrable avec $\chi_{I'}(\infty')$ non dénombrable, mais inconnu. A titre d'application, je vais construire un exemple plus général:

La condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe un espace I de puissance $\mathfrak{h}$ avec $\chi_I(\infty) = \mathfrak{a} \geqq \mathfrak{h}$ est que l'on ait $\mathfrak{a} \leqq \exp \mathfrak{h}$.

La nécessité est évidente. L'espace I à construire se compose d'un seul $f \in F$ quelconque, de tous les points de D et de $\mathfrak{h}$ autres points. Soit $f = \infty$ et les entourages de f soient définis de la manière décrite pour l'espace Q.

M. Novák a construit un espace dénombrable complètement normal aux caractères $> \aleph_0$, mais inconnus. Dans le numéro suivant du Časopis, je vais construire un espace complètement normal de puissance $\mathfrak{h}$ quelconque et aux caractères $= \mathfrak{a} \geqq \mathfrak{h}$ pour tout $\mathfrak{a}$ admissible a priori.

Remarque: Les termes ,,espace de Hausdorff' peuvent être remplacés par ,,espace de Hausdorff de dimension 0" dans les théorèmes précédents. On n'a qu'à considérer, au lieu de Q, l'espace $\Theta = F + D$, les $d \in D$ étant isolés dans Θ et les entourages dans Θ de $f \in F$ appartenant à $(z_1, z_2, \ldots, z_n)$ et $(Z_1, Z_2, \ldots, Z_n)$ — sous les mêmes conditions qu'auparavant — étant les ensembles $A - K + B$ avec K fini, A étant l'ensemble de tous les $d \in D$ tels que, pour tout $k = 1, 2, \ldots, n$, il existe une coordonnée $J_k \times J'_k \subset Z_k$ de d avec $x_k \in J_k$ où $z_k = \{x_k, y_k\}$, $x_k \in X$, $y_k \in X$, et B étant l'ensemble des $g \in F$ avec $\{x_k, g(x_k)\} \in Z_k$ pour tout $k = 1, 2, \ldots, n$. En effet, les entourages définissants dans Θ sont fermés; car il en est ainsi de X.