Časopis pro pěstování matematiky a fysiky

Josef Klíma

Zvláštní lineární zobrazení přímkového prostoru v množství bodových párů roviny

Časopis pro pěstování matematiky a fysiky, Vol. 67 (1938), No. 2, 114--131

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/109447`

Zvláštní lineární zobrazení přímkového prostoru v množství bodových párů roviny.

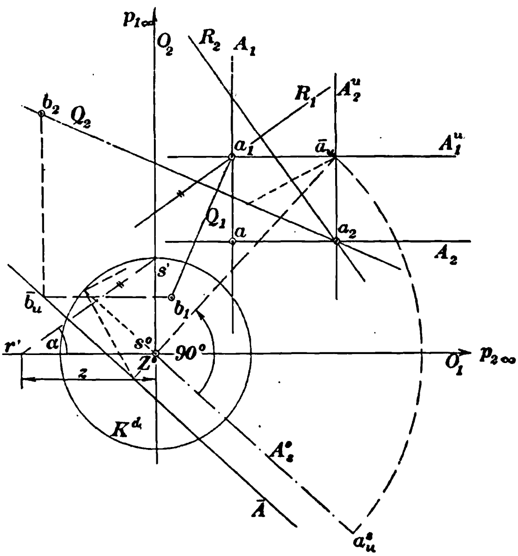
Josef Klíma, Brno.

(Došlo dne 23. prosince 1936.)

V pojednání „O jistém lineárním zobrazení přímkového prostoru v množství bodových párů roviny" ve Věstníku Královské české společnosti nauk, roč. 1936 v odstavci 31 poukázal jsem na nejzajímavější zvláštní případ tohoto zobrazení, o němž bude zde pojednáno. Pojednání toto v dalším označím vždy písmenou Z s číslem příslušného odstavce.

1. Za základní dva komplexy lineární zvolíme zde shodné komplexy Σ_1, Σ_2, jichž osy O_1, O_2 leží v obrazně π a jsou vzájemně kolmé (obr. 1). Parametr obou komplexů budiž označen $+ d$, t. j. jejich paprsky jsou normálami šroubovic pravotočivého šroubového pohybu o redukované výšce d. Levotočivé komplexy Σ_1, Σ_2 jsou v involuci a svazek jimi určený má za základní lineární kongruenci $T_{1,2}$ rotační kongruenci o hlavním paprsku $Z \perp \pi$ v průsečíku (O_1O_2). V obraze 1 vyznačen kolmý průmět na obraznu $\pi \equiv (O_1O_2)$. Ježto nulové body p_1, p_2 roviny π jsou úběžnými body os O_2, O_1, přechází zde karakteristická projektivita Π_X obecného případu v involuci na úběžné přímce X_∞ roviny π, o níž lze se snadno přesvědčiti, že má samodružné body v kruhových bodech $+ i$, $- i$ roviny π. Řídicí přímky ${}^1D$, ${}^2D$ kongruence $T_{1,2}$ jsou zde imaginární druhého druhu a sice jsou minimálními v rovinách vzdálených od π o délku $+ i$, a $- i$, z nich pak prvá jde bodem $+ i$ a druhá $- i$. Obrazy libovolné přímky jsou v stopnících konjugovaných polár této přímky vzhledem k základním komplexům na π. Přímky roviny $\varrho \parallel \pi$, vedené ve vzdálenosti z od π, mají tytéž úběžné obrazy $r_{1\infty}$, $r_{2\infty}$ a sice v nulových bodech (pólech) roviny ϱ vzhledem k Σ_1 a Σ_2.

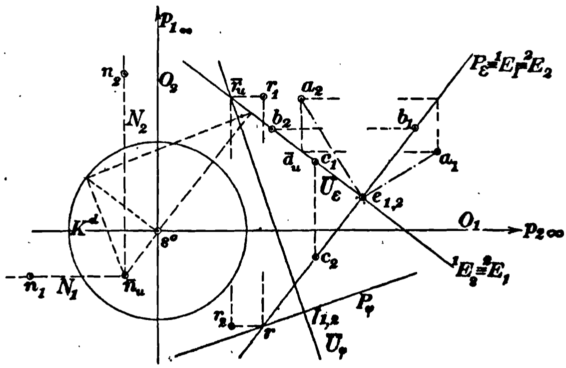
Pól $r_{1\infty}$ je v úběžném bodě paprsků komplexu Σ_1 ležících v rovině ϱ, jež svírají s osou $+ O_1$ úhel α, jehož $\operatorname{tg} \alpha = \dfrac{d}{z}$. Zvolme středové promítání o středu s, ležícím na ose Z kongruence $T_{1,2}$, průmětně π a distanci $ss^0 = d$ nad π. Jestliže je s' průsečík osy $+ O_2$ s distanční kružnicí K^d tohoto promítání, a přeneseme-li vzdálenost z roviny ϱ od π a sice kladné z (nad π) ve smyslu — O_1 od hlavního bodu s^0 do bodu r', tu $r's'$ udává směr paprsků komplexu Σ_1, v rovině ϱ a tedy pól $r_{1\infty}$. Pól $r_{2\infty}$ roviny ϱ ke komplexu Σ_2 je ve směru kolmém k směru určujícímu $r_{1\infty}$. Body r roviny ϱ zobrazují se v páry kolmic R_1, R_2, jež jdou úběžnými body $r_{1\infty}$ resp. $r_{2\infty}$. Přímky trsu r mají prvé obrazy na R_1 a druhé na R_2.



Obr. 1.

Určeme obrazy a_1, a_2 libovolné přímky A, jež je dána v středovém promítání (s, π) stopníkem a a úběžníkem $a^s{}_u$. V rotační kongruenci $T_{1,2}$ je přímka rovnoběžná s A, jejíž stopník je v otočeném úběžníku $\bar{a}_u$, který vznikne z úběžníku $a^s{}_u$ otočením o 90° ve smyslu $+$ kolem hlavního bodu s^0. Stopník a přímky A má obrazy v přímkách $A_1 \equiv ap_{1\infty}$ a $A_2 \equiv ap_{2\infty}$ a úběžný její bod a_u v přímkách $A_1{}^u \equiv \bar{a}_u p_{2\infty}$ a $A^u{}_2 \equiv \bar{a}_u p_{1\infty}$. V průsečících $(A_1 A_1{}^u)$, $(A_2 A_2{}^u)$ jsou obrazy a_1, a_2 přímky A. Z konstrukce obrazů a_1, a_2 přímky je též patrno, jak obráceně od obrazů a_1, a_2 přejdeme k přímce A v prostoru. Zaměníme-li obrazy a_1, a_2 a označíme $a'_1 \equiv a_2$ a $a'_2 \equiv a_1$, tu příslušná přímka A' odpovídá přímce A v zborcené involuci o imag. řídicích přímkách ${}^1D$, ${}^2D$. Splývá-li $a_1 \equiv a_2 \equiv \bar{a}_u \equiv a$ náleží příslušná přímka A rotační síti $T_{1,2}$.[1]) Přímky komplexu $\Sigma_1(\Sigma_2)$ zobrazují se v páry bodové, jichž spojnice jde bodem $p_{2\infty}(p_{1\infty})$. Tomuto zobrazení vymykají se přímky rovnoběžné s obraznou π. Tyto přímky určujeme vždy dvěma jejich body, jichž prvé a tudíž i druhé obrazy jsou spolu rovnoběžny. Přímky B, . . ., kolmé k přímce A, musí míti otočený úběžník $\bar{b}_u$ na antipoláře $\bar{A}$ otočeného úběžníku $\bar{a}_u$ přímky A vzhledem k distanční kružnici K^d. V obraze 1 zvolena přímka B tak, aby se protínala s A v bodě q, takže spojnice $a_1b_1 \equiv Q_1$, $a_2b_2 \equiv Q_2$ co obrazy téhož bodu q jsou k sobě kolmy. Jak určily by se obrazy c_1, c_2 přímky, jdoucí bodem q kolmo k (AB) ponechává se čtenáři.

2. Rovina ε (obr. 2) zobrazuje se v podobnost (ε) dvou polí π_1, π_2, jež jsou soumístné v π a jejichž odpovídající si přímky jsou



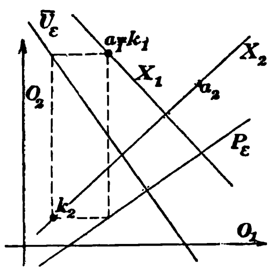
Obr. 2.

k sobě kolmé (Z, 4). Takovou podobnost (ε) možno určiti na př. samodružným bodem $e_{1,2}$ a párem bodů a_1, a_2 za podmínky, že $e_{1,2}a_2 \perp e_{1,2}a_1$, ježto přímky E, A se protínají. Stopníky $a, e, \ldots$ přímek $A, E, \ldots$ roviny ε jsou na její stopě P_ε a otočené úběžníky $\bar{a}_u$; $\bar{e}_u \equiv e_{1,2}, \ldots$ na otočené úběžnici $\bar{U}_\varepsilon \perp P_\varepsilon$. Z obrazu patrno, jak k libovolně zvolenému obrazu $a_1(a_2)$ sestrojí se odpovídající $a_2(a_1)$, dáno-li P_ε, $\bar{U}_\varepsilon$. Lze tudíž rovinu ε určiti zde též vzájemně kolmými přímkami P_ε, $\bar{U}_\varepsilon$. V obrazci vyznačeny obrazy libovolné přímky $B(C)$ roviny ε, jež náleží komplexu $\Sigma_1(\Sigma_2)$, patrně $b_1b_2 \parallel O_1(c_1c_2 \parallel O_2)$. Průsečík $e_{1,2}$ je obrazem přímky E kongruence $T_{1,2}$, jež je v rovině ε. Přímky P_ε, $\bar{U}_\varepsilon$ jsou obrazy nulového bodu ${}^1e({}^2e)$ roviny ε vzhledem k $\Sigma_1(\Sigma_2)$. Poměr podobnosti $k = e_2c_2 : e_1c_1 = e_2a_2 : e_1a_1 \ldots$ pro (ε) je týž pro všechny roviny, jež jdou týmž

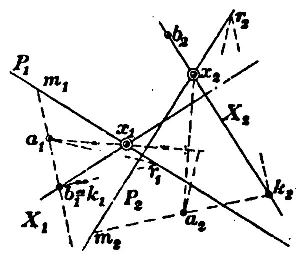
[1]) L. Eckhart: „Eine Abbildung der linearen Strahlkomplexe auf die Ebene“ ve zprávách Vídeňské akademie, roč. 1918.

úběžným bodem v π na X_∞ a které mají stopy rovnoběžné. Přímky N kolmé k rovině ε mají týž otočený úběžník $\overline{n}_u$, který je antipólem otočené úběžnice $\overline{U}_\varepsilon$ vzhledem k distanční kružnici K^d. Obrazy n_1, n_2 libovolné kolmice zvoleny na obrazech N_1, N_2 úběžného bodu n_∞ těchto kolmic libovolně.

Roviny jdoucí nulovým bodem $p_1(p_2)$ obrazny π vzhledem k $\Sigma_1(\Sigma_2)$ zobrazují se v singulární podobnost prvého řádu, jejíž singulární bod v prvém poli π_1 (v druhém poli π_2) je nulový bod té roviny k $\Sigma_1(\Sigma_2)$ a singulární přímka v druhém (prvém) poli je úběžná přímka X_∞. Roviny rovnoběžné s π zobrazují se v singulární podobnost druhého řádu, jejíž singulární body i přímky jsou úběžné.



Obr. 3.



Obr. 4.

V obr. 2 dána ještě rovina φ stopou P_φ a otočenou úběžnicí $\overline{U}_\varphi$ i lze snadno určiti obrazy r_1, r_2 průsečnice $R \equiv (\varepsilon\varphi)$ znajíce její stopník $r \equiv (P_\varepsilon P_\varphi)$ a otočený úběžník $\overline{r}_u \equiv (\overline{U}_\varepsilon \overline{U}_\varphi)$. Dána-li by byla ještě třetí rovina ψ a určili bychom ještě obrazy průsečnic $(\varepsilon\psi)$, $(\varphi\psi)$ tu musely by prvé obrazy všech tří průsečnic býti na přímce a druhé obrazy též na přímce kolmé k prvé, ježto tyto přímky byly by obrazy průsečíku $(\varepsilon\varphi\psi)$.

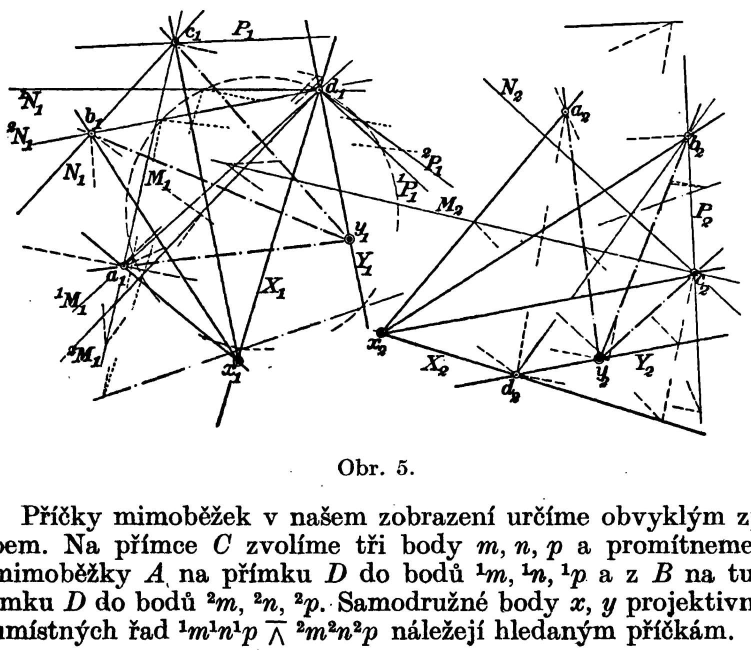
3. Řešme některé úlohy týkající se vzájemné polohy bodu, přímky a roviny.

a) V obr. 3 sestrojen průsečík x roviny $\varepsilon(P_\varepsilon, \overline{U}_\varepsilon)$ s přímkou A (a_1, a_2). V rovině ε myslíme si přímku K, jejíž $k_1 \equiv a_1$, říkejme prvou krycí přímku s A. Přímky K a A jsou různoběžné, ležíce v téže nulové rovině komplexu Σ_1 a proto $k_2 a_2 \equiv X_2$ a $X_1 \perp$ $\perp X_2$. Kdyby rovina ε byla rovnoběžná s π ve vzdálenosti z, znali bychom ihned směr obrazu X_1 podle obr. 1 ve spojnici $s'r'$.

b) V obr. 4 určeny obrazy příčky X, jdoucí bodem p (P_1, P_2) k mimoběžkám A (a_1, a_2), B (b_1, b_2). Přímka A s bodem p určují rovinu ε, jež zobrazuje se v kolmou podobnost (ε) danou $(P_1, a_1) \sim$ $\sim (P_2, a_2)$. V rovině ε zvolíme podle a) prvou krycí přímku K

s přímkou B ($k_1 \equiv b_1$) a určíme její druhý obraz k_2 jako odpovídající bod ke k_1 v (ε). V obr. 4, je $a_2k_2 \perp a_1k_1$ a jsou-li průsečíky těchto kolmic s P_1 a P_2 body m_1, m_2, tu musí $m_2a_2k_2 \sim m_1a_1k_1$. Nebo na P_1, P_2 zvoleny odpovídající si body r_1, r_2 ($a_2r_2 \perp a_1r_1$) a tu $r_2k_2 \perp \perp r_1k_1$. Průsečík $x \equiv (\varepsilon B)$ má obrazy $X_2 \equiv b_2k_2$ a $X_1 \perp X_2$ bodem b_1. Hledaná příčka je $X \equiv (xp)$, při čemž je kontrola $a_1x_1 \perp a_2x_2$. Kdyby příčka mimoběžek A, B měla býti rovnoběžná s přímkou C (c_1, c_2), tu bod p předchozího případu přešel by v úběžný bod přímky C, t. j. obraz P_1 šel by bodem c_1 rovnoběžně s O_1 atd.

c) Čtyři mimoběžky A, B, C, D mají obecně dvě příčky X, Y, nemají-li polohu hyperboloidickou. Zobrazíme-li tyto přímky družinami $a_1a_2, b_1b_2, c_1c_2, d_1d_2, x_1x_2, y_1y_2$, tu promítají se body a_1, b_1, c_1, d_1 z x_1 (y_1) paprsky, jež jsou kolmy k spojnicím bodu x_2 (y_2) s odpovídajícími body a_2, b_2, c_2, d_2, i řeší nám družiny x_1x_2, y_1y_2 zajímavou planimetrickou úlohu.

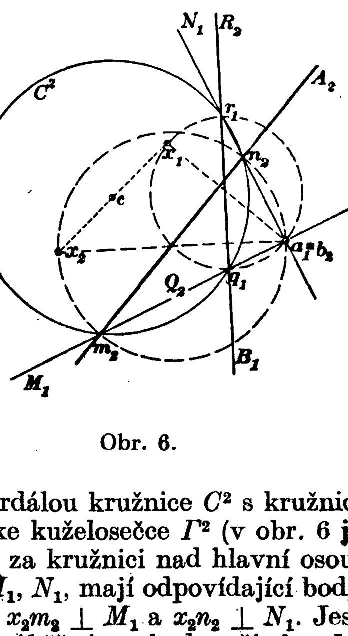


Obr. 5.

Příčky mimoběžek v našem zobrazení určíme obvyklým způsobem. Na přímce C zvolíme tři body m, n, p a promítneme je z mimoběžky A na přímku D do bodů $^1m, {}^1n, {}^1p$ a z B na tutéž přímku D do bodů $^2m, {}^2n, {}^2p$. Samodružné body x, y projektivních soumístných řad $^1m^1n^1p \barwedge {}^2m^2n^2p$ náležejí hledaným příčkám.

V obr. 5 zvolen bod m tak, že rovina (mA) jde pólem obrazny π k Σ_1, takže $M_1 \equiv c_1a_1$ a prvý obraz bodu ^1m je $^1M_1 \equiv a_1d_1$, kdežto druhý obraz $^1M_2$ netřeba rýsovati. Obraz $^2M_1$ obdržíme podle b). Podobně vhodně zvoleno $N_1 \equiv b_1c_1$ a $P_2 \equiv b_2c_2$ a sestrojeny prvé obrazy $^1N_1$, $^2N_1$ a $^1P_1$, $^2P_1$. Samodružné paprsky X_1, Y_1 projektivních soumístných svazků d_1 ($^1M_1{}^1N_1{}^1P_1$) $\barwedge$ d_1 ($^2M_1{}^2N_1{}^2P_1$) jsou prvými obrazy bodů x, y, druhé pak obrazy X_2, Y_2 jdou bodem d_2 kolmo k prvým obrazům. Sestrojením příček z bodů x, y k A, C tím, že určíme průsečíky rovin (xC) a (yC) s A dospíváme k obrazům x_1x_2, y_1y_2 jež řeší též vytknutou planimetrickou úlohu.

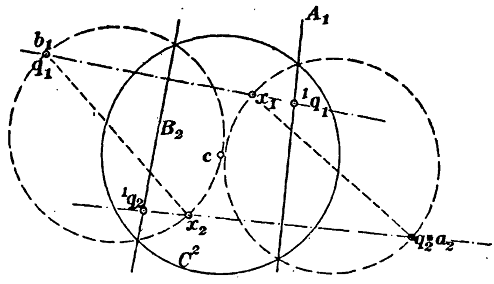
4. Lineární komplex Γ zobrazuje se v korelaci (Γ) jež obsahuje involuci, určující absolutní body na úběžné přímce X_∞ (Z, 14). Pólová kuželosečka je zde kružnicí C^2 (Z, 18) (obr. 6) a její body jsou koincidenční s odpovídajícími přímkami v (Γ). Prvý obraz x_1 sdružené poláry ${}^1X$ k přímce X_∞ vzhledem ke Γ, odpovídá v (Γ) úběžné přímce X_∞ (Z, 14). Ježto spojnice bodu x_1 s kruhovými body dotýkají se polárné kuželosečky Γ^2 je x_1 ohniskem kuželosečky Γ^2. Stejně druhý obraz x_2 poláry ${}^1X$ je ohniskem kuželosečky Γ^2. Koincidenční kuželosečky v korelaci (Γ) dotýkají se dvojnásob a společný pól dotyčné tětivy k oběma těmto kuželosečkám má splývající odpovídající přímky v (Γ) a je tudíž na X_∞, ježto přímka tato obsahuje involuci konjugovaných bodů v (Γ). Prochází tudíž spojnice x_1x_2 středem c kružnice C^2 a průměr na této spojnici je hlavní osou kuželosečky Γ^2. Kuželosečka Γ^2 je hyperbolou (elipsou), jestliže x_1 je vně (uvnitř) kružnice C^2. Když x_1 a tudíž i x_2 je na C^2 je komplex Γ speciálním komplexem sestávajícím z příček přímky ${}^1X$. Dospíváme tak k zobrazení lineárního komplexu v prvek bod — kružnice podle Eckharta.[1]) Zvolíme-li prvý obraz a_1 paprsku A komplexu Γ, odpovídá mu v (Γ) ∞^1 druhých obrazů, jež jsou body odpovídající přímky A_2, která je chordálou kružnice C^2 s kružnicí opsanou nad průměrem a_1x_2. Tečny ke kuželosečce Γ^2 (v obr. 6 je to elipsa), jež má ohniska x_1, x_2 a C^2 za kružnici nad hlavní osou, počítáme-li k poli π_1, a označíme je M_1, N_1, mají odpovídající body v (Γ) v průsečících m_2, n_2 a sice musí $x_2m_2 \perp M_1$ a $x_2n_2 \perp N_1$. Jest totiž na př. x_2m_2 odpov. přímkou k úběžnému bodu přímky M_1 a musí jíti konjugovaným bodem v Π_X. Jestliže bod a_1 označíme jakožto druhý obraz b_2, jsou prvé obrazy na přímce B_1, jež je chordálou kružnice C^2 s kružnicí opsanou nad b_2x_1 jakožto průměrem.



Obr. 6.

5. V obr. 7 ukázáno jak k přímce Q dané obrazy q_1, q_2 sestrojíme obrazy ${}^1q_1$, ${}^1q_2$ sdružené poláry ${}^1Q$ vzhledem ke komplexu Γ, danému podle odstavce 4 kružnicí C^2 a obrazy x_1, x_2.

Přímky komplexu Γ, jež protínají Q protínají též ${}^1Q$. Přímka B komplexu Γ, jejíž prvý obraz b_1 je v q_1 protíná Q a má druhý obraz v libovolném bodě odpovídající přímky $B_2 \perp b_1x_1$. Ježto všechny tyto přímky B musí protínati též ${}^1Q$, je ${}^1q_1$ na q_1x_1 a ${}^1q_2$ na B_2. Stejně, označíme-li q_2 jakožto a_2 je prvý obraz a_1 přímky A komplexu Γ vázán na odpov. přímku $A_1 \perp x_2q_2$, a ze stejných důvodů musí ${}^1q_2$ býti na x_2q_2 a ${}^1q_1$ na A_1. Tím jsou obrazy ${}^1q_1$, ${}^1q_2$ konjugované poláry ${}^1Q$ určeny. Oba páry $X_\infty {}^1X$, $Q{}^1Q$ konjugovaných polár mají polohu hyperboloidickou a proto prvé obrazy q_1, x_1, ${}^1q_1$ jsou na přímce a stejně druhé obrazy a sice jest $q_1x_1{}^1q_1 \sim q_2x_2{}^1q_2$ (Z, 20).

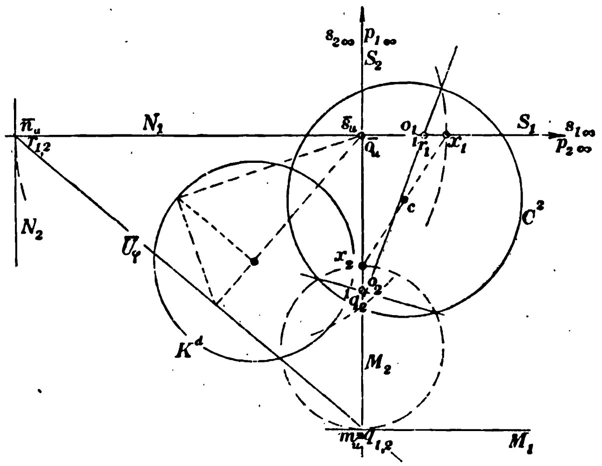


Obr. 7.

6. Kdybychom měli určiti polárnou rovinu ε bodu e (E_1, E_2) vzhledem ke komplexu lineárnímu Γ (C^2, x_1x_2), zvolíme v trsu o středu e libovolný paprsek Q, na př. ten, který náleží kongruenci $T_{1,2}$, jehož oba obrazy splývají v průsečíku $q_{1,2} \equiv (E_1E_2)$. Konjugovaná polára ${}^1Q$ ku Q je v rovině ε a tudíž její obrazy ${}^1q_1$, ${}^1q_2$ sestrojené podle odst. 5 určují E_1 případně E_2 podobnost (ε). Obdobně si počínáme při určení pólu f roviny φ $(P_\varphi, \overline{U}_\varphi)$. V rovině φ zvolíme opět přímku Q na př. opět tu, jež náleží kongruenci $T_{1,2}$, stanovíme její konjugovanou poláru ku Γ a její průsečík s rovinou φ, určený podle odst. 3 a) je hledaným pólem f.

7. Budiž v obraze 8 sestrojiti obrazy o_1, o_2 osy O lineárního komplexu Γ (C^2, x_1x_2). Úběžné přímky mají tytéž dva obrazy $s_{1\infty}$, $s_{2\infty}$, kde $s_1 \equiv p_2$, $s_2' \equiv p_1$. Konjugované k nim poláry mají týž úběžný bod s, jehož obrazy jsou $S_1 \equiv x_1s_{1\infty}$, $S_2 \equiv x_2s_{2\infty}$. Průsečík $\overline{s}_u \equiv (S_1S_2)$ je otočeným úběžníkem všech průměrů komplexu a tedy též osy O. Osa O je konjugovanou polárou úběžné přímky roviny φ kolmé k směru průměrů. Otočená úběžnice $\overline{U}_\varphi$ roviny φ je tudíž antipolárou k $\overline{s}_u$ vzhledem k distanční kružnici K^d. Na úběžné přímce roviny φ zvolíme dva body m, n, jejichž nulové roviny μ, ν protínají se v hledané ose O. Výhodné je zvoliti obraz $M_2 \equiv S_2$ a $N_1 \equiv S_1$, ježto nulová rovina μ (ν) jde nulovým bodem

p_2 (p_1) roviny π k Σ_2 (Σ_1). Singulární body v konečnu podobností (μ), (ν) jsou obrazy osy O. Bodem m (n) zvolena přímka Q (R) na př., která náleží $T_{1,2}$ a určen druhý (prvý) obraz ${}^1q_2$ (${}^1r_1$) konjugované poláry ${}^1Q$ (${}^1R$) a tu $o_1 \equiv {}^1r_1$, $o_2 \equiv {}^1q_2$.

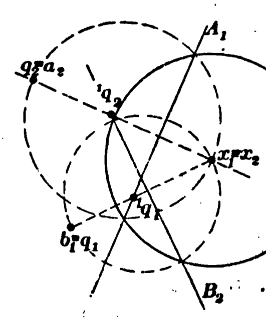


Obr. 8.

8. Jestliže polára ${}^1X$ úběžné osy X_∞ roviny π vzhledem ke komplexu lineárnímu Γ náleží koincidenční kongruenci $T_{1,2}$, takže $x_1 \equiv x_2$ je v středu c kružnice C^2, tu korelace (Γ) přejde v polaritu vzhledem k C^2. Komplex Γ je invariantní vzhledem k zborcené involuci o imaginárních osách ${}^1D$, ${}^2D$, t. j. obsahuje tyto osy a komplex Γ je v involuci k oběma základním komplexům Σ_1, Σ_2 (Z, 28).

„Kružnice obrazny s jejich středy zobrazují nám lineární komplexy trojmocné soustavy lineárních komplexů, jež jsou v involuci k svazku základních komplexů ($\Sigma_1\Sigma_2$).

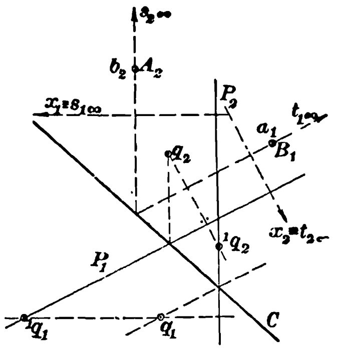
Obrazy ${}^1q_1$, ${}^1q_2$ konjugované poláry ${}^1Q$ k libovolné přímce Q (obr. 9) určí se stejně jako v obraze 7; snadno z obrazce vyplývá že ${}^1q_1{}^1q_2 \parallel q_1q_2$. Náleží-li Q ke kongruenci $T_{1,2}$ z konstrukce ihned plyne, že i ${}^1Q$ je v $T_{1,2}$ a proto komplex Γ obsahuje přímky ${}^1D$, ${}^2D$.



Obr. 9.

9. Obsahuje-li lineární komplex Γ osu X_∞, ale nená-

leží svazku $(\Sigma_1 \Sigma_2)$, přejde kružnice C^2 v přímku C (obr. 10) a body x_1, x_2 jsou úběžné a neodpovídají si v absolutní involuci Π_X (Z, 16). Body $t_{1\infty}$, $s_{2\infty}$ odpovídající v Π_X bodům $t_2 \equiv x_{2\infty}$ a $s_1 \equiv x_{1\infty}$ jsou singulárními body centrální korelace (Γ). Libovolnému bodu a_1 odpovídá přímka A_2 svazku $s_{2\infty}$, která se spojnicí $a_1 t_{1\infty}$ protíná se na přímce C a naopak bodu b_2 odpovídá paprsek B_1 procházející bodem $t_{1\infty}$ a protínající se se spojnicí $s_2 b_2$ na C. V obraze 10 vyznačena konstrukce obrazů ${}^1q_1$, ${}^1q_2$ poláry ${}^1Q$ přímky Q o obrazech q_1, q_2 vzhledem k lineárnímu komplexu Γ, jež vyplývá z konstrukce odst. 5. ∞^4 lineárních komplexů obsahujících osu X_∞, zobrazuje se v ∞^4 centrálních korelací, jejichž singulární body t_1, s_2 jsou na úběžné přímce a odpovídající singulární paprsky protínají se na přímce C v konečnu.



Obr. 10.

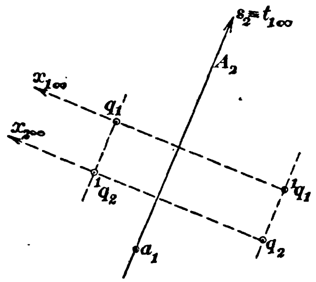
Jestliže $x_{1\infty}$, $x_{2\infty}$ odpovídá si v absolutní involuci Π_X, je příslušný lineární komplex speciální a sestává z příček přímky, jež protíná osu X_∞ a je v rovině rovnoběžné s obraznou π, jejíž nulový bod vzhledem k Σ_1 je v $x_{1\infty}$. V případě pak kdy mimo to přímka C je kolma k směru $x_{1\infty}$ $(x_{2\infty})$, dostáváme dvojnásob singulární korelaci, jejíž singulární přímka v druhém (prvém) poli je C a v prvém (druhém) poli úběžná přímka; singulární body jsou v prvém poli úběžný bod na C $(x_{1\infty})$ a v druhém poli $x_{2\infty}$ (úběžný bod na C).

10. Nechť v předchozím případě splynou body x_1, x_2 v témž úběžném bodě, komplex Γ obsahuje osu X_∞ a nenáleží-li svazku (Σ_1, Σ_2) má korelace (Γ) koincidenční přímku C, jež je kolma k směru $x_{1\infty} \equiv x_{2\infty}$. Korelace (Γ) je centrální o společném středu v úběžném bodě $t_{1\infty} \equiv s_{2\infty}$ na přímce C a charakteristická projektivnost obou svazků je taká, že samodružné paprsky jsou v C a X_∞. K určení obrazu takového komplexu stačí mimo přímky C znáti ještě obrazy a_1, a_2 jedné jeho přímky A, čímž projektivnost tato je dána. Patrně vzdálenosti bodu v prvém poli a odpovídající přímky v druhém poli od přímky C jsou v konstantním poměru k. Pro $k = -1$ dostáváme obraz lineárního komplexu, který je v involuci k svazku $(\Sigma_1 \Sigma_2)$ (odst. 8) a (Γ) je centrální involutorní reciprocitou.

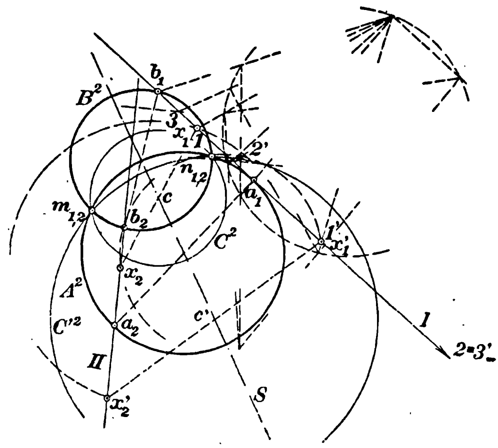
Pro $k = 0$ je (Γ) dvojnásob singulární o singulární přímce C v prvém poli a X_∞ v druhém poli.

Náleží-li lineární komplex Γ předchozího případu svazku $(\Sigma_1\Sigma_2)$, tu $t_{1\infty} \equiv s_{2\infty}$ (Z, 17) a tedy též $x_{1\infty} \equiv x_{2\infty}$ a oba svazky singulárních paprsků splývají. V obr. 11 vyznačen tento případ, jakož i konstrukce obrazů ${}^1q_1, {}^1q_2$ poláry ${}^1Q$ k libovolné přímce Q. Pro základní komplex Σ_1 je $t_1 \equiv s_2 \equiv p_{2\infty}$ a pro Σ_2 pak $t_1 \equiv s_2 \equiv p_1$ (odst. 1).

Čtyřmocnou soustavu lineárních komplexů obsahujících osu X_∞ označme pro další Ξ^4 a trojmocnou soustavu z těchto, pro něž $x_{1\infty} \equiv x_{2\infty}$ označme Ξ^3.



Obr. 11.



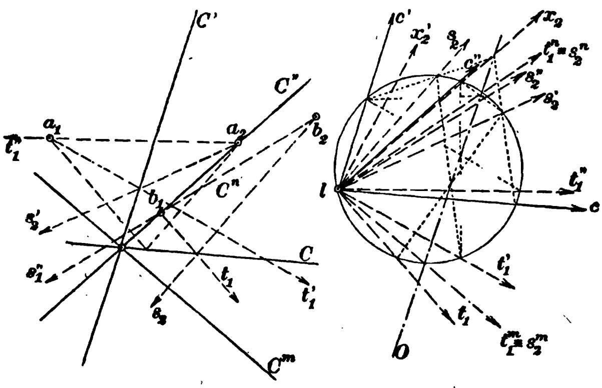
Obr. 12.

11. Uvažujme o dvou lineárních komplexech Γ, Γ' určených v obraze prvky C, x_1x_2 a C', $x'_1x'_2$ (obr. 12). Komplexy ty určují svazek lineárních komplexů, jež obsahují jejich společnou lineární kongruenci $(\Gamma\Gamma')$, která má s kongruencí $T_{1,2}$ společné přímky M, N, jejichž obrazy jsou v průsečících $m_{1,2}, n_{1,2}$ kružnic C^2, C'^2. Další komplexy $\Gamma^\times$ svazku mají za pólovou kružnici $C^{\times 2}$ kružnici svazku $(C^2C'^2)$ a obraz $x_1^\times$ je na přímce $I \equiv x_1x'_1$ a $x_2^\times$ na přímce $II \equiv x_2x'_2$ a sice řada $x_1x'_1x_1^\times \ldots$ na I je podobnou s řadou $x_2x'_2x_2^\times \ldots$ na II. Úběžné body přímek I, II příslušejí totiž ke komplexu svazku, který obsahuje úběžnou přímku X_∞ a jehož koincidenční kružnice přechází v přímku $m_{1,2}n_{1,2}$ svazku $(C^2C'^2)$ (odst. 9). Středy $c, c', c^\times, \ldots$ kružnic $C^2, C'^2, C^{\times 2}, \ldots$ tvoří řadu S $(c, c', c^\times, \ldots)$ podobnou s řadou I $(x_1, x'_1, x_1^\times, \ldots)$. Spojnice $x_1x_2, x'_1x'_2, x_1^\times x_2^\times, \ldots$ obalují parabolu dotýkající se přímek I, S, II. Svazek lineárních komplexů obsahuje dva speciální komplexy sestávající z příček přímky A, případně B. Určeme obrazy a_1a_2, b_1b_2 přímek A, B! K tomu užijeme toho, že přímky A, B jsou konjugovanými polárami k oběma komplexům Γ, Γ'. Body a_1, b_1 jsou na I a a_2, b_2 na II. K libovolnému bodu $x_1^\times$ na I náleží určitý bod $x_2^\times$ na II a body ty jsou obrazy konjugované polá-

ry ${}^1X^\times$ osy $X_\infty^{1\prime\prime}$ vzhledem ke $\Gamma^\times$. Konjugované poláry k přímce ${}^1X^\times$ vzhledem ke Γ a Γ' splývají jen tehdy, když ${}^1X^\times$ splyne s A nebo B. Mění-li se komplex $\Gamma^\times$ ve svazku $(\Gamma\Gamma')$ budou prvé obrazy konjugovaných polár k příslušným přímkám ${}^1X^\times$ vzhledem ku Γ a Γ' tvořiti na přímce I dvě projektivní řady, jichž samodružné body jsou v obrazech a_1, b_1 řídicích přímek kongruence $(\Gamma\Gamma')$. Druhé obrazy a_2, b_2 lze obdobně dostati anebo na základě toho, že úsečky a_1a_2, b_1b_2 jsou půleny přímkou S. Zvolme nejprve $x_1{}^\times$, $x_2{}^\times$ v úběžných bodech přímek I, II, tu dostaneme na I družinu bodovou $1 \equiv x_1$, $1' \equiv x'_1$. Dále zvolme $x_1{}^\times$, $x_2{}^\times$ v x_1, x_2 a dostaneme na I družinu 2_∞, $2'$, kde $2'$ je na chordále kružnice C'^2 s kružnicí opsanou nad $x_2x'_1$ co průměrem. Stejně pro splynutí $x_1{}^\times$, $x_2{}^\times$ s x'_1, x'_2 dostaneme obdobně určenou třetí družinu 3, $3'_\infty$. Ze tří družin $11'$, $22'$, $33'$ projektivnosti na přímce I určíme samodružné body a_1, b_1 a k nim body a_2, b_2 na II. Kružnice A^2, B^2 opsané nad a_1a_2, b_1b_2 co průměry náleží k svazku $(C^2C'^2)$ a jsou obrazy speciálních lineárních komplexů svazku $(\Gamma\Gamma')$ sestávajících z příček přímek A, B. V obraze přímky A, B jsou reálné a kongruence $(\Gamma\Gamma')$ je hyperbolickou o řídicích přímkách A, B.

V případě, kdy $x_1x'_1 \perp x_2x'_2$, t. j. poláry ${}^1X$, ${}^1X'$ se protínají, známe předem jednu řídicí přímku na př. B, ježto protíná osu X_∞ a má úběžné obrazy $b_{1\infty}$, $b_{2\infty}$ a speciální komplex (B) má obraz v chordále kružnic C^2, C'^2.

12. Libovolný svazek lineárních komplexů v soustavě Ξ^4 (odst. 10) obsahuje dva komplexy soustavy Ξ^3, ježto projektivní

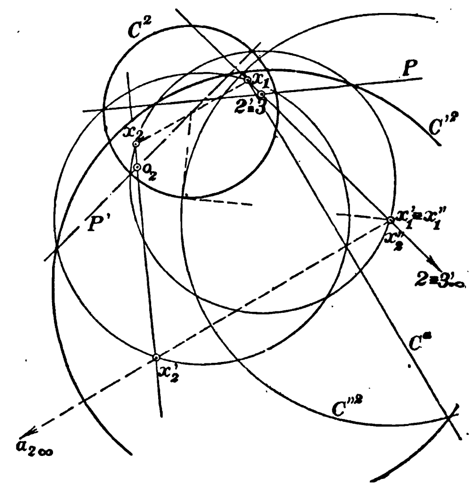


Obr. 13.

řady bodové $x_1 \ldots \barwedge x_2 \ldots$ na X_∞ mají dva samodružné body. Mějme v obr. 13 dány dva lineární komplexy Γ, Γ' náležející k Ξ^4 a sice koincidenčními přímkami C, C' a úběžnými středy t_1, s_2, t'_1, s'_2

singulárních svazků. Další komplex Γ'' svazku $(\Gamma\Gamma')$ má koincidenční přímku C'' jdoucí průsečíkem (CC'). Příslušné úběžné body t''_1, s''_2 lze stanoviti dvojím způsobem. Libovolný bod a_2 (b_1) na C'' je druhým (prvním) obrazem jisté přímky A kongruence $(\Gamma\Gamma')$, k němuž najdeme první (druhý) obraz a_1 (b_2) na základě toho, že přímka ta je v obou komplexech Γ, Γ'. Udává pak spojnice a_2a_1 (b_1b_2) bod $t''_{1\infty}$ $(s''_{2\infty})$. Jinak lze užíti projektivnost $t_1t'_1t''_1 \ldots \overline{\wedge}\ s_2s'_2s''_2\ \overline{\wedge}\ CC'C'' \ldots$ Sestrojíme tedy libovolným bodem l rovnoběžky se směry určujícími tyto úběžné body, případně s koincidenčními přímkami. Samodružnými body $t_1^m \equiv s_2^m$ a $t_1^n \equiv s_2^n$ procházejí též koincidenční přímky C^m, C^n, ježto příslušné k nim komplexy náležejí soustavě Ξ^3 (odst. 10). Mají proto tři tyto vzájemně projektivní svazky o středu l tytéž dva samodružné paprsky z dvou známých odpovídajících si jejich trojin $(t_1s_2c,\ t'_1s'_2c')$ lze proto určiti společnou direkční osu O a pomocí ní lze obrazy komplexů svazku $(\Gamma\Gamma')$ doplňovati. Pro speciální lineární komplexy svazku musí směry $t_{1\infty}{}^a$, $t_{1\infty}{}^b$ státi kolmo k směrům $s_{2\infty}{}^a$, $s_{2\infty}{}^b$ a proto směry $s_{2\infty}{}^a$, $s_{2\infty}{}^b$ jsou samodružnými paprsky projektivních svazků $l\ (s_2, s'_2, \ldots)\ \overline{\wedge}\ l\ (x_2, x'_2, \ldots)$ (v obraze 13 nesestrojováno).

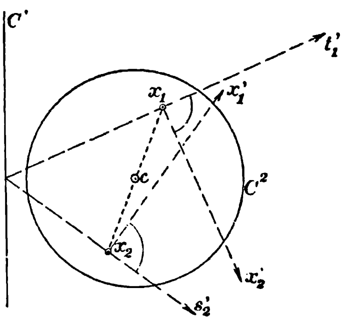
13. Mají-li lineární komplexy Γ, Γ' býti v involuci, musí v obr. 12 obrazy x_1, x'_1 býti harmonicky sdruženy k a_1, b_1



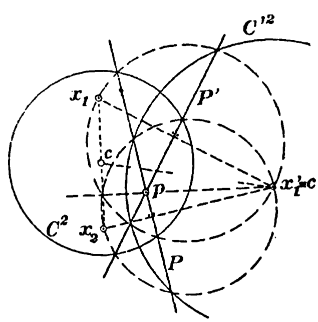
Obr. 14.

a tudíž též $(x_2x'_2a_2b_2) = -1$, t. j. projektivita určující body a_1, b_1 (a_2, b_2) na přímce I (II) je involucí. K tomu postačí, aby $2' \equiv 3$ a tedy chordála P kružnice C'^2 s kružnicí opsanou nad $x_2x'_1$ co průměrem, byla totožna s chordálou kružnice

C^2 s kružnicí mající $x_2x'_2$ za průměr (obr. 14). Ovšem platí též současně, že chordála P' kružnice C^2 s kružnicí o průměru $x_2x'_1$ splývá s chordálou kružnice C'^2 s kružnicí průměru $x_1x'_2$. Dán-li lineární komplex Γ útvary C^2, x_1x_2 obrazny, lze pro lineární komplex Γ', který je s ním v involuci, zvoliti body x'_1, x'_2 libovolně, ale kružnice C'^2 sestrojí se již snadno z předchozí podmínky. Z této podmínky pro involutornost komplexů Γ a Γ' vyplývá ihned, že speciální komplex sestávající ze sečen přímky A je v involuci s Γ, jestli přímka A je obsažena v komplexu Γ. Jestliže komplex Γ' obsahuje úběžnou osu X_∞ obrazny π, tu aby byl v involuci s obecným komplexem Γ (C^2, x_1x_2) (obr. 15), musí podle hořejší podmínky přímka C' procházeti průsečíkem kolmic sestrojených v x_1 a x_2 k směrům $x'_{2\infty}$, $x'_{1\infty}$.



Obr. 15.



Obr. 16.

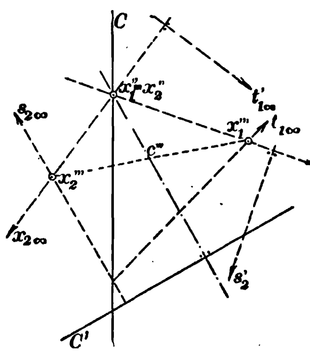
Eckhart v uvedeném pojednání[1]) ve větě 6 uvádí jinou podmínku pro involutornost komplexů Γ, Γ'. Abychom tuto podmínku odvodili, povšimněme si v obr. 16 případu, kdy Γ' je v involuci se základními komplexy Σ_1, Σ_2 (odst. 8), t. j. $x'_1 \equiv x'_2 \equiv c'$. Zvolíme-li podle předchozího obecného případu lineární komplex Γ' v involuci s Γ, jdou chordály všech vytknutých kružnic týmž bodem p, který je k středu c' kružnice C'^2 involutorně sdružen v korelaci (Γ), v niž se zobrazuje komplex Γ. Jest patrně $x'_1p \perp x_1x_2$. Body $x'_1 \equiv c'$ a p jsou harmonicky sdruženy vzhledem ke koincidenční kružnici C^2 a proto kružnice C'^2 protíná kolmo kružnici C^2.

Všechny komplexy lineární, jež jsou v involuci k lineárnímu komplexu Γ, tvoří čtyřmocnou soustavu a ta má s trojmocnou soustavou komplexů Γ', jež jsou v involuci k Σ_1 a Σ_2, společnou dvojmocnou soustavu lineárních komplexů, jichž koincidenční kružnice protínají kolmo kružnici C^2.

Mysleme si nyní v obr. 14 ještě lineární komplex Γ'', který je v involuci ku Γ a jehož $x''_1 \equiv x''_2 \equiv x'_1$ a tudíž příslušná kružnice C''^2 protíná kolmo C^2. Komplexy Γ', Γ'' jsouce v involuci ke Γ, určují svazek $(\Gamma'\Gamma'')$, jehož všechny komplexy jsou ke Γ v involuci. V tomto svazku $(\Gamma'\Gamma'')$ je též komplex obsahující osu X_∞, který je tu speciálním komplexem, jehož přímky sečou přímku A jdoucí pólem p_1 obrazny π vzhledem k základnímu lineárnímu komplexu Σ_1. Koincidenční útvar korelace (A) je v konečnu chordála C^a kružnic C'^2, C''^2. Aby tento speciální komplex byl v involuci s Γ, musí podle hořejší podmínky chordála C^a procházeti bodem x_1. Tento vztah je Eckhartovou podmínkou involutornosti komplexů Γ, Γ'.

Dva lineární komplexy $\Gamma(C^2, x_1x_2)$, $\Gamma'(C'^2, x'_1x'_2)$ jsou v involuci, jestliže chordála kružnice C'^2 s kružnicí o středu x'_1 a protínající kolmo kružnici C^2, jde bodem x_1.

Z odvození patrno, že v této podmínce lze zaměniti C^2, C'^2, při současné záměně x'_1 a x_1, anebo zaměniti x_1, x'_1 za x_2, x'_2.



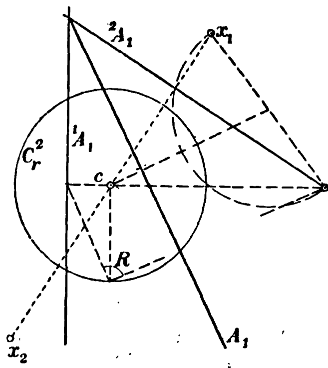
Obr. 17.

14. Určeme podmínku involuce dvou lineárních komplexů Γ, Γ' soustavy Ξ^4 (odst. 10)! Budiž jeden tento komplex Γ dán koincidenční přímkou C a úběžnými body t_1, s_2, kdežto pro druhý komplex Γ' zvolme úběžné body t'_1, s'_2 (obr 17)! Vyhovuje zde ∞^1 komplexů Γ' a jich koincidenční přímky C' jsou spolu rovnoběžné. Abychom určili směr těchto přímek, zvolme dva lineární komplexy Γ'', Γ''', jež jsou v involuci s Γ podle obr. 16, a jichž svazek $(\Gamma''\Gamma''')$ obsahuje jeden z komplexů Γ'. Zvolíme $x''_1 \equiv x''_2$ kdekoliv na přímce C a jím vedeme přímky směřující k úběžným bodům x'_1 a x'_2, na nichž třeba zvoliti x'''_1 a x'''_2 tak, aby jimi jdoucí přímky směrů $t_{1\infty}$, $s_{2\infty}$ protínaly se na přímce C. Libovolné kružnice C''^2, C'''^2 opsané kolem středů x''_1 a půlícím bodem c''' úsečky $x'''_1x'''_2$, jsou

koincidenčními kružnicemi takových dvou komplexů Γ'', Γ'''. Chordála kružnic C''^2, C'''^2 udává směr koincidenční přímky C', který je též kolmý k spojnici x''_1c'''.

15. Svazek lineárních komplexů $(\Gamma\Gamma')$, jehož $C^2 \equiv C'^2$, má všechny koincidenční kružnice totožné a obsahuje komplex svazku $(\Sigma_1\Sigma_2)$, jehož obraz má všechny body průmětny za samodružné a totožné singulární svazky obrazu mají střed v úběžném bodě kolmic k spojnici $x_1x'_1$ (odst. 10). Jestliže shodné řady x_1, $x'_1, \ldots, x_2, x'_2, \ldots$ jsou na téže přímce jdoucí středem kružnice $C^2 \equiv C^{2\prime}$, tu svazek $(\Gamma\Gamma')$ obsahuje jeden komplex Γ^0 trojmocné soustavy lineárních komplexů involutorní k svazku $(\Sigma_1\Sigma_2)$, jehož $x_1{}^0 \equiv x_2{}^0$. Průsečíky spojnice x_1x_2 s C^2 v posledním případě jsou póly $x_1{}^a$, $x_2{}^a$ nebo $x_1{}^b \equiv x_2{}^a$, $x_2{}^b \equiv x_1{}^a$ dvou speciálních lineárních komplexů tohoto svazku, jichž parametr $= 0$. Komplex lineární Γ^0 je pravotočivý ježto je v involuci k základnímu komplexu Σ_1, který je levotočivý a svazek $(\Gamma^0\Sigma_1)$ má reálné speciální komplexy. Jest proto lineární komplex Γ, jehož x_1 a tudíž i x_2 leží uvnitř koincidenční kružnice C^2 pravotočivým a leží-li vně levotočivým.

16. Lineární komplexy Γ, Γ', v jejichž obrazech $x'_1 \equiv x_1$ a $x'_2 \equiv x_2$ určují svazek, jejichž koincidenční kružnice



Obr. 18.

jsou soustředné a příslušné obrazy konjugované poláry ${}^1X$ splývají. Svazek $(\Gamma\Gamma')$ obsahuje lineární kongruenci o řídicích přímkách ${}^1X$, X_∞. Speciální komplexy Γ^a, Γ^b svazku tohoto mají koincidenční kružnice C^a, C^b, z nichž prvá má průměr x_1x_2 a druhá nekonečně veliký. Svazek obsahuje též komplexy, jichž kružnice koincidenční jsou imaginární a které jsou levotočivé a jich společné přímky s kongruencí $T_{1,2}$ tvořice imaginární plochu $2°$, jež je společná třem stejně vinutým lineárním komplexům. Zvolíme-li reálného zástupce imaginární kružnice C^2 kružnici C_r^2 (obr. 18), tu korelace (Γ) určuje se obdobně jako při reálné koincidenční kružnici. Na př. bodu a_2 odpovídá přímka A_1, která je chordálou kružnice C^2 a kružnice opsané nad a_2x_1 jakožto průměrem. Chordálu A_1 možno obdržeti též uvažováním o svazku lineárních komplexů o společné kružnici koincidenční C^2, při němž probíhá bod x_1 průměr cx_1. Přímky A_1 odpovídající bodu a_2 v obrazech těchto lineárních komplexů opisují svazek. Splyne-li x_1 se středem c, tu odpovídající přímka ${}^1A_1$ je antipolárou k a_2 vzhledem C_r^2, a je-li x_1 úběžným bodem, odpovídající přímka ${}^2A_1$ jde bodem a_2 kolmo k cx_1. Odpovídající přímka A_1 v (Γ) bodu a_2 jde průsečíkem $({}^1A\,{}^2A)$ kolmo k centrále kružnice C^2 a kružnice opsané nad průměrem a_2x_1. Z konstrukce ihned patrno, jak se tato zjednoduší, kdyby kružnice C^2 měla poloměr $= 0$ a přešla v minimální přímky bodu c.

17. T ř i l i n e á r n í k o m p l e x y $\Gamma, \Gamma', \Gamma''$ nenáležející témuž svazku určují dvojmocnou soustavu lineárních komplexů zvanou též s í ť komplexů lineárních. Lineární komplexy, jež jsou v involuci s těmito třemi základními komplexy Γ, Γ', Γ'' a tudíž s celou sítí, tvoří opět síť lineární lineárních komplexů $\Lambda, \Lambda', \Lambda''$, která obsahuje komplex Λ^0 trojmocné lineární soustavy lineárních komplexů, jež jsou v involuci k svazku $(\Sigma_1\Sigma_2)$. I musí k o i n c i d e n č n í k r u ž n i c e $C^2, C'_2, C''_2, \ldots$ s í t ě $[\Gamma\Gamma'\Gamma''\ldots]$ k o l m o p r o t í n a t i k o i n c i d e n č n í k r u ž n i c i $L^{2,0}$ komplexu Λ^0. Podle toho lze snadno sestrojiti koincidenční kružnice komplexů sítě $[\Gamma\Gamma'\Gamma'']$. Jsou-li $c, c', c'', \ldots$ středy kružnic $C^2, C'^2, C''^2, \ldots$, tu musí pole bodové $c, c', c'', \ldots$ býti afinní se soumístným polem $x_1, x'_1, x''_1, \ldots$, ježto odpovídající si řady bodové, přináležející témuž svazku lineárních komplexů obsaženému v síti, jsou podobné. Afinita těchto dvou soumístných polí má jeden samodružný bod $c'^0 \equiv x_1^0$ v konečnu, k němuž patřící komplex Γ^0 je v involuci se svazkem $(\Sigma_1\Sigma_2)$ a jeho kružnice koincidenční $C^{2,0}$ protíná kolmo kružnice koincidenční sítě $[\Lambda\Lambda'\Lambda'']$.

18. Č t y ř i l i n e á r n í k o m p l e x y $\Gamma, \Gamma', \Gamma'', \Gamma'''$, které nejsou v téže síti, určují lineární trojmocnou soustavu lineárních komplexů, jež je v involuci k lineárnímu svazku lineárních komplexů $\Lambda, \Lambda', \ldots$ Koincidenční kružnice $L^2, L'^2, \ldots$ protínají kolmo kružnici $C^{2,0}$ patřící k síti $[\Gamma\Gamma'\Gamma'']$ a kružnici ${}^1C^{2,0}$ patřící k síti $[\Gamma'\Gamma''\Gamma''']$ a proto řada $l, l', \ldots$ středů koincidenčních kružnic je na chordále obou těchto kružnic a je podobná s řadou $x_1^l, x_1^{l'}, \ldots$ bodů patřících k $\Lambda, \Lambda', \ldots$ Dva páry odpovídajících si bodů obou řad lze snadno určiti. Kdyby komplexy $\Gamma, \Gamma', \Gamma'', \Gamma'''$ byly speciální, dostali bychom určení svazku lineárních komplexů čtyřmi paprsky společné kongruence lineární.

19. Mějme konečně p ě t l i n e á r n í c h k o m p l e x ů $\Gamma, \ldots, \Gamma^{IV}$, které nejsou v téže lineární trojmocné soustavě, tu u r č u j í j e d e n

lineární komplex Λ, který je k nim v involuci! Koincidenční kružnice L^2 komplexu Λ protíná kolmo všechny kružnice $C^{2,0}$ náležející k třem komplexům z daných pěti, jichž je $\binom{5}{3} = 10$. Ke konstrukci této kružnice L^2 třeba určiti jen tři z těchto kružnic, na př. v sítích $[\Gamma\Gamma'\Gamma'']$, $[\Gamma\Gamma'\Gamma''']$, $[\Gamma\Gamma'\Gamma^{IV}]$. Příslušný bod x_1^l určí se na základě toho, že komplex Λ je v involuci s dvěma komplexy z lineární soustavy $[\Gamma, \ldots, \Gamma^{IV}]$. Jsou-li komplexy $\Gamma, \ldots, \Gamma^{IV}$ speciální, dostáváme určení lineárního komplexu Λ pěti jeho paprsky a současně sestrojení korelace (Λ) obsahující absolutní involuci a pět daných párů sdružených bodů.

Komplex lineární obsahující osu X_∞ je určen čtyřmi svými paprsky a při určení jeho koincidenční přímky L setkáváme se s úlohou, jež je řešena při jiné příležitosti.[2])

*

Sur une représentation linéaire spéciale de l'espace des droites par la variété des couples de points dans un plan.

(Résumé de l'article précédent.)

Cette représentation est un cas spécial remarquable de celle que l'auteur a considérée dans son traité „Sur une représentation linéaire de l'espace des droites par la variété des couples de points dans un plan", Mémoires de la société royale des sciences de Bohême 1936, numéro 1. Dans ce travail la droite était représentée par la couple de traces de ses droites conjuguées par rapport à deux complexes linéaires fondamentaux Σ_1, Σ_2 sur un plan π. Ici on choisit pour Σ_1, Σ_2 deux complexes linéaires à gauche ayant le même paramètre d et dont les axes perpendiculaires O_1, O_2 sont dans le plan π. La homographie remarquable Π_X est ici une involution sur la droite à l'infini X_∞ du plan π déterminant les points cycliques du plan π. La figure de coïncidences c'est à dire la congruence linéaire $T_{1,2} \equiv (\Sigma_1, \Sigma_2)$ est ici de révolution; son axe $Z \perp \pi$ passe par le point $s^0 \equiv (O_1, O_2)$.

Les images des figures fondamentales sont les lieux des images des droites incidentes avec les figures. Par exemple un point est représenté par deux droites normales, un plan par une similitude, dont les droites correspondantes sont perpendiculaires. On a résolu les problèmes fondamentaux d'incidence, concernant a) le point d'intersection d'un plan et d'une droite, b) la transversale par un point de deux droites et c) les transversales communes de quatre droites. Le résultat concernant ce dernier cas résout aussi un problème de la géométrie plane (fig. 5) à savoir la

---

[2]) Klíma: „O problému projektivnosti při orientované poloze dvou obrazů". Věstník Král. české společnosti nauk, roč. 1929.

construction de la couple de points x_1, x_2 (y_1, y_2) tels que les droites joignant ces points avec les points correspondants de quatre couples des points a_1a_2, b_1b_2, c_1c_2, d_1d_2 sont perpendiculaires.

Un complexe linéaire Γ est représenté par une corrélation (Γ) qui contient l'involution Π_X. Les coniques de coïncidences de la corrélation (Γ) sont un cercle C^2 et une conique. Les foyers de cette conique se trouvent aux images x_1, x_2 de la droite conjuguée à l'axe X_∞ par rapport au complexe Γ et le grand axe de la conique en question coïncide avec un diamètre du cercle C^2. Dans son traité[1]) M. Eckhardt en appliquant la congruence de révolution est arrivé aussi à la représentation d'un complexe linéaire par l'élément point-cercle x_1 — C^2. Il considère seulement les droites du complexe Γ qui sont en même temps des droites de la congruence $T_{1,2}$ tandis qu'ici on considère les images de toutes les droites du complexe. Dans la fig. 7 on a construit les images ${}^1q_1$, ${}^1q_2$ de la droite conjuguée à la droite Q, dont les images sont q_1, q_2, par rapport au complexe Γ. Ensuite on donne la construction du plan polaire d'un point donné et du problème réciproque. La fig. 8 montre la construction des images o_1, o_2 de l'axe O du complexe Γ (C^2, x_1); on y applique la projection centrale à la distance d, qui est égale au paramètre des complexes Σ_1, Σ_2; s^0 est le point principal de la projection. Dans les articles 8, 9, 10 on considère les images des complexes linéaires ayant des positions particulières c'est à dire qui sont en involution avec Σ_1 et Σ_2 ou bien qui contiennent l'axe X_∞ et se trouvent ou non dans le faisceau ($\Sigma_1\Sigma_2$). Ensuite on considère le faisceau de complexes linéaires determiné par deux complexes Γ, Γ' et on trouve la condition pour les images de deux complexes linéaires qui sont en involution. On arrive à une condition différente de celle que M. Eckhardt a établie mais on déduit aussi celle-ci sans aucune espèce de difficultés. Dans le cas où les deux complexes Γ, Γ' contiennent la droite X_∞ la condition de l'involution se trouve établie dans l'article 14. Dans les n^{os} 15 et 16 on explique comment on trouve des images quand le complexe linéaire est à gauche ou à droite. Dans les derniers articles enfin, on considère les images d'un réseau et de systèmes de complexes linéaires déterminés par trois, quatre ou cinq complexes ainsi que les images des complexes linéaires qui sont en involution avec eux.