Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky

Karel Petr

Dvě poznámky ku specielnímu případu problému tří těles

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 47 (1918), No. 4-5, 268--273

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/109398`

Vzhledem k okolnosti, že příslušné přímky spojující body stupnice P s bodem $\xi = 1$, $\eta = 0$ ($f_2 = 0$) tvoří tu svazek paprskový, který mohl býti předem narýsován, odpadá tu, při pracování s tabulkou, užívání pomocné přímky, a příslušné veličiny se určují jako na nomogrammu obyčejném, Cartesiovém.

Dvě poznámky ku specielnímu případu problému tří těles.

I.

Od K. Petra.

Specielním případem problému tří těles, o nějž jde, zabýval se *V. V. Heinrich* ve článku „Příspěvek k theorii Darwinových oscillujících satellitů", Časopis pro pěstování mathem. a fysiky, 42, 1913, str. 175. a násl. Tu se pokusil rozšířiti některé známé již výsledky platné za předpokladu $e = 0$ (e jest excentrita elliptických drah prvých dvou základních těles) i pro případ $e > 0$. Pisateli těchto řádků zaslány resp. vysloveny byly z různých stran námitky proti výkladům a postupu V. V. Heinricha v cit. pojednání, jakož i v jeho pojednání v poslední době vydaném a téže věci se týkajícím. O námitkách těchto bude — jak doufám — pojednáno v příštím ročníku Časopisu. Zabývaje se však tímto předmětem, dospěl jsem ku přesvědčení, že rovnice, na kterých V. V. Heinrich vyšetřování svá založil, jsou málo vhodné k vytčenému účelu, a snažil jsem se odvoditi jiné východisko, které by dovolovalo pohodlněji a přehledněji řešiti zmíněný problém. Pan *V. Nechvíle*, kterému jsem rovnice příslušné ústně vyložil, zavedením nové neodvisle proměnné (místo času) přivedl je na tvar zvláště jednoduchý, který může býti velmi užitečný; bez potíží lze z nich činiti zejména důsledky pro pohyb třetího tělesa v okolí libračního centra. Důsledky ty jsou v různých směrech zajímavé, výklad jich bude podán při zevrubném rozboru rovnic Nechvílových.

Buďtež dány tři tělesa 1, 2, 3; prvé dvě o hmotách m_1, m_2; za hmotu třetího dosaďme do rovnic pro problém tří těles $m_3 = 0$. Počátek souřadnic položíme do těžiště systému (t. j.

těžiště těles 1 a 2) a předpokládati budeme, že pohyb všech těles děje se stále v rovině XY. Konečně budeme předpokládati, že souřadnicový systém se otáčí kolem osy Z úhlovou rychlostí ν, kteráž jest funkcí času, mající spojitou derivaci. Pak jsou rovnice problému tří těles, jsou-li x_i, y_i souřadnice tělesa i a r_{ik} vzdálenost tělesa i-tého od k-tého,

$$(x'_1 - \nu y_1)' - \nu(y'_1 + \nu x_1) = \frac{m_2(x_2 - x_1)}{r_{12}^3},$$

$$(y'_1 + \nu x_1)' + \nu(x'_1 - \nu y_1) = \frac{m_2(y_2 - y_1)}{r_{12}^3},$$

$$(x'_2 - \nu y_2)' - \nu(y'_2 + \nu x_2) = \frac{m_1(x_1 - x_2)}{r_{12}^3},$$

$$(y'_2 + \nu x_2)' + \nu(x'_2 - \nu y_2) = \frac{m_1(y_1 - y_2)}{r_{12}^3},$$

$$(x'_3 - \nu y_3)' - \nu(y'_3 + \nu x_3) = \frac{m_1(x_1 - x_3)}{r_{13}^3} + \frac{m_2(x_2 - x_3)}{r_{23}^3},$$

$$(y'_3 + \nu x_3)' + \nu(x'_3 - \nu y_3) = \frac{m_1(y_1 - y_3)}{r_{13}^3} + \frac{m_2(y_2 - y_3)}{r_{23}^3}.$$

Úhlovou rychlost ν volíme stále tak, aby $y_1 = y_2 = 0$. Mimo to položíme k vůli zjednodušení předpokládajíce $x_2 > 0$

$$x_1 = -\frac{rm_2}{m_1 + m_2}, \quad x_2 = \frac{rm_1}{m_1 + m_2}; \quad r_{12} = r.$$

Substitucí touto redukuje se druhá (a čtvrtá rovnice) na rovnici

$$\nu' r + 2\nu r' = 0,$$

ze které

$$\nu = \frac{A}{r^2},$$

kde A jest integrační konstanta; rovnice třetí (a prvá) pak dává

$$r'' - \nu^2 r = -\frac{m_1 + m_2}{r^2} \quad \text{aneb} \quad r'' = \frac{A^2}{r^3} - \frac{m_1 + m_2}{r^2},$$

což jsou vesměs z prvých počátků mechaniky známé vztahy. V rovnicích 5. a 6. konečně klademe

$$x_3 = rx \quad y_3 = ry.$$

Tak dostaneme po snadném počtu tyto jednoduché rovnice pro pohyb třetího tělesa

$$rx'' + 2r'x' - \frac{2A}{r}y'$$

$$- \frac{m_1 + m_2}{r^2}x = -\frac{1}{r^2}\left\{\frac{m_1(x - a_1)}{r_1^3} + \frac{m_2(x - a_2)}{r_2^3}\right\},$$

$$ry'' + 2r'y' + \frac{2A}{r}x'$$

$$- \frac{m_1 + m_2}{r^2}y = -\frac{1}{r^2}\left\{\frac{m_1 y}{r_1^3} + \frac{m_2 y}{r_2^3}\right\}.$$

Při tom jest

$$a_1 = \frac{-m_2}{m_1 + m_2}, \quad a_2 = \frac{m_1}{m_1 + m_2}$$

a r_1, r_2 vzdálenosti bodu (x, y) od bodů $(a_1, 0)$, $(a_2, 0)$.

Rovnicím získaným lze dáti tento tvar:

$$\begin{aligned} rx'' + 2r'x' - \frac{2A}{r}y' &= \frac{1}{r^2}\frac{\partial \Omega}{\partial x}, \\ ry'' + 2r'y' + \frac{2A}{r}x' &= \frac{1}{r^2}\frac{\partial \Omega}{\partial y}. \end{aligned} \qquad \text{(I)}$$

kde

$$\Omega = m_1\left(\frac{1}{2}r_1^2 + \frac{1}{r_1}\right) + m_2\left(\frac{1}{2}r_2^2 + \frac{1}{r_2}\right).$$

Rovnice takto odvozené mají tu velikou výhodu, že Ω v nich se nacházející závisí toliko na neznámých funkcích x, y a nikoliv již na čase. Při tom jest r známá funkce času; jest totiž (viz Seydler, Mechanika, I., str. 99.):

$$r = a(1 - e\cos E), \quad E - e\sin E = \mu t + M_0. \text{*)}$$

Užiji rovnic (I) toliko ku odvození partikulárných integrálů Lagrangeových; ty dostaneme, tážeme-li se, mají-li rovnice (I) integrály tvaru

$$x = \alpha, \quad \eta = \beta; \quad \alpha, \beta \text{ konstanty.}$$

---

*) Mezi konstanlami A, μ, e, a jsou tyto vztahy:

$$a^4\mu^2(1 - e^2) = A^2, \quad a^3\mu^2 = m_1 + m_2.$$

Volíme-li jednotku hmoty tak, že $m_1 + m_2 = 1$, jest $a^3\mu^2 = 1$, $A^2 = a(1 - e^2)$; místo A užito jest za tohoto předpokladu v následující poznámce p. Nechvíle značky c.

Dosazením do rovnic (I) vidíme, že jest v tomto případě nutně

$$\frac{\partial \Omega(\alpha, \beta)}{\partial \alpha} = 0, \quad \frac{\partial \Omega(\alpha, \beta)}{\partial \beta} = 0.$$

Řešením těchto dvou rovnic o dvou neznámých dostaneme 5 bodů, t. zv. pět libračních center Lagrangeových. Postup, který lze tady použíti, jest úplně totožný se známým postupem při $e = 0$ a netřeba jej podrobněji vykládati.

II.

Od **V. Nechvíle.**

Rovnice differenciální, k nimž dospěl prof. Petr, obsahují vedle periodických koefficientů derivace potenciálu Ω, jenž je formálně zcela týž, jako pro specielní případ, kdy obě tělesa rotují stejnoměrně v kruhu.

Dosáhl toho pokroku substitucí $x_3 = rx$, $y_3 = yr$, jíž mění se pohybující se systém souřadný v systém jiný, rovněž se pohybující, ale takový, že obě hmoty od nully různé zaujímají na nové ose $x$ové pevné posice. Substituce ta je v podstatě periodickou dilatací.

Laskavost prof. Petra, jenž sdělil mi tento výsledek, umožnila mi jeho rovnice ještě zjednodušiti zavedením nové neodvisle proměnné místo času t substitucí Sundmanovou (F. K. Sundman: Mémoire sur le problème des trois corps, Acta Math. sv. 36 str. 105 a n.)

$$dt = r du.$$

Pak lze psáti derivace kterékoliv proměnné

$$\frac{dx}{du} = \frac{dx}{dt} r \qquad \frac{d^2x}{du^2} = r^2 \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{1}{r} \frac{dx}{du} \frac{dr}{du}$$

$$\frac{dy}{du} = \frac{dy}{dt} r \qquad \frac{d^2y}{du^2} = r^2 \frac{d^2y}{dt^2} + \frac{1}{r} \frac{dy}{du} \frac{dr}{du}$$

$$\frac{dr}{du} = \frac{dr}{dt} r.$$

Označíme-li derivace dle času tečkami, dle nové neodv. proměnné u čárkami, bude po dosazení za $\ddot{x}$, $\ddot{y}$ z rovnic (I)

$$x'' - \frac{x'r'}{r} = \ddot{x}r^2 = -2\dot{x}\dot{r}r + 2c\dot{y} + \frac{1}{r}\frac{\partial\Omega}{\partial x},$$

$$y'' - \frac{y'r'}{r} = \ddot{y}r^2 = -2\dot{y}\dot{r}r - 2c\dot{x} + \frac{1}{r}\frac{\partial\Omega}{\partial y},$$

a dostaneme tedy $x''r + x'r' - 2cy' = \dfrac{\partial\Omega}{\partial x}$,

$$y''r + y'r' + 2cx' = \frac{\partial\Omega}{\partial y}.$$

Nová neodvisle proměnná je, jak lze dokázati, excentrickou anomalií, příslušnou elliptickému Keplerovu pohybu dvou našich těles, totiž: $u = E$.

Vzhledem k tomu, že koefficient u $x'r'$ klesl o jednotku, pokusil jsem se dále člen ten odstraniti úplně zavedením jiné neodvisle proměnné v místo času t substitucí obecnější

$$dt = r^\alpha dv,$$

kde α je neurčená konstanta. Pak platí rovnice, označíme-li derivace dle v opět čárkami,

$$x' = r^\alpha\dot{x}, \quad x'' - \alpha\frac{x'r'}{r} = r^{2\alpha}\ddot{x}.$$

$$y' = r^\alpha\dot{y}, \quad y'' - \alpha\frac{y'r'}{r} = r^{2\alpha}\ddot{y},$$

$$r' = r^\alpha\dot{r}.$$

Dosazením za $\ddot{x}$, $\ddot{y}$ a $\dot{r}$, $\dot{y}$ dostaneme rovnici

$$x'' - \alpha\frac{x'r'}{r} = r^{2\alpha-1}\left[\frac{1}{r^2}\frac{\partial\Omega}{\partial x} - 2\frac{x'r'}{r^{2\alpha}} + \frac{2cy'}{r^{\alpha+1}}\right],$$

$$x'' + (2-\alpha)\frac{x'r'}{r} - 2cr^{\alpha-2}y' = r^{2\alpha-3}\frac{\partial\Omega}{\partial x}$$

a analogickou rovnici pro y''. Koefficient u $\dfrac{x'r'}{r}$ vymizí pro $\alpha = 2$, čímž dostáváme jako výsledek:

$$x'' - 2cy' = r\frac{\partial\Omega}{\partial x},$$

$$y'' + 2cx' = r\frac{\partial\Omega}{\partial y}.$$

Rovnice jsou až na jediný periodický faktor r tytéž jako pro specielní případ, kdy obě tělesa rotují v kruhu. Volíme-li

$$dt = \frac{r^2}{c}\, dv,$$

dostaneme rovnice, vzhledem k tomu, že $c^2 = a\,(s^1 - e^2) = p$, kde p je parametr ellipsy

$$x'' - 2y' = \frac{r}{p}\frac{\partial \Omega}{\partial x},$$

$$y'' + 2x' = \frac{r}{p}\frac{\partial \Omega}{\partial y},$$

při čemž v je pravou anomalií a je mezi r, v a p vztah

$$\frac{r}{p} = \frac{1}{1 + e\cos v},$$

takže rovnice mají definitivní tvar

$$\frac{d^2x}{dv^2} - 2\frac{dy}{dv} = \frac{1}{1 + e\cos v}\frac{\partial \Omega}{\partial x},$$

$$\frac{d^2y}{dv^2} + 2\frac{dx}{dv} = \frac{1}{1 + e\cos v}\frac{\partial \Omega}{\partial y}.$$

Došli jsme k úplné analogii. Při pohybu v kruhu je neodvisle proměnnou čas, jenž je úhlem rovnoměrné rotace systému, jako pravá anomalie úhlem nerovnoměrné rotace v pohybu elliptickém.

Několik podrobností k pohybu elliptickému.

Píše Dr. **Jos. Kounovský.**

Dán-li pohyb neproměnného útvaru rovinného přímými trajektoriemi dvou bodů útvaru, vytvořuje každý bod roviny při tomto pohybu ellipsu. Pozorujme *mechanické vytvoření ellipsy, určené svými sdruženými průměry, jsou-li oběma základními trajektoriemi elliptického pohybu právě polohy průměrů daných.*

1. Budiž dána ellipsa dvěma sdruženými poloprůměry O_1P_1 a O_1P_2 na přímkách m a n (Obr. 1.). Jest tedy především určiti trojúhelník MNP, jehož vrchol P opisuje danou ellipsu, pohybují-li se vrcholy M a N resp. po trajektoriích m a n.