Sur la fonction Eulérienne.

Extrait d'une lettre adressée à M. **Ed. Weyr** par M. **Hermite.**

La fonction holomorphe $\frac{1}{\Gamma(x)}$ introduite en Analyse par M. *Weierstrass* est à tous les égards d'une nature entièrement différente des transcendantes élémentaires comme l'exponentielle et les fonctions trigonométriques. En considérant son développement en série suivant les puissannes croissantes de la variable, on obtient pour les coefficients au lieu de nombres rationnels, des transcendantes numériques d'une grande complication. On observe aussi comme M. *Bourguet* l'a signalé dans sa belle thèse de doctorat, que leurs valeurs ne décroissent pas regulièrement, ils présentent des variations brusques et leurs signes se succèdent sans loi apparente. L'étude de la courbe $y = \frac{1}{\Gamma(x)}$, met en évidence, comme je vais le montrer, des circonstances qui révèlent le caractère singulier de cette fonction.

En premier lieu et pour des valeurs positives croissantes de l'abscisse, l'ordonnée decroît avec une extrême rapidité; la courbe ensuite coupe l'axe aux points $x = 0, -1, -2, -3$, etc. et nous allons faire le calcul des ordonnées dans le voisinage de ces points d'intersection.

J'emploie à cet effet la relation,

$$\Gamma(x)\,\Gamma(1-x) = \frac{\pi}{\sin \pi x},$$

où je pose $x = -n - \xi$, ξ étant positif et très petit.

On obtient ainsi,

$$\frac{1}{\Gamma(-n-\xi)} = (-1)^{n+1}\frac{1}{\pi}\sin \pi\xi\;\Gamma(n+1+\xi),$$

puis en changeant ξ en $-1-\xi$,

$$\frac{1}{\Gamma(-n-1+\xi)}=(-1)^{n+1}\frac{1}{\pi}\sin\pi\xi\ \Gamma(n+2-\xi).$$

Cela étant, j'observe qu'on a de $\xi=0$ à $\xi=\frac{\pi}{3}$, la condition $\cos\xi>\frac{1}{2}$, nous en concluons, $\sin\xi>\frac{\xi}{2}$, et par conséquent $\sin\pi\xi>\frac{\pi\xi}{2}$, d'où $\frac{\sin\pi\xi}{\pi}>\frac{\xi}{2}$.

Les ordonnées voisines de deux points consécutifs d'intersection, sont donc en valeur absolue plus grandes que

$$\frac{\xi}{2}\Gamma(n+1+\xi) \text{ et } \frac{\xi}{2}\Gamma(n+2-\xi),$$

et à plus forte raison que, $\frac{\xi}{2}\Gamma(n+1)$.

Soit maintenant $\xi=\frac{1}{n}$, cette limite inférieure devient $\frac{1}{2}\Gamma(n)$; on voit ainsi qu'à une distance infiniment décroissante du point où elle coupe l'axe des abscisses, la courbe s'élève à une hauteur qui dépasse toute quantité. En la construisant sur une feuille rectangulaire illimitée dans le sens de cet axe, on aurait du côté des abscisses négatives à partir d'un certain point l'image d'une série indéfinie de droites équidistantes perpendiculaires à l'axe. On peut donc regarder la fonction $\frac{1}{\Gamma(x)}$ comme discontinue à l'infini, tandisque $\sin x$ et $\cos x$, sont indéterminés.