Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky

Alois Strnad

Drobné zprávy

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 16 (1887), No. 2, 88--92

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/109301`

$$\frac{P}{p} = \frac{pK}{kP} \text{ čili } \frac{P^2}{p^2} = \frac{K}{k}$$

aneb
$$\frac{P^2}{p^2} = \frac{\pi a^2}{\pi b^2} = \frac{a^2}{b^2},$$

a odmocníme-li, konečně

$$P : p = a : b,$$

t. j. plošné obsahy křivočarných těch obrazců jsou v přímém poměru s osami ellipsy.

II. Zajímavo jest, vyjádříme-li plošný obsah ellipsy plošnými obsahy uvedených obrazců křivočarných.

Z obrazce patrno

$$k = E - 2p, \quad K = E + 2P,$$

a znásobením obou rovnic těchto

$$kK = E^2 - 2pE + 2PE - 4pP.$$

Ale poněvadž $kK = E^2$, nabudeme rovnice

$$-pE + PE - 2pP = 0,$$

čili
$$E(P - p) = 2pP,$$

tedy
$$E = \frac{2pP}{P - p},$$

t. j. plošný obsah ellipsy rovná se dvojnásobnému součinu ploch křivočarných dělenému jich rozdílem.*)

Drobné zprávy.

Napsal

A. Strnad,

professor v Hradci Králové.

Řada Fibonacciova (též *řadou Laméovou* zvaná), jest řada 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, . . ., jejíž zákon dán jest rovnicí rekurentní $u_n = u_{n-1} + u_{n-2}$. Fibonacci uvádí ji ve spise svém „Liber Abbaci“ vydaném r. 1202. ve formě úlohy o rozmnožování se králíků. Obšírně jednal o řadě této *E. Lucas* v Boncompagniově bulletinu r. 1877, upozorniv, že ji lze obdržeti z trojúhelníka Pascalova tímto seřaděním:

*) Větu I. obdržíme též takto. Poněvadž

$$2P = \pi a^2 - \pi ab = \pi a (a - b)$$
$$2p = \pi ab - \pi b^2 = \pi b (a - b),$$

bude
$$P : p = a : b.$$

Pozn. red.

$$
\begin{array}{ccccccccc}
1 \\
. & 1 & 1 \\
. & . & 1 & 2 & 1 \\
. & . & . & 1 & 3 & 3 & 1 \\
. & . & . & . & 1 & 4 & 6 & 4 & 1 \\
. & . & . & . & . & 1 & 5 & 10 & 10\ldots \\
. & . & . & . & . & . & 1 & 6 & 15\ldots \\
. & . & . & . & . & . & . & 1 & 7\ldots \\
\hline
1, & 1, & 2, & 3, & 5, & 8, & 13, & 21, & \ldots\ldots
\end{array}
$$

(Hoffmann, Zeitschrift für math. u. naturw. Unterricht, XVII. Jahrg. 1886. p. 250.).

Některé vlastnosti této řady uvedli jsme v lonském ročníku Časopisu na str. 82.; tuto podáváme některé další výsledky, jichž původcem jest mladý ale velice pilný mathematik francouzský *d'Ocagne*. Členy řady Fibonacciovy vyhovují rovnicím

$$u_n u_{n-1} = u_n^2 - u_{n-1}^2 + (-1)^n$$

$$u_m u_n - u_{m+1} u_{n-1} = (-1)^{n+1} u_{m-n+1}.$$

Je-li x_1 kladný, x_2 záporný kořen rovnice $x^2 - x - 1 = 0$, jest $u_n = (x_1^n - x_2^n) : (x_1 - x_2)$.

Součet prvých n členů řady roven jest $u_{n+2} - 1$.

Užitím této řady lze mezi dvě daná čísla $a < b$ vložiti určitý počet členů tak, aby v řadě vzniklé každý člen rovnal se součtu dvou členů předcházejících. Značíme-li tato vřaděná čísla $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots . \alpha_p$, jest

$$\alpha_i = \frac{(-1)^i a u_{p-i+1} + b u_i}{u_{p+1}}.$$

Z tohoto vzorce zřejmo, že některé vřaděné členy (s lichým ukazatelem) mohou býti záporné; největší možný počet (*plénitude*) těchto záporných členů jest r při $p = 4r$, $4r \pm 1$, $4r - 2$.

Součet takto interpolované řady $a + \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_p + b$ jest

$$S_p = \frac{(a+b)\, u_{p+2} - (a-b)\, u_{p+1} + (-1)^p a + b}{u_{p+1}}.$$

Roste-li p do nekonečna, skládá se proložená řada ze dvou částí, z nichž prvá obsahuje členy toliko na a závislé se střídavými znaménky, druhá členy kladné závislé toliko na b, totiž:

$$a, -\frac{a}{x_1}, \frac{a}{x_1^2}, -\frac{a}{x_1^3}, \ldots, \frac{b}{x_1^3}, \frac{b}{x_1^2}, \frac{b}{x_1}, b.$$

Součet této řady jest $S = a(x_1 - 1) + b(x_1 + 1)$.

(Bulletin de la société math. de France. Tome XIV. 1886. p. 20).

Determinant Smithův a Mansionův. V pojednání mathematické společnosti londýnské ustanovil r. 1876 *Smith* hodnotu determinantu

$$D = \begin{vmatrix} F(1,1) & F(1,2) & F(1,3) & \ldots & F(1,n) \\ F(2,1) & F(2,2) & F(2,3) & \ldots & F(2,n) \\ F(3,1) & F(3,2) & F(3,3) & \ldots & F(3,n) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ F(n,1) & F(n,2) & F(n,3) & \ldots & F(n,n) \end{vmatrix}$$

ve kterém značí $F(i, j)$ největšího společného dělitele čísel i a j. *Mansion* pojal úlohu obecněji, označiv symbolem $F(i, j)$ libovolnou funkci nejv. spol. dělitele čísel i a j.

Odvoďme z dané funkce F funkci f dle zákona

$$f(x) = \mu\left(\frac{x}{1}\right) F(1) + \mu\left(\frac{x}{2}\right) F(2) + \mu\left(\frac{x}{3}\right) F(3) + \ldots,$$

předpokládajíce, že $\mu(x)$ obecně rovno jest nulle, avšak vždy rovno $(-1)^{k+1}$, kdykoli x jest součinem k různých kmenných činitelů, 1 a číslo dané v to čítaje. Obě tyto funkce jsou mimo to vázány rovnicí

$$F(x) = f(a) + f(b) + f(c) + \ldots,$$

kde $a, b, c \ldots$ jsou dělitelé čísla x. Hodnota determinantu D jest pak

$$D = f(1)\, f(2)\, f(3) \ldots f(n).$$

Budiž ku př. $F(x) = x^2 + 3$; potom jest

$$f(x) = 4\mu\left(\frac{x}{1}\right) + 7\mu\left(\frac{x}{2}\right) + 12\mu\left(\frac{x}{3}\right) + \ldots$$

$$f(1) = 4, \quad f(2) = 3, \quad f(3) = 8$$

$$D = \begin{vmatrix} F(1,1) & F(1,2) & F(1,3) \\ F(2,1) & F(2,2) & F(2,3) \\ F(3,1) & F(3,2) & F(3,3) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4, & 4, & 4 \\ 4, & 7, & 4 \\ 4, & 4, & 12 \end{vmatrix} = 96.$$

Velezajímavým tímto tvarem arithmetickým, jehož literaturu viz v Mathesis, V. p. 249., zabývali se ještě *Catalan*, *Le Paige* a nejnověji v různých sbornících *Cesáro*, který vyšetřoval též determinant obecnější

$$\Delta = \begin{vmatrix} 0 & G(1) & G(2) & \dots & G(n) \\ G(1) & F(1,1) & F(1,2) & \dots & F(1,n) \\ G(2) & F(2,1) & F(2,2) & \dots & F(2,n) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ G(n) & F(n,1) & F(n,2) & \dots & F(n,n) \end{vmatrix}$$

a ukázal, že jest

$$\Delta = -f(1)\,f(2)\,f(3)\dots f(n) \sum_{\nu=1}^{\nu=n} \frac{g^2(\nu)}{f(\nu)};$$

při tom jest G funkce libovolná a g funkce z G týmž způsobem odvozená jako f z F.

Je-li $F(x) \equiv G(x)$, jest $\Delta = -\prod_{\nu=1}^{\nu=n} f(\nu) \sum_{\nu=1}^{\nu=n} f(\nu)$.

(Nouvelles annales. 1886. p. 44.)

Trojúhelník. *Schröter* podal v časopise Battagliniově jednoduché důkazy některých vět o trojúhelnících kuželosečkám opsaných neb vepsaných. Zvláště zajímavými jsou tyto dvě věty:

Do trojúhelníka abc vepsána jest kuželosečka K dotýkající se stran jeho v bodech a', b', c'; jsou-li a_1, b_1, c_1 středy stran trojúhelníka abc, mimo to a_2, b_2, c_2 středy příček aa', bb', cc', protínají se přímky a_1a_2, b_1b_2, c_1c_2 v středu kuželosečky K.

Poláry bodů a_1, b_1, c_1 vzhledem ku K omezují trojúhelník rovný obsahem trojúhelníku abc.

(Giornale di matematiche. 1884, p. 262). —

Rozdělme trojúhelník abc v n jakýchkoli dílů příčkami jdoucími vrcholem c, a označme d_1, d_2, ..., d_n průměry kružnic vepsaných v tyto díly; dále buď d průměr kružnice vepsané v trojúhelník abc, v pak výška příslušná k straně ab. Závislost veličin těchto vyjadřuje pozoruhodná a k různému užití spůsobilá rovnice

$$\left(1-\frac{d_1}{v}\right)\left(1-\frac{d_2}{v}\right)\dots\left(1-\frac{d_n}{v}\right) = 1-\frac{d}{v}.$$

Nechať jest δ průměr kružnice, dotýkající se strany ab a prodloužených stran ac, bc; průměry kružnic sestrojených obdobně při oněch n dílech trojúhelníka abc buďte δ_1, δ_2, ..., δ_n.

Jest pak

$$\left(1+\frac{\delta_1}{v}\right)\left(1+\frac{\delta_2}{v}\right)\dots\left(1+\frac{\delta_n}{v}\right)=1+\frac{\delta}{v}.$$

Oba tyto vzorce, z kterých plyne též rovnice

$$\frac{d_1}{\delta_1}\cdot\frac{d_2}{\delta_2}\dots\frac{d_n}{\delta_n}=\frac{d}{\delta},$$

odvodil *Niemöller* z theorie potencialu.

(Schlömilch, Zeitschrift für Math. u. Phys. 1885, p. 251).

V trojúhelníku abc sestrojme výšky ad, be, cf a promítněme jich paty do stran trojúhelníka, tak že jest

$$dm \perp ab,\ dm' \perp ac,\ en \perp bc,\ en' \perp ab,\ fp \perp ac,\ fp' \perp bc.$$

Potom jsou vespolek stejnými úhly: mpa, pnc, nmb, $m'n'a$, $n'p'b$, $p'm'c$; označíme-li velikosť jich písmenou φ a jsou-li α, β, γ úhly daného trojúhelníka abc, jest

$$\operatorname{tg}\varphi = -\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta\operatorname{tg}\gamma.$$

Trojúhelníky mnp, $m'n'p'$ jsou spolu shodny a trojúhelníku abc podobny; poměr podobnosti jest

$$\lambda = \sqrt[4]{\cos^2\alpha\cos^2\beta\cos^2\gamma + \sin^2\alpha\sin^2\beta\sin^2\gamma.}$$

Body m, n, p, m', n', p' jsou v určité kružnici, kterou geometrové angličtí *kružnicí Taylorovou* nazývají.

(Mathesis, tome VI. 1886, p. 20).

Úlohy.

Úloha 13.

Má se řešiti rovnice

$$(x^2+1)^2+(x+1)^2=a(x^2+1)(x+1).$$

R.

Úloha 14.

Vyšetřiti, kdy trojúhelník určený patami výšek daného trojúhelníka jest tomuto podoben. Prof. *A. Strnad.*