Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky

Václav Hübner

Drobnosti mathematické

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 43 (1914), No. 3-4, 474--482

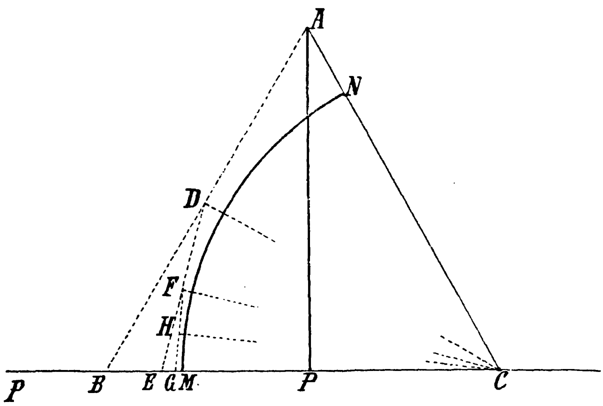
Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/109256

Drobnosti mathematické.

Podává škol. rada **Václav Hübner**, Král. Vinohrady.

(Dokončení.)

IX. Jan Bernoulli podává následující konstrukci, kterak nalézti kruhový oblouk, jehož délka rovná se dané úsečce.



Obr. 4.

Budiž daná úsečka $\overline{AP}$ kolmo na přímce p. Libovolný bod C na přímce p spojme s bodem A a učiňme $\overline{CB} = \overline{CA}$; sestrojme $\overline{CD} \perp \overline{AB}$ a učiňme $\overline{CE} = \overline{CD}$; pokračujíce dále, sestrojme

$$\overline{CF} \perp \overline{DE}, \quad \overline{CG} = \overline{CF}, \quad \overline{CH} \perp \overline{FG}$$

atd.

Mez kolmic z C vedených budiž $\overline{CM}$; i jest $\overline{CM}$ poloměr hledaného kruhového oblouku $\widehat{MN}$, opsaného z bodu C v úhlu ACB. (Důkaz v násl. odstavci X.) Body D, F, H, ... jsou na křivce zvané kvadratrix.

X. Dosazujeme-li do rovnic

$$2 \sin \beta \sin \alpha = \cos (\alpha - \beta) - \cos (\alpha + \beta)$$

za úhel α postupně α, $\alpha + \beta$, $\alpha + 2\beta$, ... $\alpha + n\beta$, vyvodíme tyto rovnice:

$$\begin{aligned}
2 \sin\beta \sin\alpha &= \cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)\\
2 \sin\beta \sin(\alpha+\beta) &= \cos\alpha - \cos(\alpha+2\beta)\\
2 \sin\beta \sin(\alpha+2\beta) &= \cos(\alpha+\beta) - \cos(\alpha+3\beta)\\
2 \sin\beta \sin(\alpha+3\beta) &= \cos(\alpha+2\beta) - \cos(\alpha+4\beta)\\
\vdots \qquad \vdots \qquad & \qquad \vdots \qquad \qquad \vdots\\
2 \sin\beta \sin(\alpha+(n-1)\beta) &= \cos[\alpha+(n-2)\beta]\\
&\quad - \cos(\alpha+n\beta)\\
2 \sin\beta \sin(\alpha+n\beta) &= \cos[\alpha+(n-1)\beta]\\
&\quad - \cos[\alpha+n+1)\beta].
\end{aligned}$$

Sečteme-li všechny tyto rovnice a označíme-li součet

$\sin\alpha + \sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha+2\beta) + \ldots \sin(\alpha+n\beta) = S,$

obdržíme:

$$(2\sin\beta).S = \underbrace{\cos(\alpha-\beta) + \cos\alpha}_{2\cos\left(\alpha-\frac{\beta}{2}\right)\cos\frac{\beta}{2}} - \underbrace{[\cos(\alpha+n\beta) + \cos(\alpha+(n+1)\beta)]}_{-2\cos[\alpha+(n+\frac{1}{2})\beta]\cos\frac{\beta}{2}}$$

a

$$S = \frac{\cos\left(\alpha-\frac{\beta}{2}\right) - \cos\left(\alpha+\left(n+\frac{1}{2}\right)\beta\right)}{2\sin\frac{\beta}{2}}$$

$$= \frac{\sin\left(\alpha+\frac{n\beta}{2}\right)\sin\frac{n+1}{2}\beta}{\sin\frac{\beta}{2}}.$$

Z rovnice

$$2\sin\beta\cos\alpha = \sin(\alpha+\beta) - \sin(\alpha-\beta)$$

obdržíme obdobnou cestou:

$$\begin{aligned}
2\sin\beta\cos(\alpha+\beta) &= \sin(\alpha+2\beta) - \sin\alpha\\
2\sin\beta\cos(\alpha+2\beta) &= \sin(\alpha+3\beta) - \sin(\alpha+\beta)\\
\vdots \qquad \vdots \qquad & \qquad \vdots \qquad \qquad \vdots\\
2\sin\beta\cos(\alpha+n\beta) &= \sin[\alpha+(n+1)\beta]\\
&\quad - \sin[\alpha+(n-1)\beta].
\end{aligned}$$

Sečtením všech těchto rovnic dostaneme:

$$(2\, sin\, \beta)\, S'$$

$$= \underbrace{sin\,(\alpha + n\beta) + sin\,(\alpha + (n+1)\,\beta)}_{2\, sin\left(\alpha + \left(n + \frac{1}{2}\right)\beta\right) cos \frac{\beta}{2}} - \underbrace{(sin\, \alpha + sin\,(\alpha - \beta))}_{-2\, sin\left(\alpha - \frac{\beta}{2}\right) cos \frac{\beta}{2}}$$

značí-li

$$S' = cos\, \alpha + cos\,(\alpha + \beta) + cos\,(\alpha + 2\beta) + \ldots + cos\,(\alpha + n\beta)$$

a

$$S' = \frac{sin\left(\alpha + \left(n + \frac{1}{2}\right)\beta\right) - sin\left(\alpha - \frac{\beta}{2}\right)}{2\, sin\, \frac{\beta}{2}}$$

$$= \frac{cos\left(\alpha + \frac{n\beta}{2}\right) sin\, \frac{n+1}{2}\, \beta}{sin\, \frac{\beta}{2}}.$$

Dosadíme-li do výsledních rovnic $\beta = \alpha$ a za n pak $n - 1$, obdržíme

$$S = sin\, \alpha + sin\, 2\alpha + sin\, 3\alpha + \ldots + sin\, n\alpha$$

$$= \frac{cos\, \frac{\alpha}{2} - cos\left(n + \frac{1}{2}\right)\alpha}{2\, sin\, \frac{\alpha}{2}}$$

$$= \frac{cos\, \frac{\alpha}{2} - cos\, n\alpha\, cos\, \frac{\alpha}{2} + sin\, n\alpha\, sin\, \frac{\alpha}{2}}{2\, sin\, \frac{\alpha}{2}}$$

a

$$2S - sin\, n\alpha = (1 - cos\, n\alpha)\, cotg\, \frac{\alpha}{2};$$

též jest

$$S = \frac{sin\, \frac{n+1}{2}\, \alpha\, sin\, \frac{n\alpha}{2}}{sin\, \frac{\alpha}{2}}.$$

Obdobně jest

$$S' = \cos\alpha + \cos 2\alpha + \ldots + \cos n\alpha$$

$$= \frac{\sin\left(n + \frac{1}{2}\right)\alpha - \sin\frac{\alpha}{2}}{2\sin\frac{\alpha}{2}}$$

$$= \frac{\sin n\alpha \cos\frac{\alpha}{2} + \sin\frac{\alpha}{2}\cos n\alpha - \sin\frac{\alpha}{2}}{2\sin\frac{\alpha}{2}},$$

nebo

$$2S' - \cos n\alpha = \sin n\alpha \operatorname{cotg}\frac{\alpha}{2} - 1;$$

též jest

$$S' = \frac{\cos\frac{n+1}{2}\alpha \sin\frac{n\alpha}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}}$$

a

$$\frac{\sin\alpha + \sin 2\alpha + \sin 3\alpha + \ldots + \sin n\alpha}{\cos\alpha + \cos 2\alpha + \ldots + \cos n\alpha} = \frac{S}{S'} = tg\,\frac{n+1}{2}\,\alpha.$$

Je-li $n\alpha = 90^0$, jest

$$\sin\alpha + \sin 2\alpha + \ldots + \sin 90^0 = \frac{1}{2}\left(1 + \operatorname{cotg}\frac{\alpha}{2}\right)$$

a

$$\cos\alpha + \cos 2\alpha + \ldots + \cos 90^0 = \frac{1}{2}\left(\operatorname{cotg}\frac{\alpha}{2} - 1\right);$$

t. j.

$$(\sin\alpha + \sin 2\alpha + \ldots + \sin 90^0) - (\cos\alpha + \cos 2\alpha + \ldots + \cos 90^0) = 1.$$

Dodatek k odst. IX.

Budiž

$$\overline{AC} = r; \ \sphericalangle ACB = \varphi,$$

pak jest

$$\overline{CD} = r\cos\frac{\varphi}{2};$$

$$\overline{CF} = \overline{CD}\cos\frac{\varphi}{4} = r\cos\frac{\varphi}{2}\cos\frac{\varphi}{4} = \frac{r}{2}\left(\cos\frac{\varphi}{4} + \cos\tfrac{3}{4}\varphi\right);$$

$$\overline{CH} = r\cos\frac{\varphi}{2}\cos\frac{\varphi}{4}\cos\frac{\varphi}{8} = \frac{r}{4}(\cos\tfrac{1}{8}\varphi + \cos\tfrac{3}{8}\varphi$$
$$+ \cos\tfrac{5}{8}\varphi + \cos\tfrac{7}{8}\varphi)$$

a

$$\overline{CM} = r\cos\frac{\varphi}{2}\cos\frac{\varphi}{4}\cos\frac{\varphi}{8}\ldots\cos\frac{\varphi}{m}$$
$$= \frac{2r}{m}\left(\cos\frac{1}{m}\varphi + \cos\frac{3}{m}\varphi + \ldots + \cos\frac{m-3}{m}\varphi + \cos\frac{m-1}{m}\varphi\right).$$

Součet řady

$$\cos\frac{1}{m}\varphi + \cos\frac{3}{m}\varphi + \ldots + \cos\frac{m-1}{m}\varphi$$

obdržíme přímo ze vzorce pro S', kde

$$\alpha = \frac{1}{m}\varphi,\ \beta = \frac{2}{m}\varphi \text{ a } n = \frac{m}{2} - 1.$$

Jest

$$S' = \frac{\cos\left(\frac{\varphi}{m} + \left(\frac{m}{2} - 1\right)\frac{\varphi}{m}\right)\sin\left(\frac{m}{4}\,\frac{2}{m}\varphi\right)}{\cos\frac{\varphi}{m}} = \frac{\cos\frac{\varphi}{2}\sin\frac{\varphi}{2}}{\sin\frac{\varphi}{m}}$$

a

$$\overline{CM} = \frac{2r}{m}\cdot\frac{\cos\frac{\varphi}{2}\sin\frac{\varphi}{2}}{\sin\frac{\varphi}{m}} = \frac{r\sin\varphi}{m\sin\frac{\varphi}{m}}.$$

Jest-li

$$\lim m = \infty,$$

pak

$$\overline{CM} = \frac{r\sin\varphi}{\varphi};$$

ježto

$$\overline{AP} = r\sin\varphi \quad \text{a} \quad arc\,.\,MN = \overline{CM}\,\varphi,$$

jest

$$arc\ MN = \overline{AP}.$$

Rhäticus ukázal v díle: „Fabrica canonis doctrinae triangulorum“ geometrickou konstrukcí, kterak sinus úhlů postupujících dle řady arithmetické lze nalézti, jsou-li první dva úhly známy, dvojím způsobem.

První postup vede ke vzorcům:

$$\sin n\varphi = 2\cos\varphi \sin(n-1)\varphi - \sin(n-2)\varphi;$$
$$\cos n\varphi = \cos(n-2)\varphi - 2\sin\varphi \sin(n-1)\varphi.$$

Druhý postup vede k vzorcům:

$$\begin{aligned}\sin(\alpha + n\varphi) &= \sin(\alpha + (n-2)\varphi)\\ &\quad + 2\sin\varphi\cos(\alpha + (n-1)\varphi);\\ \cos(\alpha + n\varphi) &= 2\cos(\alpha + (n-2)\varphi)\\ &\quad - 2\sin\varphi\sin(\alpha + (n-1)\varphi).\end{aligned}$$

XI. První, který kvadraturu kruhu horlivě hledal, byl kardinál Cusanus († 1464).

Ve spise: „De transmutationibus geometricis“ podává konstrukci, kterak z dané úsečky lze sestrojiti kružnici, jejíž délka rovná se dané úsečce: Sestrojí trojúhelník rovnostranný, jehož obvod rovná se dané délce, ze středu trojúhelníku vede k $\frac{1}{4}$ jeho základny příčku; přidá-li k této příčce $\frac{1}{4}$ její délky, obdrží poloměr kruhu, jehož obvod $=$ obvodu trojúhelníku, t. j. dané úsečce.

Příčka p jest přeponou trojúhel. pravoúhlého, jehož odvěsny jsou $\frac{x}{4}$, $\frac{1}{3}\cdot\frac{x}{2}\sqrt{3} = \frac{x}{6}\sqrt{3}$ ($x = \frac{O}{3}$ strana $\triangle$ rovnostranného, O jeho obvod): jest tedy

$$p = \sqrt{\frac{x^2}{16} + \frac{3x^2}{36}} = \frac{x}{4}\sqrt{\frac{7}{3}}$$

a

$$r = p + \frac{p}{4} = \frac{5}{4}p = \frac{5}{16}x\sqrt{\frac{7}{3}},$$

nebo

$$r = \frac{5}{16}\cdot\frac{O}{3}\cdot\frac{\sqrt{21}}{3},$$

t. j.

$$\frac{O}{2r} = \frac{24\sqrt{21}}{35}.$$

Dle této konstrukce jest $\pi = 3{\cdot}142337$, které jest o něco přesnější než $\frac{22}{7}$.

Opačnou úlohu: úsečku nalézti, aby se rovnala délce dané kružnice, učí Cusan ve spise: „De mathematicis complementis".

V daném kruhu sestrojí se dva na sobě kolmé průměry (na př. horizontální a vertikální), v krajním bodě vertikálního průměru sestrojí se tětiva příslušná k úhlu 120°, délkou této tětivy sestrojí se kruh, který se daného kruhu v krajním bodě vertik. průměru uvnitř dotýká; kruh tento na horizont. průměru (na obě strany prodlouženém) utíná část, která se rovná $\frac{1}{2}$ obvodu daného kruhu.

Konstrukce udává:

$$2\pi : O = 1 : 3{\cdot}13949.$$

Je-li t délka tětivy, r poloměr daného kruhu, $2x$ odetnutá část na horizont průměru, jest

$$x = \sqrt{t^2 - (t - r)^2} = \sqrt{2tr - r^2};$$

ježto $t = r\sqrt{3}$, pak

$$x = r\sqrt{2\sqrt{3} - 1} = r\sqrt{2{\cdot}4641}\ldots$$

a

$$\frac{O}{2} = 2r\sqrt{2{\cdot}4641},$$

čili

$$O = 2r \,.\, 3{\cdot}13\ldots$$

XII. Budiž

$$F(x) = (1 + x)^n,$$

pak jest

$$F(O) = 1.$$

Vyvineme-li $F(x)$ v řadu postupující dle mocnin veličiny x, jsme oprávněni psáti:

$$(1 + x)^n = 1 + Ax + Bx^2 + Cx^3 + Dx^4 + \ldots$$

Položíme-li

$$A = f(n),$$

jest

$$(1 + x)^n = 1 + f(n)\,x + \ldots$$

a

$$(1+x)^{n+1} = 1 + f(n+1)x + \ldots = (1+x)(1+x)^n$$
$$= (1+x)[1+f(n)x+\ldots] = 1 + x + f(n)x + f(n)x^2 + \ldots$$

Srovnáme-li členy v této rovnici, shledáváme, že

$$f(n+1) = 1 + f(n);$$

patrno, že při

$$n = 0, \text{ jest } f(1) = 1,$$
$$n = 1, \quad „ \quad f(2) = 1 + 1 = 2,$$
$$n = 2, \quad „ \quad f(3) = 1 + 2 = 3$$

a obecně

$$f(n) = n = A,$$

tudíž

$$(1+x)^n = 1 + nx + Bx^2 + Cx^3 + Dx^4 + \ldots$$

Zvětšíme-li x o malý přírůstek $\varDelta$, jest

$$(1+x+\varDelta)^n = 1 + n(x+\varDelta) + B(x+\varDelta)^2$$
$$+ C(x+\varDelta)^3 + \ldots = (1+x)^n\left(1+\frac{\varDelta}{1+x}\right)^n$$
$$= (1+x)^n\left[1 + n\frac{\varDelta}{1+x} + B\frac{\varDelta^2}{(1+x)^2} + C\frac{\varDelta^3}{(1+x)^3} + \ldots\right]$$

Rozvineme-li naznačené součiny, vyvodíme:

$$1 + nx + n\varDelta + Bx^2 + 2Bx\varDelta + B\varDelta^2 + Cx^3 + 3Cx^2\varDelta$$
$$+ 3Cx\varDelta^2 + C\varDelta^3 + \ldots = (1+x)^n + n\varDelta(1+x)^{n-1}$$
$$+ B\varDelta^2(1+x)^{n-2} + \ldots,$$

čili

$$1 + nx + Bx^2 + Cx^3 + \ldots + [n + 2Bx + 3Cx^2$$
$$+ 4Dx^3 + \ldots]\varDelta + \ldots = 1 + nx + Bx^2 + Cx^3 + \ldots$$
$$+ n\varDelta(1+x)^{n-1} + B\varDelta^2(1+x)^{n-2} + \ldots$$

a tudíž

$$n + 2Bx + 3Cx^2 + 4Dx^3 + \ldots = (1+x)^{n-1},$$

nebo

$$(1+x)(n + 2Bx + 3Cx^2 + \ldots) = n(1+x)^n,$$

t. j.

$$n + 2B + 3Cx^2 + \ldots + nx + 2Bx^2 + 3Cx^3 + \ldots$$
$$= n(1 + nx + Bx^2 + Cx^3 + \ldots),$$

pročež

$$n + (2B+n)x + (3C+2B)x^2 + \ldots$$
$$= n + n^2x + Bnx^2 + Cnx^3 + \ldots$$

I jest

$$2B + n = n^2, \quad 3C + 2B = Bn, \ldots$$

a

$$B = \frac{n(n-1)}{2}, \quad C = \frac{Bn - 2B}{3} = B\frac{n-2}{3}$$
$$= \frac{n(n-1)(n-2)}{2 \cdot 3}.$$

atd.

Málo známé jubileum.

Dr. Karel Čupr.

Dnes, kdy zaveden jest počet infinitesimální na střední školy, nebude snad nevhodno vzpomenouti si na spisovatele mathematické učebnice, jenž prvý se o to pokusil. Jest to Václav Šimerka, církevní kněz. Jméno mathematika toho a jeho dílo jest mladší generaci neznámo. Psáno bylo o něm celkem málo; ani Pánkův nekrolog v XVII. ročníku Časopisu pro pěstování mathematiky a fysiky, ani Adámkova studie v České revui z r. 1909 nevystihují jeho význam jako mathematika a spisovatele.

Místo mnohých dat životopisných uvedu jeho autobiografii, jak ji vlastnoručně napsal ve farní pamětní knize v Jenšovicích u Luže (pod zříceninami historického Košumberku, hejtmanství Vys. Mýto). Jest zajímavá nejen svými daty o osobě pisatelově, nýbrž i tím, že obsahuje leckterou podrobnost z veřejného života dnes neznámou (interní poměry gymnasia budějovického, řízení approbační atd.).

„Pátý farář jenšovický byl Václav Šimerka, narozen ve Vysokém Veselí (u Jičína) dne 20./XII. 1819. Gymnasium studoval v Jičíně, filosofii v Praze, při čemž též dva ročníky vyšší mathematiky, astronomii a praktickou geometrii slyšel a zkoušky z těchto předmětů odbyl. Bohosloví studoval v Hradci Králové, kdež byl dne 25. července 1845 spolu s Jos. Jaklem (bývalým administrátorem v Jenšovicích) na kněžství vysvěcen. Na to byl 6 let a 4 měsíce, totiž až do vánoc 1851 kaplanem a poslední čas administrátorem ve Žlunicích. Tam se nepohodl r. 1848 za