Josef Tomáš
Poznámky ku geometrii trojúhelníku. [II.]

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 43 (1914), No. 3-4, 450--465

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/109250

Poznámky ku geometrii trojúhelníku.

Dr. Jos. Tomáš, professor v Kroměříži.

(Pokračování.)

Přímka Tuckerova i přímka J mají zvláštní, jednoduchý vztah ke dvěma harmonikálám trojúhelníku. Vztah tento vysvitne z úlohy:

11. Sestrojiti body, jichž vzdálenosti od vrcholů trojúhelníku mají se k sobě jako příslušné výšky. Tyto body, střed kruhu o trojúhelník opsaného a bod Lemoineův leží v přímce.

Rozbor: Budiž P bod, jehož vzdálenosti od vrcholů $\triangle\, ABC$ jsou přímo úměrny příslušným výškám; pak jsou nepřímo úměrny protilehlým stranám, na př.: $AP : BP = v_a : v_b = b : a$. Leží tedy bod P na Apolloniově kružnici K_3, která jest geometrickým místem všech bodů, jichž vzdálenosti od krajních bodův úsečky c jsou v poměru stálém. Vedle K_3 obdržíme ještě kružnice K_1 a K_2. Všechny tři se protínají ve dvou bodech P_1 a P_2, takže každým z nich všecky tři procházejí, čehož důkaz je na snadě; neboť K_3 a K_1 se protínají v bodech P_1 a P_2, pročež

$$AP_1 : BP_1 : CP_1 = \frac{1}{a} : \frac{1}{b} : \frac{1}{c} = AP_2 : BP_2 : CP_2.$$

Všecky body kružnice K_2 vyhovují podmínce

$$AX : CX = \frac{1}{a} : \frac{1}{c},$$

ale také jen tyto body. Poněvadž pak

$$AP_1 : CP_1 = AP_2 : CP_2 = \frac{1}{a} : \frac{1}{c},$$

musí také body P_1 a P_2 ležeti na kružnici K_2.

Dle toho se body hledané sestrojí. (Nejlépe jest voliti trojúhelník tupoúhlý.) Odtud patrno, že středy kružnic Apolloniových O_1, O_2, O_3 leží v přímce — společné centrále. Přímka P_1P_2 je chordálou kružnic K_1, K_2, K_3; dokážeme, že na této přímce leží střed M kružnice, jež jest o $\triangle\, ABC$ opsána.

Úhel MBO_2 skládá se z úhlu MBm a úhlu mBO_2; m jest střed kružnice do $\triangle ABC$ vepsané.

$$\sphericalangle MBm = \gamma - R + \frac{\beta}{2} = \frac{\gamma - \alpha}{2}.$$

Jestiť úhel $AMB = 2(2R - \gamma)$, tudíž $\sphericalangle ABM = \gamma - R$ (pro tupý úhel γ); $\sphericalangle mBO_2$ rovná se úhlu, jejž svírá osa $\sphericalangle B$ se stranou AC, tedy

$$2R - \left(\gamma + \frac{\beta}{2}\right), \quad \text{čili} \quad R - \frac{\gamma - \alpha}{2},$$

tak že $\sphericalangle MBO_2 = R$. Jest tedy MB tečnou kruhu K_2 a MA tečnou kruhu K_1, což se podobně dokáže. Poněvadž pak $MB = MA$, leží bod M na chordále kruhů K_1 a K_2: přímka, jdoucí body P_1 a P_2, prochází i bodem M. Zároveň patrno, že všechny kružnice Apolloniovy protínají kružnici K, o trojúhelník opsanou, kolmo.

Chordály tří kruhů se protínají v jednom bodě, — pokud ovšem neprocházejí všecky tři kružnice týmiž dvěma body, srv. kružnice K_1, K_2, K_3 —. V naší úloze chordály kružnic (K, K_1), (K, K_2), (K, K_3) protínají se v bodě L, jímž prochází i společná chordála kruhů K_1, K_2, K_3. I jest L čtvrtý bod, jenž leží v přímce (P_1P_2).*)

$\overline{MP_1} \, . \, \overline{MP_2} = \overline{MA}^2 = r^2$ (mocnina vnějšího bodu M vzhledem ke kružnicím Apolloniovým). Dle toho jest kolmice v jednom z obou bodů P_1, P_2 na přímce ML vztyčená polárou druhého bodu vzhledem ke kružnici K. V bodě L se protíná čtvero chordál. I jest

$$\overline{LP_1} \, . \, \overline{LP_2} = \overline{LA} \, . \, \overline{LA_1} = \overline{LB} \, . \, \overline{LB_1} = \overline{LC} \, . \, \overline{LC_1}$$
$$= -(r^2 - \overline{ML}^2) \ldots$$

mocnina vnitřního bodu L vzhledem ke kružnicím Apolloniovým a ke kružnici K. Body A_1, B_1, C_1 jsou druhé průseky kružnice K s kružnicemi Apoll. Body M, L, P_1, P_2 tvoří harmonickou čtve-

*) Laskavý čtenář račiž si příslušný obrazec nakresliti.

řinu; neboť na př. AA_1 jest polárou bodu M vzhledem ke kružnici K_1, a proto

$$\frac{MP_1}{MP_2} : \frac{LP_1}{LP_2} = -1, \quad ML = \frac{2 \cdot \overline{MP_1} \cdot \overline{MP_2}}{MP_1 + MP_2}$$

(harmon. průměr) $= \dfrac{2r^2}{MP_1 + MP_2}$. Označíme-li $ML = l$, určí se $MP_1 = z_1$, $MP_2 = z_2$ z rovnic $z_1 z_2 = r^2$, $z_1 + z_2 = \dfrac{2r^2}{l}$, t. j. z kvadrat. rovnice

$$z^2 - \frac{2r^2}{l} z + r^2 = 0, \quad z_{1,2} = \frac{r}{l}(r \mp \sqrt{r^2 - l^2}),$$

$$\overline{P_1 P_2} = \frac{2r}{l} \sqrt{r^2 - l^2},$$

vzdálenost pak bodu M od přímky $O_3 O_1 O_2$ jest $d = \dfrac{r^2}{l}$.

Chordály AA_1, BB_1, CC_1 protínají strany trojúhelníku ABC v bodech 1, 2, 3, z nichž každý je se středem příslušného kruhu Apolloniova harmonicky sdružen vzhledem ke krajním bodům příslušné strany. Průsek L chordál jest *Lemoineovým* bodem $\triangle ABC$, což dokážeme takto:

Poněvadž všecky kružnice Apolloniovy protínají kružnici K kolmo, jsou chordály AA_1, BB_1, CC_1 zároveň polárami bodův O_1, O_2, O_3 vzhledem ke kružnici K i polárami bodu M vzhledem ke kružnicím Apolloniovým. Z toho plyne:

$$\frac{B1}{C1} : \frac{BO_1}{CO_1} = -1 = \frac{C2}{A2} : \frac{CO_2}{AO_2} = \frac{A3}{B3} : \frac{AO_3}{BO_3}.$$

Určíme na př. hodnotu poměru $\dfrac{AO_3}{BO_3}$. Poloměr ϱ_3 Apolloniova kruhu K_3 jest $= O_3 S_3$, je-li S_3 průsek osy $\sphericalangle \gamma$ se stranou AB. $AS_3 : S_3 B = b : a = S'_3 A : S'_3 B$, kde S'_3 je průsek osy vnějšího úhlu při C s prodlouženou stranou BA.

$$AS_3 = \frac{bc}{a+b}, \quad S'_3 A = \frac{bc}{a-b}, \quad S'_3 A + AS_3 = 2\varrho_3 = \frac{2abc}{a^2 - b^2},$$

$$\varrho_3 = \frac{abc}{a^2 - b^2}, \quad \text{tudíž } \frac{AO_3}{BO_3} = \frac{\varrho_3 - AS_3}{\varrho_3 + S_3 B} = \frac{b^2}{a^2}.$$

Jest tedy poměr $\frac{A3}{B3} = -\frac{b^2}{a^2}$, a to jest i poměr, ve kterém symmediana $\triangle ABC$, jdoucí vrcholem C, seče stranu AB; neboť poměr vzdáleností kteréhokoli bodu těžnice t_c od stran AC, BC jest $= \frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{a}{b}$, tudíž poměr vzdáleností kteréhokoli bodu příslušné symmediany od týchž stran jest $= \frac{b}{a}$. Dle toho bude $\frac{A3'}{B3'} = -\frac{b : \sin \alpha}{a : \sin \beta} = -\frac{b^2}{a^2}$, je-li $3'$ průsek symmediany se stranou AB. I jest $3' \equiv 3$, a tedy chordála $C3C_1$ symmedianou $\triangle ABC$; ze stejných důvodů jsou i chordály $A1A_1$, $B2B_1$ symmediany. Společný průsek L všech tří chordál je tedy Lemoineovým bodem $\triangle ABC$.

Přímka MP_1LP_2 jest přímka Tuckerova a body P_1, P_2 středy dvou kružnic Tuckerových. Tyto dvě kružnice bychom sestrojili, užijíce věty, dokázané v odst. 7. Byl tam totiž dokázán vztah $MT = TM'$, kde T je střed kružnice Tuckerovy, M' pak střed kružnice opsané o trojúhelník, jehož průseky se stranami $\triangle ABC$ určují kružnici Tuckerovu, a jenž jest trojúhelníku danému podoben dle společného bodu Lemoineova jako středu podobnosti; střed T kruhu Tuckerova půlí vzdálenost MM'. V našem případě by bylo $MP_1 = P_1M'$, $MP_2 = P_2M''$. Kruhy $K(M)$ a $K'(M')$ jsou si podobny dle středu podobnosti L, tak že

$$ML : |M'L| = r : r', \text{ podobně } ML : |M''L| = r : r''.$$

Dle těchto úměr sestrojí se k daným středům P_1 a P_2 dvou kružnic Tuckerových poloměry r', r'' pomocných kružnic K' a K'', jichž průseky (patřičně vyhledané) se symmedianami daného trojúhelníku ABC určují trojúhelníky, podobné danému dle společného bodu Lemoineova L jako středu podobnosti.

Přímka $O_3O_1O_2$, kolmá na přímce Tuckerově, jest harmonikála bodu Lemoineova L. Stanoví-li totiž 3 příčky, vrcholy trojúhelníku jdoucí a v jednom bodě Q se protínající, na protilehlých stranách body H_1, H_2, H_3, a sestrojíme-li ke každému z těchto bodů na příslušné straně (po příp. prodloužené) bod harmonicky sdružený vzhledem ke krajním bodům této strany, leží tyto body H'_1, H'_2, H'_3 v přímce, která sluje harmonikála bodu Q vzhledem k trojúhelníku. Důkaz je snadný, užije-li se věty Cevovy a Menelaovy.

Harmonikála $O_3 O_1 O_2$ bodu Lemoineova L jest polárou tohoto bodu vzhledem ke kružnici K, o trojúhelník opsané; neboť příčky $O_3 L$, $O_1 L$, $O_2 L$ jsou kružnicí K harmonicky rozděleny dle bodů (O_3, L), po příp. (O_1, L), (O_2, L); jestiť L bodem poláry kruhů K_3 a K vzhledem ku pólu O_3, podobně jest L i bodem poláry kruhů K_1 a K, po příp. K_2 a K vzhledem ku pólům O_1, O_2. Je tedy harmonikála $O_3 O_1 O_2$ bodu Lemoineova polárou kruhu K vzhledem k bodu Lemoineovu jako pólu.

Rovnici této harmonikály odvodíme takto:

Procházejíc body O_1, O_2 bude harmonikála míti rovnici

$$\begin{vmatrix} N_1 & p_1 & q_1 \\ N_2 & p_2 & q_2 \\ N_3 & p_3 & q_3 \end{vmatrix} = 0,$$

srv. odst. 9.; p_K, q_K jsou vzdálenosti bodův O_1, O_2 od stran $\triangle ABC$.

$$p_1 = 0,\ p_2 = -\varrho_1 \sin O_1 \hat{A} C, \quad \sphericalangle O_1 AC = \sphericalangle ABC = \beta;$$

neboť $O_1 A = \varrho_1$ jest tečnou kružnice K, o trojúhelník opsané.

$$p_2 = -\varrho_1 \sin \beta,\ \text{podobně}\ p_3 = \varrho_1 \sin (2R - \gamma) = \varrho_1 \sin \gamma.$$

Stejně odvodíme

$$q_1 = -\varrho_2 \sin \alpha,\ q_2 = 0,\ q_3 = \varrho_2 \sin (2R - \gamma) = \varrho_2 \sin \gamma.$$

I bude rovnice harmonikály $O_3 O_1 O_2$ bodu Lemoineova:

$$\begin{vmatrix} N_1 & 0 & \sin \alpha \\ N_2 & -\sin \beta & 0 \\ N_3 & \sin \gamma & -\sin \gamma \end{vmatrix} = 0,$$

čili $N_1 \sin \beta \sin \gamma + N_2 \sin \gamma \sin \alpha + N_3 \sin \alpha \sin \beta = 0$, neb

$$\frac{N_1}{\sin \alpha} + \frac{N_2}{\sin \beta} + \frac{N_3}{\sin \gamma} = 0.$$

Obecný tvar rovnice harmonikály pro určitý bod Q trojúhelníku:

Budiž bod Q dán rovnicemi $N_1 + \lambda N_2 = 0$, $N_2 + \mu N_3 = 0$; příčka, jdoucí vrcholem B trojúhelníku a průsečíkem Q obou oněch příček, musí míti pak rovnici

$$N_3 - \frac{1}{\lambda\mu} N_1 = 0, \text{ neboli } N_3 + \nu N_1 = 0;$$

součinitelé λ, μ, ν musí vyhovovati podmínce $\lambda\mu\nu = -1$.

Paprsky $N_1 = 0$, $N_1 + \lambda N_2 = 0$, $N_2 = 0$, $N_1 - \lambda N_2 = 0$ tvoří harmonický svazek; podobně v obou ostatních případech.

Paprsek $N_1 - \lambda N_2 = 0$, procházející vrcholem C trojúhelníku, protíná protější stranu AB v bodě H'_3, jenž jest s průsekem H_3 strany AB a paprsku $N_1 + \lambda N_2 = 0$ harmonicky sdružen dle bodův A, B. Body H'_3, H'_1, H'_2 leží v přímce, jejíž rovnice jest

$$(N_1 - \lambda N_2) + \xi N_3 \equiv \eta\,[(N_2 - \mu N_3) + \zeta N_1] = 0,$$

odtud

$$N_1(1 - \eta\zeta) - N_2(\lambda + \eta) + N_3(\xi + \eta\mu) \equiv 0,$$

$\eta = -\lambda$, $\xi = \lambda\mu$; i bude rovnice harmonikály bodu Q:

$$N_1 - \lambda N_2 + \lambda\mu N_3 = 0.$$

Tato přímka obsahuje vedle bodů H'_3, H'_1 také bod H'_2; neboť poněvadž $\lambda\mu\nu = -1$, možno psáti rovnici také takto:
$-(N_3 + \nu N_1) - \lambda\nu N_2 = 0$, neb $(N_3 + \nu N_1) + \lambda\nu \,.\, N_2 = 0$, což jest rovnice přímky, jdoucí bodem H'_2.

K bodu L bude harmonikála dána rovnicí

$$N_1 + N_2 \frac{\sin\alpha}{\sin\beta} + N_3 \,.\, \frac{\sin\alpha}{\sin\gamma} = 0,$$

čili

$$\frac{N_1}{\sin\alpha} + \frac{N_2}{\sin\beta} + \frac{N_3}{\sin\gamma} = 0;$$

jsoutě rovnice symmedian $N_1 \sin\beta - N_2 \sin\alpha = 0$ atd., tedy

$$\lambda = -\frac{\sin\alpha}{\sin\beta}, \quad \mu = -\frac{\sin\beta}{\sin\gamma}.$$

12. Dvěma kružnicemi Apolloniovými daného trojúhelníku jest určena i třetí; neboť tato musí procházeti společnými průsečíky obou prvých a všecky tři musí protínati kružnici, o troj-

úhelník opsanou, kolmo. Poloměry všech tří kružnic Apolloniových jsou na sobě závisly vztahem $\frac{1}{\varrho_1}+\frac{1}{\varrho_2}+\frac{1}{\varrho_3}=0$, bereme-li poloměry algebraicky.

Důkaz: V odstavci předcházejícím (11.) odvozena hodnota poloměru ϱ_3 kruhu K_3: $\varrho_3=\frac{abc}{a^2-b^2}$; absolutní hodnoty ostatních dvou poloměrů budou, je-li $c>a>b$,

$$|\varrho_1|=\frac{abc}{c^2-b^2}, \qquad \varrho_2=\frac{abc}{c^2-a^2}.$$

Kdybychom odvodili ϱ_1, ϱ_2 cyklickou záměnou z poloměru ϱ_3, bylo by

$$\varrho_1=\frac{abc}{b^2-c^2}<0, \qquad \varrho_2=\frac{abc}{c^2-a^2}>0.$$

I bude, utvoříme-li převratné hodnoty,

$$\frac{1}{\varrho_1}+\frac{1}{\varrho_2}+\frac{1}{\varrho_3}=0, \text{ nebo } \frac{1}{\varrho_2}+\frac{1}{\varrho_3}=\left|\frac{1}{\varrho_1}\right|.$$

Opisujme kružnice K_1, K_2, K_3, vycházejíce od stejnolehlých bodů (třebas od společných průseků kružnic, stran a os úhlů $\triangle ABC$) směrem k vrcholům příslušným; i bude opsána kružnice K_1 ve smyslu záporném, ostatní dvě kružnice však ve smyslu kladném. Dva z poloměrů mají znaménko stejné, třetí má znaménko protivné.

V rovnoramenném $\triangle$, v němž $b=a$, bude

$$\frac{1}{\varrho_3}=0, \quad \frac{1}{\varrho_2}=-\frac{1}{\varrho_1},$$

čili $\varrho_1=-\varrho_2$; v rovnostranném $\triangle$ jest

$$\frac{1}{\varrho_1}=\frac{1}{\varrho_2}=\frac{1}{\varrho_3}=0.$$

Pro trojúhelník pravoúhlý platí hořejší obecný vztah; vedle toho jest $|\varrho_1\varrho_2|=c^2=4r^2$, je-li c podpona trojúhelníku, $\sqrt{\left|\frac{\varrho_2}{\varrho_1}\right|}=tg\,\alpha$. K daným kružnicím Apolloniovým K_1, K_2, K_3 nakreslíme příslušný trojúhelník pravoúhlý, vedeme-li společnou (vnější) tečnu kruhů K_1, K_2; úsečka této tečny mezi body dotyčnými jest přeponou, třetí vrchol leží na kružnici K_3.

Poznámka: Zevrubnější rozbor vede mimo jiné k tomuto výsledku: Vedle $\triangle ABC$ má i $\triangle A_1B_1C_1$, do téhož kruhu vepsaný ($\triangle$ jest určen druhými krajními body chordál AA_1, BB_1, CC_1) týž bod Lemoineův L, tytéž kružnice Apolloniovy, touž harmonikálu. Přímka tato jest Pascalovou přímkou šestiúhelníku $ABCA_1B_1C_1$; v bodě O_1 se protínají přímky BC, C_1B_1, v bodě O_2 přímky AC, C_1A_1, v bodě O_3 přímky BA, A_1B_1; vedle toho se protínají přímky B_1C, C_1B, AA_1 v jednom bodě O' na harmonikále, podobně přímky C_1A, A_1C, BB_1 v jednom bodě O'' a přímky BA_1, AB_1, C_1C v bodě O''' na harmonikále, tak že na př. paprsky BA_1, AB_1 jsou harmonicky sdruženy vzhledem k chordále CC_1 a k harmonikále bodu L.

13. Body P_1, P_2, M, L tvoří involuci a přímka P_1P_2 jest osou této involuce, jejíž základní body jsou P_1 a P_2. Jsou-li dány tři kružnice K_1, K_2, K_3, jež všechny procházejí týmiž dvěma body P_1, P_2, a splňují-li poloměry jejich podmínku

$$\frac{1}{\varrho_1}+\frac{1}{\varrho_2}+\frac{1}{\varrho_3}=0,$$

kde nejmenší poloměr (ϱ_1) má znaménko protivné ke znaménkům obou ostatních, a leží-li středy obou největších kruhů na různých stranách přímky P_1P_2 tak, že délka středné

$$\overline{O_3O_2}=\sqrt{\varrho_3^2+\varrho_2\varrho_3+\varrho_2^2},$$

kdežto střed kruhu nejmenšího (O_1) je se středem (O_3) největšího na téže straně přímky P_1P_2, jsou kružnice ty kružnice Apolloniovy soustavy trojúhelníků, jejichž body Lemoineovy a středy kružnic opsaných tvoří s průseky P_1, P_2 kružnic Apolloniových přímočarou involuci. Kterýkoli z trojúhelníkův obdržíme, protnouce kružnice Apolloniovy kolmo kružnicí, jejíž střed leží na ose involuce. Kružnice K tvoří svazek orthogonálních trajektorií kružnic Apolloniových; k nim patří i mezné útvary: kružnice nullové v bodech P_1 a P_2 jakož i polára (harmonikála) $O_3O_1O_2$ bodův L (Lemoineových).

Vypočítáme délku středné $\overline{O_3O_2}=c_{32}$ z $\triangle O_3BO_2$ neb $\triangle O_3AO_2$. V $\triangle O_3B''_2$ jest $O_3B=\varrho_3+\overline{S_3B}$, $BO_2=\varrho_2$;

S_3 jest průsek osy $\sphericalangle C$ se stranou AB.

$$\sphericalangle O_3BO_2 = \beta + \alpha = 2R - \gamma;$$

je totiž $\sphericalangle CBO_2$ úhel úsekový (mez. tětivou CB a tečnou BO_2), tudíž $= \alpha$;

$$S_3B = \frac{ac}{a+b}, \quad O_3B = \frac{a^2c}{a^2 - b^2},$$

ϱ_3 je totiž $= \frac{abc}{a^2 - b^2}$ (srv. odst. 12.). I bude dle věty Carnotovy:

$$c_{32}^2 = \overline{O_3B}^2 + \varrho_2^2 + 2 \,.\, \overline{O_3B} \,.\, \varrho_2 \,.\, \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab},$$

kde

$$\frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$$

dosazeno místo $cos\ \gamma$; můžeme psáti

$$O_3B = \frac{abc}{a^2 - b^2} \,.\, \frac{a}{b} = \frac{a}{b}\, \varrho_3,$$

i obdržíme:

$$c_{32}^2 = \frac{1}{b^2}\left\{a^2\varrho_3^2 + b^2\varrho_2^2 + \varrho_2\varrho_3\,(a^2 + b^2 - c^2)\right\}.$$

Poněvadž

$$\varrho_2 : \varrho_3 = (a^2 - b^2) : (c^2 - a^2),$$

bude

$$c^2 = \frac{a^2\,(\varrho_2 + \varrho_3) - b^2\varrho_3}{\varrho_2},$$

tudíž dosadíme-li do rovnice pro c_{32}^2:

$$c_{32}^2 = \frac{1}{b^2}\left\{a^2\varrho_3^2 + b^2\varrho_2^2 + \varrho_3\,(b^2\varrho_2 + b^2\varrho_3 - a^2\varrho_3)\right\},$$

$$c_{32} = \sqrt{\varrho_2^2 + \varrho_2\varrho_3 + \varrho_3^2}.$$

Je tedy c_{32} závislo jen na poloměrech kružnic K_2, K_3.

Označme průsek harmonikály O_3O_2 s přímkou Tuckerovou písmenem N!

$$\varrho_3^2 - \overline{O_3N}^2 = \varrho_2^2 - \overline{NO}_2^2, \quad \text{čili} \quad \varrho_3^2 - \varrho_2^2 = \overline{O_3N}^2 - \overline{NO}_2^2$$

$$c_{32} = O_3N + NO_2.$$

Dělíme-li obě rovnice, bude

$$\frac{\varrho_3^2 - \varrho_2^2}{c_{32}} = O_3N - NO_2,$$

tudíž

$$O_3N = \frac{c_{32}^2 + \varrho_3^2 - \varrho_2^2}{2c_{32}}, \qquad NO_2 = \frac{c_{32}^2 + \varrho_2^2 - \varrho_3^2}{2c_{32}},$$

$$O_3N = \frac{\varrho_3(2\varrho_3 + \varrho_2)}{2\sqrt{\varrho_2^2 + \varrho_2\varrho_3 + \varrho_3^2}}, \quad NO_2 = \frac{\varrho_2(2\varrho_2 + \varrho_3)}{2\sqrt{\varrho_2^2 + \varrho_2\varrho_3 + \varrho_3^2}},$$

$$NO_3 : O_2N = \varrho_3(2\varrho_3 + \varrho_2) : \varrho_2(2\varrho_2 + \varrho_3).$$

Budiž

$$\overline{P_1P_2} = 2p;\; p^2 = \varrho_3^2 - \overline{NO}_3^2 = \frac{3\varrho_2^2\varrho_3^2}{4(\varrho_2^2 + \varrho_2\varrho_3 + \varrho_3^2)}$$

$$\overline{P_1P_2} = 2p = \varrho_2\varrho_3\sqrt{\frac{3}{\varrho_2^2 + \varrho_2\varrho_3 + \varrho_3^2}},$$

$$\frac{1}{2p} = \sqrt{\frac{1}{3}\left(\frac{1}{\varrho_2^2} + \frac{1}{\varrho_2\varrho_3} + \frac{1}{\varrho_3^2}\right)}.$$

Určiti poloměr kruhu K, je-li dána vzdálenost jeho středu od harmonikály O_3O_2 a poloměry ϱ_2, ϱ_3 dvou kružnic Apolloniových.

Budiž daná vzdálenost $MN = d$! V odst. 11. byly odvozeny vzorce

$$\overline{P_1P_2} = 2p = \frac{2r}{l}\sqrt{r^2 - l^2}, \quad MP_1 = \frac{r}{l}(r - \sqrt{r^2 - l^2}).$$

I bude $\quad d = MP_1 + p = \frac{r^2}{l}, \quad l = \frac{r^2}{d},$

tedy $\quad 2p \,.\, \frac{r^2}{d} = \frac{2r^2}{d}\sqrt{d^2 - r^2},$

$$p = \overline{P_1N} = \sqrt{d^2 - r^2}, \quad r = \sqrt{d^2 - p^2}, \quad l = d - \frac{p^2}{d}.$$

Za p jest dosaditi hodnotu dříve vypočtenou. Má-li býti kruh K reálný, musí $d \geqq p = \frac{1}{2}\overline{P_1P_2}$; pro $d = p$ jest kruh nullový. Rozumí se samo sebou, že možno sestrojovati kruhy K také od bodu P_2, kdybychom prodloužili osu involuce ve směru $\overrightarrow{P_1P_2}$.

Poněvadž p jest vyjádřeno poloměry ϱ_2, ϱ_3, a pro daný trojúhelník (a, b, c) jsou tyto poloměry již známy (srv. odst. 12.), lze z rovnice

$$p = \frac{r}{l}\sqrt{r^2 - l^2}$$

vzdálenost l bodu Lemoineova od středu M kružnice, o trojúhelník ABC opsané, vyjádřiti prvky a, b, c.

$$l = \frac{r^2}{\sqrt{r^2 + p^2}}.$$

Abychom vypočítali vzdálenosti bodu P_2 (po příp. P_1) od vrcholů $\triangle ABC$, jak v úloze 11. vytčeno, označme

$$AP_2 = x, \quad BP_2 = y, \quad CP_2 = z!$$

$$x : y : z = \frac{1}{a} : \frac{1}{b} : \frac{1}{c}.$$

Budiž $\qquad \sphericalangle AP_2C = \varphi, \quad \sphericalangle CP_2B = \psi.$

I bude

$$\begin{aligned} b^2 &= x^2 + z^2 - 2xz \cos \varphi \\ a^2 &= z^2 + y^2 - 2yz \cos \psi \\ c^2 &= x^2 + y^2 - 2xy \cos (\varphi + \psi). \end{aligned}$$

Vyloučíce z těchto tří rovnic úhly φ a ψ, obdržíme rovnici

$$a^2x^2 [(y^2 + z^2) - x^2 + (b^2 + c^2) - a^2] + b^2y^2 [(z^2 + x^2) - y^2 + (c^2 + a^2) - b^2] + c^2z^2 [(x^2 + y^2) - z^2 + (a^2 + b^2) - c^2] \ldots$$
$$\ldots - (a^2y^2z^2 + b^2z^2x^2 + c^2x^2y^2) = a^2b^2c^2.$$

Užijeme-li hořejší úměry, obdržíme konečně rovnici:

$$x^4 . [a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 - (a^4 + b^4 + c^4)] + b^2c^2x^2 (a^2 + b^2 + c^2) - b^4c^4 = 0.$$

Kladné kořeny této rovnice jsou:

$$x_{1,2} = \frac{bc}{\sqrt{2 [a^4 + b^4 + c^4 - (a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2)]}} . \Theta,$$

kde jsme položili

$$\Theta = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 \mp \sqrt{3 [2 (a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2) - (a^4 + b^4 + c^4)]}}$$

$$\begin{aligned} 2 (a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2) - (a^4 + b^4 + c^4) &= 4a^2b^2 - (a^2 + b^2 - c^2)^2 \\ &= [(a + b)^2 - c^2] [c^2 - (a - b)^2] \\ &= 2^4 . s (s - a) (s - b) (s - c) = 16 \Delta^2. \end{aligned}$$

$$x_{1,2} = bc . \sqrt{\frac{a^2 + b^2 + c^2 \mp 4\Delta . \sqrt{3}}{2 [a^4 + b^4 + c^4 - (a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2)]}}.$$

Jsou to vzdálenosti bodů P_1 a P_2 od vrcholu A.

$$x_1 \, . \, x_2 \equiv \overline{AP_1} \, . \, \overline{AP_2} = \frac{b^2c^2}{\sqrt{a^4+b^4+c^4-(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)}}$$

$$y_{1,2} = ac \, . \, V, \quad z_{1,2} \doteq ab \, . \, V,$$

$$V = \sqrt{\frac{a^2+b^2+c^2 \mp 4\Delta\sqrt{3}}{2\,[a^4+b^4+c^4-(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)]}}.$$

$$x_{1,2} : y_{1,2} : z_{1,2} = bc : ca : ab = \frac{1}{a} : \frac{1}{b} : \frac{1}{c}.$$

Dříve bylo vypočteno

$$\frac{1}{2p} = \sqrt{\frac{1}{3}\left(\frac{1}{\varrho_2^2} + \frac{1}{\varrho_2\varrho_3} + \frac{1}{\varrho_3^2}\right)};$$

$$\frac{1}{\varrho_2^2} + \frac{1}{\varrho_2\varrho_3} + \frac{1}{\varrho_3^2}$$

$$= \frac{1}{a^2b^2c^2}\left\{(c^2-a^2)^2 + (c^2-a^2)(a^2-b^2) + (a^2-b^2)^2\right\}$$

$$= \frac{1}{a^2b^2c^2}\left\{a^4+b^4+c^4-(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)\right\};$$

tedy

$$2p = \overline{P_1P_2} = abc\sqrt{\frac{3}{a^4+b^4+c^4-(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)}},$$

$$x_{1,2} = \frac{p}{3a}\sqrt{6\,(a^2+b^2+c^2 \mp 4\Delta\sqrt{3})}.$$

$$x_1 \, . \, x_2 = \frac{2bcp}{3a}\sqrt{3}.$$

14. Body, ve kterých osy vnějších úhlů trojúhelníku protínají protilehlé strany, leží v přímce — harmonikále středu kružnice, do trojúhelníku vepsané. Tato harmonikála stojí kolmo na přímce J (srv. odst. 10.), jež prochází středem m kružnice, do trojúhelníku vepsané, a bodem G', isogonálně inversním k bodu Gergonnovu. Harmonikála bodu m jest polárou bodu G' vzhledem ke kružnici K, o trojúhelník opsané.

Důkaz:

Body S'_1, S'_2, S'_3, průseky os vnějších úhlů $\triangle ABC$ s protilehlými stranami, leží v přímce, harmonikále středu m

kruhu do trojúhelníku vepsaného; platíť o nich věta Menelaova, analyticky pak obecně dokázáno v odst. 11. Rovnice přímky $S'_3S'_1S'_2$ jest $N_1 + N_2 + N_3 = 0$, kterou možno trojím způsobem psáti:

$$(N_1 + N_2) + N_3 = 0, \quad N_1 + (N_2 + N_3) = 0,$$
$$N_2 + (N_1 + N_3) = 0.$$

Poněvadž $N_1 + N_2 = 0$ je rovnice osy vnějšího úhlu při C, jest jednak

$$N_1 (S'_3) + N_2 (S'_3) = 0,$$

jednak

$$N_3 (S'_3) = 0,$$

tudíž i

$$N_1 (S'_3) + N_2 (S'_3) + N_3 (S'_3) = 0,$$

a pod. v obou ostatních tvarech.

Opíšeme-li z bodů S'_1, S'_2, S'_3 jako středů kružnice K'_1, K'_2, K'_3 tak, aby kružnici K kolmo protínaly, budou všechny tři procházeti dvěma body Q_1 a Q_2, souměrnými dle harmonikály $S'_1S'_2$; neboť proto, že kružnici K protínají kolmo, sekou se chordály všech tří kružnic v bodě M, jsouce však chordály kolmy na společné přímce středné $S'_3S'_1S'_2$, splývají v přímku jedinou, jež prochází společnými průseky kružnic Q_1 a Q_2. Body M, Q_1, Q_2 leží tudíž v přímce. Kružnice K jest jedna ze svazku kružnic, protínajících kružnice K'_1, K'_2, K'_3 kolmo. Středy kružnic tohoto svazku reálných leží na přímce Q_1Q_2 — s výlukou úsečky $\overline{Q_1Q_2}$; k nim náleží i oba krajní útvary: body Q_1, Q_2 a přímka (harmonikála) $S'_3S'_1S'_2$, kolmá na MQ_1Q_2.

Chordály kruhů (K, K'_1), (K, K'_2), (K, K'_3) se protínají se společnou chordálou Q_1Q_2 kružnic K'_1, K'_2, K'_3 v bodě G' z příčin podobných, jak uvedeny v odst. 11.

$$\overline{MQ_1} \cdot \overline{MQ_2} = \overline{AM}^2 = r^2 = \overline{MP_1} \cdot \overline{MP_2} \ldots$$

mocnina vnějšího bodu M ke kružnicím K'_1, K'_2, K'_3, K_1, K_2, K_3.

$$\overline{G'Q_1} \cdot \overline{G'Q_2} = -(r^2 - \overline{MG'}^2) \ldots$$

mocnina vnitřního bodu G' vzhledem ke kružnicím K, K'_1, K'_2, K'_3. Bod G' je společný průsek chordál I, II, III kružnic (K, K'_1), (K, K'_2), (K, K'_3) a přímky Q_1Q_2. Body M, G',

Q_1, Q_2 tvoří harmonickou čtveřinu. Harmonikála $S'_3S'_1S'_2$ bodu m je zároveň polárou bodu G' vzhledem ke kružnici K — z příčin podobných jako v odst. 11.

Bod G' je vnitřním bodem podobnosti kružnice K a kružnice k, do $\triangle ABC$ vepsané, což dokážeme takto: Přímka AS_1, t. j. osa úhlu A, protíná chordálu I v bodě S_1 na straně BC; neboť I jest zároveň polárou bodu S'_1 vzhledem ke kružnici K, a poněvadž

$$\frac{CS'_1}{BS'_1} : \frac{CS_1}{BS_1} = -1,$$

leží bod S_1 na přímce I. Paprsek S'_1A stojí kolmo na AS_1 (jakožto osa vnějšího úhlu při A), $S'_1M \perp$ I, je tedy

$$\sphericalangle AS'_1M = \sphericalangle mS_1G'.$$

Veďme v bodě M rovnoběžku ME k S_1A a $MF \perp$ I! — E jest průsek s přímkou I. I bude

$$\triangle MFE \backsim \triangle MF'S''_1;$$

F' jest pata kolmice $S'_1F' \perp ME$; kolmice ta prochází i bodem A, jelikož $S'_1A \perp S_1A$ a $S_1A \parallel ME$, tudíž

$$FM : ME = F'M : MS'_1,$$

$$\overline{ME} \,.\, \overline{F'M} = \overline{FM} \,.\, \overline{MS'_1} = r^2;$$

neboť $\triangle MDS'_1$ je pravoúhlý, DF jeho výška. D jest jeden z průseků kružnice K s kružnicí K', a leží na chordále I. Poněvadž tedy

$$\overline{ME} \,.\, \overline{F'M} = r^2 = \overline{AM}^2,$$

jest trojúhelník EAM pravoúhlý; neboť píšeme-li $\overline{ME} \,.\, \overline{F'M} = \overline{AM}^2$ jako úměru, jest pravoúhlý $\triangle MF'A \backsim \triangle MAE$ dle 2. poučky o podobnosti. Jest tedy $\sphericalangle EAM = R$, a tudíž paprsek EA tečnou kruhu K, paprsek S'_1A polárou bodu E vzhledem ke kružnici K. Prodlouženou tečnu EA označme EAX! Jest pak $\sphericalangle XAV_1$ úhel úsekový v kružnici K, proto jest

$$\sphericalangle XAV_1 = \sphericalangle ABV_1 = \beta + \frac{\alpha}{2} = \sphericalangle CS_1A = R - \frac{\gamma - \beta}{2};$$

V_1 jest druhý průsek prodloužené osy AS_1 úhlu A s kružnicí K. Trojúhelník, jehož základna jest AS_1 a druhé dvě strany mají směr AX, S_1C, jest rovnoramenný.

$$\sphericalangle MEA = \sphericalangle S_1AX = \sphericalangle AS_1C,$$

neboť

$$AS_1 \parallel EM.$$

Vedeme-li z bodu E druhou tečnu ke kruhu K a označíme-li její bod dotyčný písm. D', bude

$$\sphericalangle MED' = \sphericalangle MEA = \sphericalangle AS_1C,$$

tedy

$$ED' \parallel S_1C$$

ve směru protivném. Budiž T_1 bod, ve kterém se strana BC dotýká kruhu k! I jest

$$\triangle S_1mT_1 \sim \triangle EMD'$$

a to homotheticky, $S_1G'E \equiv \mathrm{I}$ jest paprskem podobnosti. Trojúhelníky jsou záporně homothetické, poměr podobnosti jest $-\frac{\varrho}{r}$, je-li ϱ poloměr kruhu k. Je tedy chordála I vnitřním paprskem podobnosti kruhů K, k. Z podobných důvodů budou i chordály II, III vnitřními paprsky podobnosti obou kruhů K, k. Poněvadž se všechny protínají v bodě G', jest G' vnitřním bodem podobnosti kruhů K a k; tento bod jest (srv. poznámku ke konci odst. 9. a 10.) isogonálně inversní ku bodu Gergonnovu. Body M, G', m, N', kde N' jest bod isogonálně sdružený ku bodu Nagelovu, leží v přímce, kterou jsme v odst. 10. označili jako přímku J.

Výsledek: Přímka J, jež obsahuje vedle bodův M, G', m, N' také společné průsečíky Q_1, Q_2 kružnic K'_1, K'_2, K'_3, stojí kolmo na harmonikále $S'_1S'_2$ bodu m.

Bod N' bychom lehce sestrojili: nakreslili bychom vnější kružnici trojúhelníku ABC, třebas kružnici k_1 při straně BC, a určili bychom vnitřní bod podobnosti I_1 kruhů K a k_1. Poněvadž S_1 je vnitřním bodem podobnosti kruhů k a k_1 (jesti BC společnou tečnou vnitřní, přímka AS_1 pak přímkou střednou), musí dle věty Mongeový*) o bodech podobnosti tří kruhů

*) Pozn. Tři kruhy mají 3 vnější a 3 vnitřní body podobnosti: E_{12}, E_{23}, E_{31}, I_{12}, I_{23}, I_{31}. Ony tři leží v přímce, vnější ose podobnosti $E_{12}E_{23}E_{31}$. Vedle toho mají tři kruhy tři vnitřní osy podobnosti: $I_{12}I_{23}E_{31}$, $I_{23}I_{31}E_{12}$, $I_{31}I_{12}E_{23}$.

vnější bod podobnosti N' kruhů K a k ležeti na paprsku I_1S_1; leží však také na přímce J: průsek paprsku I_1S_1 a přímky $MG'm$ jest bodem N'. Chordála I, jež jest vnitřním paprskem podobnosti kružnic K a k, je zároveň vnitřním paprskem podobnosti kružnic k a k_1 a tedy dle věty o bodech podobnosti tří kruhů vnějším paprskem podobnosti kruhů K a k_1, takže prochází vnějším bodem podobnosti kruhů těchto. Podobné vztahy ke kružnicím k_2, k_3 mají i chordály II, III.

Přímka AG' jest isogonálně souměrna ku příčce AG, procházející bodem Gergonnovým G; podobně BG', CG' vzhledem ku BG, CG. Přímky AG', BG', CG', jsouce vnitřními osami podobnosti kruhů (K, k, k_1), (K, k, k_2), (K, k, k_3), obsahují vnitřní body podobnosti kruhů (K, k_1), po příp. (K, k_2), (K, k_3), což plyne z věty Mongeovy. Podobně přímky AN', BN', CN' jakožto vnější osy podobnosti oněch tří trojin kruhův, obsahují také vnější body podobnosti kruhů (K, k_1), (K, k_2), $K, k_3)$. Těchto vlastností lze mnohdy výhodně užíti ke konstrukci příček AG',... CG', AN',... CN' a tedy i ku přesnější konstrukci bodův G' a N'.

O křivosti řezů na rotačním kuželi a válci.

J. Žďárek, assistent techniky v Praze.

Vztahy, jež zde odvodíme, jsou jen specielním případem theorémů Dupinova a Meusnierova, platných pro obecné řezy všech ploch vůbec. Výsledků nabytých použijeme ke konstrukci tečen ve dvojném bodě proniku dvou ze tří ploch: rotačního válce, kužele a koule.

1. Budiž dán rotační kužel dotýkající se stranorysny podél přímky $A \perp \pi$. Půdorysným stopníkem s jeho osy O procházejž osa rotačního válce o podstavné kružnici L, dotýkajícího se stranorysny taktéž podél přímky A. Potom obě plochy, majíce ve stranorysně dvě soumezné přímky společny, budou se protínati ještě v ellipse E. Je-li o vrchol kužele, v jeho výška, 2α vrcholový úhel, K jeho kuželosečka půdorysná o poloosách a, b, excentricitě e, jednom ohnisku f, ${}^1o$ střed, u polo-