Antonín Jeřábek

Kterak ustanoviti rovnici, jejíž kořeny jsou m-tými mocninami kořenů dané rovnice n-tého stupně, bez užití vzorců Newtonových (m číslo kmenné $\geqq 5$)

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 43 (1914), No. 3-4, 440--449

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/109238`

Kterak ustanoviti rovnici, jejíž kořeny jsou m-tými mocninami kořenů dané rovnice n-tého stupně, bez užití vzorců Newtonových (m číslo kmenné $\geqq 5$).

Napsal **Antonín Jeřábek.**

Značí-li $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$ *kořeny* dané rovnice:

$$x^n + C_1 x^{n-1} + C_2 x^{n-2} + \ldots + C_{n-1} x + C_n = 0, \quad (1)$$

budou *jejich* m-té mocniny $\xi_0 = x_0^m$, $\xi_1 = x_1^m$, $\xi_2 = x_2^m, \ldots,$ $\xi_{n-1} = x_{n-1}^m$ činiti zadost rovnici *tvaru*:

$$\xi^n + D_m \xi^{n-1} + D_{2m} \xi^{n-2} + \ldots + D_{(n-1)m}\, \xi + C_n^m = 0, \quad (2)$$

v níž ***rozměry součinitelů*** $D_m, D_{2m}, \ldots, D_{(n-1)m}$ (jakožto symmetrických funkcí původních kořenů $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$) jsou vyjádřeny příslušnými *jejich* ***udavateli.***

Jest totiž

$$\begin{aligned} D_m &= -\Sigma x_0^m, \\ D_{2m} &= \Sigma x_0^m x_1^m, \\ D_{3m} &= -\Sigma x_0^m x_1^m x_2^m, \\ &\vdots \\ D_{nm} &= (-1)^n x_0^m x_1^m \ldots x_{n-1}^m = C_n^m.\text{*)} \end{aligned}$$

Naší *úlohou* jest ustanoviti $D_m, D_{2m}, \ldots, D_{(n-1)m}$ jako *celistvé homogenní racionální funkce* daných součinitelů $C_1, C_2, C_3, \ldots, C_n$. — Je-li $m = 2$, nebo $m = 3$, lze již *pouhým* zmocněním upravené rovnice úlohu řešiti.

* * *

1. Majíce ustanoviti D_m vytvoříme *všecky možné skupiny* m-*tého rozměru* z daných součinitelů $C_1, C_2, \ldots, C_n$ a opatříce

---

*) $$C_n = (-1)^n x_0 x_1 \ldots x_{n-1};$$
tedy
$$C_n^m = ([-1]^m)^n x_0^m x_1^m x_2^m \ldots x_{n-1}^m = D_{nm},$$
protože dle předpokladu m je číslem *lichým.*

je *neznámými* dosud *násobiteli*: α_1; $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_p$; $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_q$; $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_r$; $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_s$; atd. (s vyloučením *záporných* mocnitelů) položíme:

$$
\begin{aligned}
-D_m = \Sigma x_0^m = {} & \alpha_1 C_1^m \\
& + C_2 (\beta_1 C_1^{m-2} + \beta_2 C_1^{m-4} C_2 + \ldots) \\
& + C_3 (\gamma_1 C_1^{m-3} + \gamma_2 C_1^{m-5} C_2 + \gamma_3 C_1^{m-6} C_3 + \ldots) \\
& + C_4 (\delta_1 C_1^{m-4} + \delta_2 C_1^{m-6} C_2 + \delta_3 C_1^{m-7} C_3 + \ldots) \\
& + C_5 (\varepsilon_1 C_1^{m-5} + \varepsilon_2 C_1^{m-7} C_2 + \ldots) \\
& + \ldots \ldots \ldots \ldots, \qquad (3)
\end{aligned}
$$

kdež první závorka p,
druhá „ q,
třetí „ r,
čtvrtá „ s *neznámých* atd. obsahuje. —

Myslíme-li si nyní na místě *obecné* rovnice (1) nejjednodušší případy zvláštní:

$$
\begin{aligned}
&a) \quad (x - l) = 0, \\
&b) \quad (x-1)(x-p) = 0, \\
&c) \quad (x-1)^2 (x-q) = 0, \\
&d) \quad (x-1)^3 (x-r) = 0, \\
&e) \quad (x-1)^4 (x-s) = 0 \text{ atd.},
\end{aligned}
$$

t. j. klademe-li do (3):

a) $C_1 = -l,\ C_2 = \ldots = C_n = 0;$
$\Sigma x_0^m = l^m;$

b) $C_1 = -(p+1),\ C_2 = p,$
$C_3 = \ldots = C_n = 0;$
$\Sigma x_0^m = p^m + 1;\ p = 1, 2, \ldots, p;$

c) $C_1 = -(q+2),\ C_2 = 2q+1,\ C_3 = -q,$
$C_4 = \ldots = C_n = 0;$
$\Sigma x_0^m = q^m + 2;\ q = 1, 2, \ldots, q;$

d) $C_1 = -(r+3),\ C_2 = 3r+3,\ C_3 = -(3r+1),\ C_4 = r,$
$C_5 = \ldots = C_n = 0;$
$\Sigma x_0^m = r^m + 3;\ r = 1, 2, \ldots, r;$

e) $C_1 = -(s+4),\ C_2 = 4s+6,\ C_3 = -(6s+4),\ C_4 = 4s+1,$
$C_5 = -s,\ C_6 = \ldots = C_n = 0;$
$\Sigma x_0^m = s^m + 4;\ s = 1, 2, \ldots, s;$ atd.,

určíme *neznámé* násobitele posloupně v *každé* jednotlivé *závorce* z *tolika* lineárných rovnic, *kolik neznámých násobitelů v ní* se vyskýtá. Představíme li si, že do (3) *všecky* nalezené řešením hodnoty byly dosazeny, můžeme D_m pokládati za *známé* a tím i *vzor* (3) za *určený*.

2. D_{2m} lze *obdobným* návodem určiti; však výpočty budou *kratší*, užijeme-li *známého vztahu*:

$$D_{2m} = \Sigma x_0^m x_1^m = \tfrac{1}{2}\left[(\Sigma x_0^m)^2 - \Sigma x_0^{2m}\right] \tag{4}$$

K tomu cíli upravíme (1)

$$\begin{aligned} & x^n + C_2 x^{n-2} + C_4 x^{n-4} + C_6 x^{n-6} + C_8 x^{n-8} + C_{10} x^{n-10} + \ldots \\ & = -(C_1 x^{n-1} + C_3 x^{n-3} + C_5 x^{n-5} + C_7 x^{n-7} + C_9 x^{n-9} + \ldots) \end{aligned}$$

Zdvojmocníme-li, vyplyne již:

$$\begin{aligned} & x^{2n} + (-C_1^2 + 2C_2)\, x^{2n-2} + (-2C_1C_3 + C_2^2 + 2C_4)\, x^{2n-4} \\ & + (-2C_1C_5 + 2C_2C_4 - C_3^2 + 2C_6)\, x^{2n-6} \\ & + (-2C_1C_7 + 2C_2C_6 - 2C_3C_5 + C_4^2 + 2C_8) x^{2n-8} \\ & + (-2C_1C_9 + 2C_2C_8 - 2C_3C_7 + 2C_4C_6 - C_5^2 \\ & \qquad + 2C_{10}) x^{2n-10} + \ldots = 0 \end{aligned}$$

rovnice, jež vystrojena čtverci kořenů (1) a kterou krátce naznačíme:

$$x^{2n} + D'_2 x^{2n-2} + D'_4 x^{2n-4} + \ldots + D'_{2n-2} x^2 + (-1)^n C_n^2 = 0 \tag{5}$$

Poněvadž $\Sigma x_0^{2m} = \Sigma\,(x_0^2)^m$, získáme Σx_0^{2m}, když z rovnice (5) do známého již vzoru (3)

za $C_1 \ldots D'_2$,
„ $C_2 \ldots D'_4$,
„ $C_3 \ldots D'_6$, atd. dosadíme.

Vložíme-li tento výsledek jakož i (3) do (4), ustanovili jsme tím D_{2m} a můžeme též *vzor* (4) pokládati za *určený*.

Poznámka I. Počet valně zjednodušíme, když provádějíce *naznačenou substituci* již předem vypustíme *každou skupinu* $C_1^i C_2^j C_3^k \ldots$, při níž jest

$$(n-1)i + (n-2)j + (n-3)k + \ldots > m\,(n-2).$$

Označíme-li totiž m-tou *primitivní* odmocninu *jedničky* písmenem ω, můžeme hledanou rovnici (2) pokládati za *výsledek* provedeného *násobení* následujících mnohočlenů:

$$(x^n + C_1x^{n-1} + \ldots + C_{n-2}x^2 + C_{n-1}x + C_n)$$
$$(\omega^n x^n + \omega^{n-1}C_1x^{n-1} + \ldots + \omega^2 C_{n-2}x^2 + \omega C_{n-1}x + C_n)$$
$$(\omega^{2n}x^n + \omega^{2n-2}C_1x^{n-1} + \ldots + \omega^4 C_{n-2}x^2 + \omega^2 C_{n-1}x + C_n)\ldots$$
$$\ldots(\omega^{(m-1)n}x^n + \omega^{(m-1)(n-1)}C_1x^{n-1} + \ldots + \omega^{(m-1)2}C_{n-2}x^2 + \omega^{(m-1)}C_{n-1}x + C_n) = 0 \text{ **)}$$

Potom *částečný* součin

$$C_1^i x^{(n-1)i}\, C_2^j x^{(n-2)j}\, C_3^k x^{(n-3)k}$$

rovnaje se

$$C_1^i\, C_2^j\, C_3^k\, x^{(n-1)i+(n-2)j+(n-3)k}$$

jen tehdy může se vyskytnouti ve *mnohočlenu* D_{2m}, když

$$(n-1)i + (n-2)j + (n-3)k = m(n-2),$$

ježto D_{2m} dle (2) jest *součinitelem mocniny* $x^{m(n-2)}$.

3. D_{3m} bylo by lze určiti opět *návodem* v *1. naznačeným*; však učiníme to kratčeji dle vzoru:

$$-D_{3m} = \Sigma x_0^m x_1^m x_2^m = \tfrac{1}{3}\left[(\Sigma x_0^m x_1^m - \Sigma x_0^{2m})\,\Sigma x_0^m + \Sigma x_0^{3m}\right] \text{***)} \tag{6}$$

**) Dosadíme-li

x_0,	x_1,	. . .,	x_{n-1},	stane se mnohočlen první roven 0;
$\omega^{m-1}x_0$,	$\omega^{m-1}x_1$,	. . .,	$\omega^{m-1}x_{n-1}$,	» » » druhý » 0;
$\omega^{m-2}x_0$,	$\omega^{m-2}x_1$,	. . .,	$\omega^{m-2}x_{n-1}$,	» » » třetí » 0;
⋮	⋮		⋮	⋮
ωx_0,	ωx_1,	. . .,	ωx_{n-1},	» » » m-tý » 0.

Jsou tedy

ωx_0,	$\omega^2 x_0$,	. . .,	$\omega^{m-2}x_0$,	$\omega^{m-1}x_0$,	x_0,
ωx_1,	$\omega^2 x_1$,	. . .,	$\omega^{m-2}x_1$,	$\omega^{m-1}x_1$,	x_1,
⋮	⋮		⋮	⋮	⋮
ωx_{n-1},	$\omega^2 x_{n-1}$,	. . .,	$\omega^{m-2}x_{n-1}$,	$\omega^{m-1}x_{n-1}$,	x_{n-1}

kořeny rovnice, jež vznikne provedeným násobením. Činí-li však zadost rovnici ωx_i, $\omega^2 x_i$, . . ., $\omega^{m-1}x_i$, x_i, lze také x_i^m za kořen *téže* pokládati.

***) $\Sigma\xi_0^2\,\Sigma\xi_0 = \Sigma\xi_0^3 + \Sigma\xi_0^2\xi_1$;
$\Sigma\xi_0\xi_1\Sigma\xi_0 = \Sigma\xi_0^2\xi_1 + 3\Sigma\xi_0\xi_1\xi_2$. Vylučme $\Sigma\xi_0^2\xi_1$!

Protože Σx_0^m, Σx_0^{2m}, $\Sigma x_0^m x_1^m$ již známe, zbývá toliko ustanoviti Σx_0^{3m} $(= \Sigma(x_0^3)^m)$, aby určen byl vzorec (6). Proto upravíme rovnici takto:

$$(x^n + C_3 x^{n-3} + C_6 x^{n-6} + \ldots) + (C_1 x^{n-1} + C_4 x^{n-4} + C_7 x^{n-7} + \ldots) + (C_2 x^{n-2} + C_5 x^{n-5} + C_8 x^{n-8} + \ldots) = 0.$$

Ať jest $n = 3u$; nebo $n = 3u + 1$, nebo $n = 3u + 2$, lze vždycky jeden z *uzávorkovaných mnohočlenů* označiti X, *jeden* xY, *jeden* x^2Z, kdež X, Y, Z jsou *celistvými funkcemi* veličiny x^3, z nichž *jedna*, po případě *dvě* se redukují na *pouhé dané součinitele*, když daná rovnice (1) jest *bikvadratická*, po případě *kubická*.

Protože pak dle známého vzoru lze položiti:

$$X^3 + x^3Y^3 + x^6Z^3 - 3x^3XYZ = 0$$

vychází nám bezprostředně rovnice *tvaru*:

$$x^{3n} + D''_3 x^{3n-3} + D''_6 x^{3n-6} + \ldots + D''_{3n-3} x^3 + C_n^3 = 0. \tag{7}$$

Nyní již snadno obdržíme Σx_0^{3m}, když

za $C_1 \ldots D''_3$,
„ $C_2 \ldots D''_6$,
„ $C_3 \ldots D''_9$

atd. ze (7) do vzorce (3) dosadíme.

Tím určen jest i *vzor* (6). —

4. Podobně si sjednáme

$$D_{4m} = \Sigma x_0^m x_1^m x_2^m x_3^m,$$

opatříce si na základě (5) rovnici, jejíž kořeny jsou bikvadráty kořenů dané rovnice (1):

$$x^{4n} + (-D'^2_2 + 2D'_4)x^{4n-4} + (-2D'_2D'_6 + D'^2_4 + 2D'_8)x^{4n-8} + \ldots + (-1)^n C_n^4 = 0. \tag{8}$$

Z rovnice (8) ustanovíme Σx_0^{4m} dle vzorce (3) položíce tam

za $C_1 \ldots (-D'^2_2 + 2D'_4)$.
„ $C_2 \ldots (-2D'_2D'_6 + D'^2_4 + 2D'_8)$
$\vdots \qquad \vdots$ atd.

a výsledek do (9) vedle známých již hodnot

$$\Sigma x_0^m,\ \Sigma x_0^{2m},\ \Sigma x_0^{3m},\ \Sigma x_0^m x_1^m,\ \Sigma x_0^m x_1^m x_2^m$$

dosadíme:

$$D_{4m} = \Sigma x_0^m x_1^m x_2^m x_3^m = \tfrac{1}{4}\left[(\Sigma x_0^m x_1^m x_2^m + \Sigma x_0^{3m})\,\Sigma x_0^m - \Sigma x_0^m x_1^m \Sigma x_0^{2m} - \Sigma x_0^{4m}\right]†) \quad (9)$$

— Je-li $n > 9$, určíme *ostatní* součinitele D_{hm}, dokud

$$h \leqq \frac{n+1}{2},$$

návodem v (1) naznačeným.

Při vyhledávání D_{hm} vypustíme *všecky* členy $C_1^i C_2^j C_3^k \ldots$, při nichž vzhledem ku *Pozn. I.*

$$(n-1)i + (n-2)j + (n-3)k + \ldots > m\,(n-h).$$

5. Součinitele $D_{(n-1)m}$, $D_{(n-2)m}$, ..., D_{hm} $\left(h > \frac{n+1}{2}\right)$ určíme s výhodou na základě rovnice s *převratnými* hodnotami kořenů. Za tou příčinou dělme rovnici (1) *prostým* jejím členem a upravme takto:

$$\left(\frac{1}{x}\right)^n + \frac{C_{n-1}}{C_n}\left(\frac{1}{x}\right)^{n-1} + \frac{C_{n-2}}{C_n}\left(\frac{1}{x}\right)^{n-2} + \ldots$$
$$+ \frac{C_1}{C_n}\cdot\frac{1}{x} + \frac{1}{C_n} = 0.$$

Podobně učiňme s rovnicí (2) a srovnejme obě:

$$\left(\frac{1}{x}\right)^{mn} + \frac{D_{(n-1)m}}{C_n^m}\left(\frac{1}{x}\right)^{m(n-1)} + \frac{D_{(n-2)m}}{C_n^m}\left(\frac{1}{x}\right)^{m(n-2)} + \ldots$$
$$+ \frac{D_m}{C_n^m}\left(\frac{1}{x}\right)^m + \frac{1}{C_n^m} = 0.$$

Potom je zřejmo, že ze vzorů (3), (4), (6), (9), ... vyplyne

$$D_{(n-1)m},\ D_{(n-2)m},\ D_{(n-3)m},\ D_{(n-4)m},\ \ldots$$

---

†) $\Sigma\xi_0\xi_1\Sigma\xi_0^2 = \Sigma\xi_0^3\xi_1 + \Sigma\xi_0^2\xi_1\xi_2$;
$\Sigma\xi_0^3\Sigma\xi_0 = \Sigma\xi_0^4 + \Sigma\xi_0^3\xi_1$;
$\Sigma\xi_0\xi_1\xi_2\Sigma\xi_0 = \Sigma\xi_0^2\xi_1\xi_2 + 4\Sigma\xi_0\xi_1\xi_2\xi_3$. Vylučme opět $\Sigma\xi_0^3\xi_1$ a $\Sigma\xi_0^2\xi_1\xi_2$!

když za

$$D_m \ldots \frac{D_{(n-1)m}}{C_n^m},\ \text{za}\ D_{2m} \ldots \frac{D_{(n-2)m}}{C_n^m},\ \text{za}\ D_{3m} \ldots \frac{D_{(n-3)m}}{C_n^m},$$

$$\text{za}\ D_{4m} \ldots \frac{D_{(n-4)m}}{C_n^m}$$

atd. a důsledně za

$$C_1 \ldots \frac{C_{n-1}}{C_n},\ \text{za}\ C_2 \ldots \frac{C_{n-2}}{C_n},\ \text{za}\ C_3 \ldots \frac{C_{n-3}}{C_n},\ \text{za}\ C_4 \ldots \frac{C_{n-4}}{C_n} \ldots$$

atd.

do nich dosadíme.

Příklad: *Ustanoviti rovnici, jejíž kořeny jsou pátými mocninami kořenů dané rovnice 5. stupně:*

$$x^5 + C_1x^4 + C_2x^3 + C_3x^2 + C_4x + C_5 = 0.$$

1. *Hledaná* rovnice bude míti *tvar*:

$$x^{25} + D_5x^{20} + D_{10}x^{15} + D_{15}x^{10} + D_{20}x^5 + C_5^5 = 0.$$

Dle (3) jest

$$-D_5 = \alpha_1 C_1^5 + C_2(\beta_1 C_1^3 + \beta_2 C_1 C_2) + C_3(\gamma_1 C_1^2 + \gamma_2 C_2) + \delta_1 C_1 C_4 + \varepsilon_1 C_5 = \Sigma x_0^5.$$

Dosadíme-li dle *a*), jest

$\alpha_1 = -1;$

dosadíme-li dle *b*), když

$p = 1, \quad 4\beta_1 + \beta_2 = 15;$

když

$p = 2, \quad 9\beta_1 + 2\beta_2 = 35;$ odtud $\beta_1 = 5,\ \beta_2 = -5;$

dosadíme-li dle *c*), když

$q = 1, \quad 3\gamma_1 + \gamma_2 = -10;$

když

$q = 2, \quad 16\gamma_1 + 5\gamma_2 = -55;$ odtud $\gamma_1 = -5,\ \gamma_2 = 5;$

dosadíme-li dle *d*),

$\delta_1 = 5;$

dosadíme-li dle *e*),

$\varepsilon_1 = -5.$

Potom jest

$$\Sigma x_0^5 = - C_1^5 + 5 (C_1^2 - C_2)(C_1 C_2 - C_3) + 5 (C_1 C_4 - C_5) \ldots \tag{10}$$

neboli

$$D_5 = C_1^5 - 5C_1^3 C_2 + 5C_1^2 C_3 + 5C_1 C_2^2 - 5C_1 C_4 - 5C_2 C_3 + 5C_5.$$

2. Dle (4) jest

$$D_{10} = \tfrac{1}{2} [D_5^2 - \Sigma x_0^{10}],$$

kdež

$$D_5^2 = (C_1^5 - 5C_1^3 C_2 + 5C_1^2 C_3 + 5C_1 C_2^2 - 5C_1 C_4 - 5C_2 C_3 + 5C_5)^2 \ldots \tag{11}$$

a dle (10) vzhledem ku (5) (kdež $C_6 = C_7 = C_8 = C_9 = C_{10} = \ldots = 0$):

$$\Sigma x_0^{10} = -(-C_1^2 + 2C_2)^5 + 5(2C_1^3 C_3 - C_1^2 C_2^2 - 2C_1^2 C_4 - 4C_1 C_2 C_3 + 2C_1 C_5 + 2C_2^3 + 2C_2 C_4 + C_3^2)(C_1^4 - 4C_1^2 C_2 + 2C_1 C_3 + 3C_2^2 - 2C_4) + 5(2C_1^2 C_3 C_5 - C_1^2 C_4^2 - 4C_2 C_3 C_5 + 2C_2 C_4^2 + C_5^2). \tag{12}$$

Dle Pozn. I. můžeme již vypustiti předem C_1^i, když

$$(n-1)i > m(n-2) \text{ t. j. } i > 3,$$

a $C_1^i C_2^j$, když

$$(n-1)i + (n-2)j > m(n-2) \text{ t. j. } 4i + 3j > 15;$$

vynecháme tedy v počtu:

$$C_1^{10},\ C_1^9,\ C_1^8,\ C_1^7,\ C_1^6,\ C_1^5,\ C_1^4;\ C_1^3 C_2^2,\ C_1^2 C_2^3 \ldots \tag{13}$$

Můžeme tudíž ještě *před* výpočtem vypustiti *první* člen v (11) a rovněž tak *první* člen *třetí* závorky ve (12), čímž zkrátí se počet o *15 členů*. Potlačíme-li dále dle (13) *při* provádění výkonů *nových 22 členů*, obdržíme:

$$D_{10} = -5C_1^3 C_2 C_5 - 5C_1^3 C_3 C_4 + 5C_1^2 C_2^2 C_4 + 5C_1^2 C_2 C_3^2 + 10C_1^2 C_3 C_5 + 5C_1^2 C_4^2 - 5C_1 C_2^3 C_3 + 10C_1 C_2^2 C_5 - 5C_1 C_2 C_3 C_4 - 5C_1 C_3^3 - 15C_1 C_4 C_5 + C_2^5 - 5C_2^3 C_4 + 5C_2^2 C_3^2 - 15C_2 C_3 C_5 + 5C_2 C_4^2 + 5C_3^2 C_4 + 10C_5^2.$$

3. D_{15} vypočteme, když do posledního výsledku dosadíme

$$\text{za } D_{10} \ldots \frac{D_{15}}{C_5^5} \text{ a}$$

$$\text{za } C_i \ldots \frac{C_{n-i}}{C_5} \; (C_0 = 1);$$

však dosazené hodnoty neposkytují členů spořádaných. Spořádáme-li, vychází:

$$\begin{aligned}D_{15} = {} & 5C_1^2C_3C_5^2 + 5C_1^2C_4^2C_5 + 5C_1C_2^2C_5^2 - 5C_1C_2C_3C_4C_5 \\ & - 5C_1C_2C_4^3 - 5C_1C_3^3C_5 + 5C_1C_3^2C_4^2 - 15C_1C_4C_5^2 - 5C_2^3C_4C_5 \\ & + 5C_2^2C_3^2C_5 + 5C_2^2C_3C_4^2 - 5C_2C_3^3C_4 - 15C_2C_3C_5^2 + 10C_2C_4^2C_5 \\ & + C_3^5 + 10C_3^2C_4C_5 - 5C_3C_4^3 + 10C_5^3.\end{aligned}$$

4. Konečně určíme i D_{20} ze vzorce (10), když

$$\text{za } D_5 \ldots \frac{D_{20}}{C_5^5} \text{ a za } C_i \ldots \frac{C_{n-i}}{C_5} \quad (C_0 = 1)$$

položíme. Spořádáme-li hned, jest:

$$\begin{aligned}D_{20} = {} & -5C_1C_4C_5^3 - 5C_2C_3C_5^3 + 5C_2C_4^2C_5^2 + 5C_3^2C_4C_5^2 - 5C_3C_4^3C_5 \\ & + C_4^5 + 5C_5^4.\end{aligned}$$

5. Dosadíme-li nalezené hodnoty D_5, D_{10}, D_{15}, D_{20} do hledané rovnice (2), jest úloha rozřešena

---

Poznámka II. Kdybychom hledali D_{10} návodem v 1. naznačeným, položili bychom vzhledem ku Pozn. I. a (13):

$$\begin{aligned}D_{10} = {} & \alpha_1 C_2^5 + C_3 (\beta_1 C_1^2 C_2 C_3 + \beta_2 C_1 C_2^3 + \beta_3 C_1 C_3^2 + \beta_4 C_2^2 C_3) \\ & + C_4 (\gamma_1 C_1^3 C_3 + \gamma_2 C_1^2 C_2^2 + \gamma_3 C_1^2 C_4 + \gamma_4 C_1 C_2 C_3 + \gamma_5 C_2^3 \\ & \qquad + \gamma_6 C_2 C_4 + \gamma_7 C_3^2) \\ & + C_5 (\delta_1 C_1^3 C_2 + \delta_2 C_1^2 C_3 + \delta_3 C_1 C_2^2 + \delta_4 C_1 C_4 + \delta_5 C_2 C_3 \\ & \qquad + \delta_6 C_5).\end{aligned}$$

Řešení. *a*) Položme základem

$$(x - 1)(x - l) = 0,$$

neboli

$$C_1 = -(l + 1),\ C_2 = l,\ C_3 = C_4 = C_5 = 0;\ \Sigma x_0^5 x_1^5 = l^5;$$

i jest

$$\alpha_1 = 1.$$

b) Položme

$$(x - 1)^2 (x - p) = 0,$$

t. j

$$C_1 = -(p+2),\ C_2 = 2p+1,\ C_3 = -p,\ C_4 = C_5 = 0,$$
$$\Sigma x_0^5 x_1^5 = 2p^5 + 1;\ p = 1,\ 2,\ 3,\ 4;$$

i bude

$$9\beta_1 + 27\beta_2 + \beta_3 + 3\beta_4 = -80,$$
$$80\beta_1 + 250\beta_2 + 8\beta_3 + 25\beta_4 = -765,$$
$$525\beta_1 + 1715\beta_2 + 45\beta_3 + 147\beta_4 = -5440,$$
$$1296\beta_1 + 4374\beta_2 + 96\beta_3 + 324\beta_4 = -14250;$$

odtud

$$\beta_1 = 5,\ \beta_2 = -5,\ \beta_3 = -5,\ \beta_4 = 5.$$

c) Položme

$$(x-1)^3 (x-q) = 0,$$

t. j.

$$C_1 = -(q+3), C_2 = 3q+3, C_3 = -(3q+1), C_4 = q,\ C_5 = 0;$$
$$\Sigma x_0^5 x_1^5 = 3q^5 + 3;$$

a zase

$$q = 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7;$$

i vyplyne ze 7 lineárných rovnic:

$$\gamma_1 = -5,\ \gamma_2 = 5,\ \gamma_3 = 5,\ \gamma_4 = -5,\ \gamma_5 = -5,\ \gamma_6 = 5,\ \gamma_7 = 5.$$

d) Položme

$$(x-1)^4 (x-r) = 0,$$

t. j.

$$C_1 = -(r+4),\ C_2 = 4r+6,\ C_3 = -(6r+4),\ C_4 = 4r+1,$$
$$C_5 = -r;\ \Sigma x_0^5 x_1^5 = 4r^5 + 6;$$

a za

$$r = 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6;$$

i obdržíme ze 6 rovnic:

$$\delta_1 = -5,\ \delta_2 = 10,\ \delta_3 = 10,\ \delta_4 = -15,\ \delta_5 = -15,\ \delta_6 = 10.$$

Patrně byl by zde výpočet *složitější.*
