Josef Žďárek

O křivosti řezů na rotačním kuželi a válci

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 43 (1914), No. 3-4, 465--473

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/109236

vnější bod podobnosti N' kruhů K a k ležeti na paprsku I_1S_1; leží však také na přímce J: průsek paprsku I_1S_1 a přímky $MG'm$ jest bodem N'. Chordála I, jež jest vnitřním paprskem podobnosti kružnic K a k, je zároveň vnitřním paprskem podobnosti kružnic k a k_1 a tedy dle věty o bodech podobnosti tří kruhů vnějším paprskem podobnosti kruhů K a k_1, takže prochází vnějším bodem podobnosti kruhů těchto. Podobné vztahy ke kružnicím k_2, k_3 mají i chordály II, III.

Přímka AG' jest isogonálně souměrna ku příčce AG, procházející bodem Gergonnovým G; podobně BG', CG' vzhledem ku BG, CG. Přímky AG', BG', CG', jsouce vnitřními osami podobnosti kruhů (K, k, k_1), (K, k, k_2), (K, k, k_3), obsahují vnitřní body podobnosti kruhů (K, k_1), po příp. (K, k_2), (K, k_3), což plyne z věty Mongeovy. Podobně přímky AN', BN', CN' jakožto vnější osy podobnosti oněch tří trojin kruhův, obsahují také vnější body podobnosti kruhů (K, k_1), (K, k_2), $K, k_3)$. Těchto vlastností lze mnohdy výhodně užíti ke konstrukci příček AG', ... CG', AN', ... CN' a tedy i ku přesnější konstrukci bodův G' a N'.

O křivosti řezů na rotačním kuželi a válci.

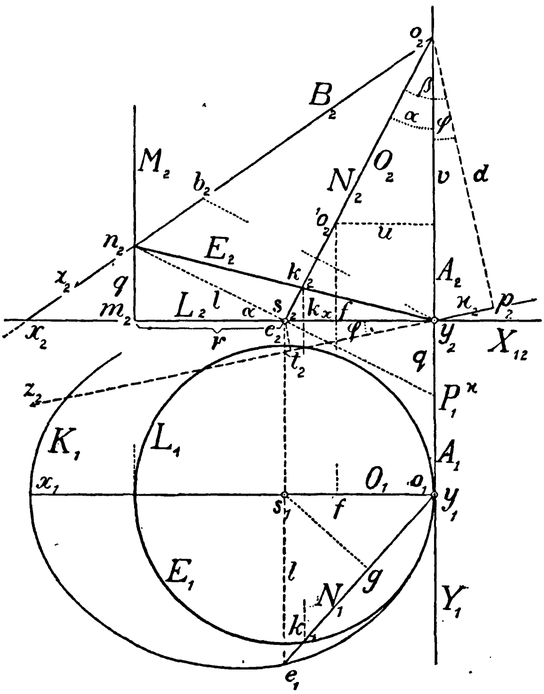
J. Žďárek, assistent techniky v Praze.

Vztahy, jež zde odvodíme, jsou jen specielním případem theorémů Dupinova a Meusnierova, platných pro obecné řezy všech ploch vůbec. Výsledků nabytých použijeme ke konstrukci tečen ve dvojném bodě proniku dvou ze tří ploch: rotačního válce, kužele a koule.

1. Budiž dán rotační kužel dotýkající se stranorysny podél přímky $A \perp \pi$. Půdorysným stopníkem s jeho osy O procházejž osa rotačního válce o podstavné kružnici L, dotýkajícího se stranorysny taktéž podél přímky A. Potom obě plochy, majíce ve stranorysně dvě soumezné přímky společny, budou se protínati ještě v ellipse E. Je-li o vrchol kužele, v jeho výška, 2α vrcholový úhel, K jeho kuželosečka půdorysná o poloosách a, b, excentricitě e, jednom ohnisku f, ${}^1o$ střed, u polo-

měr koule jemu vepsané, hledejme výraz pro poloměr $r = sy$ ($y \equiv A \times \pi$) plochy válcové. Z rovnic (obr. 1.) $2a = v\, tg\, 2\alpha$, $r = v\, tg\, \alpha$ plyne vyloučením $tg\, \alpha$:

$$r = a\left(1 - \frac{r^2}{v^2}\right)$$



Obr. 1.

a z podobných trojúhelníků $s_2y_2o_2$, $s_2f_2{}^1o_2$:

$$\frac{v}{r} = \frac{u}{r - u},$$

což dosazeno do předešlé rovnice dá:

$$r = \frac{2au - u^2}{a};$$

dále jest

$$u = \overline{y_2 f_2} = a - e = a - \sqrt{a^2 - b^2},$$

tedy

$$r = \frac{b^2}{a}.$$

Povšimněme si nyní průsečné ellipsy E; její průmět prvý $E_1 \equiv L$, druhý E_2 jest, vzhledem k souměrnosti obou ploch dle roviny (AO), úsečkou. Přímky obrysové B kužele, M válce určí jeden vrchol n křivky E; jsou-li x, m stopy přímek B, M, plyne, ježto $\triangle\, x_2 m_2 n_2 \backsim \triangle\, x_2 y_2 o_2$:

$$\frac{\overline{m_2 n_2}}{a - r} = \frac{v}{a}.$$

Označme $\overline{m_2 n_2} = q$ a dosaďme za a hodnotu plynoucí ze třetí z napsaných rovnic, máme

$$q = \frac{r^2}{v},$$

čili $q : r = r : v$, tedy trojúhelníky $n_2 m_2 s_2$, $s_2 y_2 o_2$ jsou si podobny a proto $\overline{n_2 s_2} \perp \overline{s_2 o_2}$; označme $\overline{s_2 n_2} = l$. Hledejme dále průsečný bod k oné površky N o stopě půdorysné e kužele, jejíž osový řez je kolmý k nárysně, tedy $N_2 \equiv O_2$ s plochou válcovou. Úsečky $\overline{sn}$, $\overline{se}$, jsouce poloměry téhož kruhového řezu kužele jsou stejné, tedy $\overline{s_1 e_1} = l$. S bodu s_1 spusťme kolmici $\overline{s_1 g}$ na $\overline{e_1 y_1}$, načež bude

$$\overline{g o_1} : \overline{o_1 s_1} = \overline{o_1 s_1} : \overline{e_1 o_1},$$

a ježto

$$\overline{g y_1} = \overline{g k_1},$$

tedy

$$\overline{e_1 o_1} : \overline{e_1 k_1} = (l^2 + r^2) : (l^2 - r^2) = \overline{e_2 k_2} : \overline{e_2 o_2}.$$

Je-li

$$k_2 k_x \perp X_{1,2},$$

vychází z podobných trojúhelníků $e_2 k_x k_2$, $e_2 y_2 o_2$ vzhledem k poslední úměře a k relaci

$$v = \frac{r^2}{q}$$

pro polohu bodu k výrazy:

$$\overline{k_2 k_x} = \frac{r^2 q}{l^2 + r^2}; \quad \overline{y_2 k_x} = \frac{2r^3}{l^2 + q^2}$$

a dělením jich

$$\frac{\overline{k_2 k_x}}{\overline{k_x y_2}} = \frac{q}{2r},$$

tedy bod k_2 leží na spojnici $\overline{n_2 y_2}$, která je tedy druhým průmětem ellipsy E; má tedy tato osu souřadnou Y za tečnu.

Libovolná rovina protíná obě plochy v kuželosečkách, kteréž se dotýkají v témže bodě přímky A roviny stranorysné, majíce v ní tak dva soumezné body společny. Další dva průsečné jejich body leží na křivce E, tedy na průsečnici roviny řezové s rovinou křivky E; prochází-li rovina bodem y, prochází jím také tato průsečnice, čímž jeden z druhé dvojiny průsečných bodů obou kuželoseček splyne s prvou dvojinou, obě řezové kuželosečky mají v y tři soumezné body společné čili oskulují se.

Vedeme-li posléze rovinu řezovou osou Y, splynou v bodě y všechny čtyři průsečné body obou řezů, kuželosečky slují hyperoskulační. Tento případ nastane, volíme-li půdorysnu za rovinu řezovou [1]). Dle toho kružnice L oskuluje ellipsu K ve vrcholu y její hlavní osy, bod s je středem oskulační kružnice (středem křivosti) o poloměru $r = \frac{b^2}{a}$ (poloměru křivosti).

Křivky K, L jsou — ježto je L průmětem ellipsy E — v perspektivné kollineaci pro bod y jako střed a tečnu Y jako osu kollineace. Za pomoci obdobné kollineace lze vyjádřiti pro vrchol vedlejší osy ellipsy poloměr křivosti výrazem obdobným $\frac{a^2}{b}$ [2]).

[1]) K usnadnění představy o těchto soumezných bodech pošiňme půdorysnu o nekonečně málo vzhůru a uvažujme její průsečíky s přímkami A, s ní soumeznou ^1A a s ellipsou E; podobné pošinutí poslouží názoru i v ostatních uvažovaných případech.

[2]) V. Jarolímek a B. Procházka: Deskriptivní geometrie pro vysoké školy technické, str. 152.

Veďme dále osou Y rovinu $\varkappa$ protínající kužel v ellipse K' o hlavní ose $\overline{yz} = 2a'$ a spusťme na ni s bodu o kolmici $\overline{op} = d$ svírající s osou kužele úhel β; sestrojme na B bod b tak, aby $\overline{yb} \perp 0$. Je-li e' excentricitou této ellipsy, jest (dle důkazu věty Quetelet-Dandelinovy) $\overline{zb} = 2e'$. V $\triangle\, byz$ jest

$$\sphericalangle\, byz = \beta, \quad \sphericalangle\, ybz = 90^0 + \alpha,$$

tedy, dle věty sinusové

$$a' : e' = \cos\alpha : \sin\beta$$

a odtud

$$(a' \pm e') : a' + (\cos\alpha \pm \sin\beta) : \cos\alpha.$$

Dále jest

$$2a' = \overline{z_2 p_2} - \overline{y_2 p_2} = d\, tg\, (\alpha + \beta) - d\, tg\, (\beta - \alpha).$$

Poloměr křivosti řezu K' ve vrcholu y bude

$$r' = \frac{b'^2}{a'} = \frac{(a' - e')\,(a' + e')}{a'}$$

a dosadíme-li sem hodnoty z posledních rovnic, máme

$$r' = d\, tg\, \alpha\ ^{1}).$$

Ježto je $\beta - \alpha = \varphi$ úhel přímek v, d a tedy úhel roviny $\varkappa$ s půdorysnou π, tedy $d = v \cos\varphi$
a

$$tg\, \alpha = \frac{r}{v},$$

jest

$$r' = r \cos\varphi,$$

t. j. hledaný střed křivosti s' obdržíme, spustíme-li s bodu s kolmici $\overline{ss'}$ na rovinu $\varkappa$. Kdyby se rovina $\varkappa$ otáčela kol osy Y, vyplňovaly by všecky takto sestrojené středy křivosti s' kružnici o průměru $\overline{sy}$ a kružnice křivosti vytvořovaly by kuželi vepsanou kouli mající kružnici křivosti L normálného řezu za kružnici hlavní.

Výsledek tento lze odvoditi jednodušeji. Ježto libovolná rovina procházející bodem y protíná kužel i válec v kuželo-

---

1) J. Doležal: Věta Dandelinova a její applikace, »Časopis« roč. XL. »Příloha« roč. XIX. v r. 1910-11.

sečkách, majících v tomto bodě tři soumezné body — tedy i jimi proloženou kružnici, zvanóu oskulační — společny, stačí, vyšetříme-li poloměry křivosti řezů rotačního válce, o němž říkáme, že v bodě y daný kužel oskuluje.

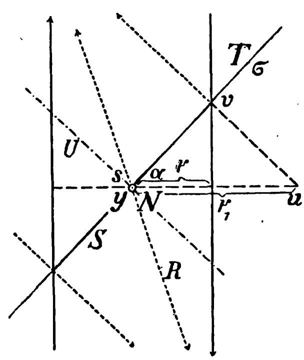
Rovina $\varkappa$ protíná válec v ellipse o hlavní poloose

$$\overline{ty} = \frac{r}{\cos\varphi}$$

vedlejší $= r$, tedy poloměr křivosti r' v bodě y jako vrcholu hlavní osy

$$r' = r\cos\varphi$$

jako dříve.



Obr. 2.

Stejné pravidlo platí pro řezy válce přímého o podstavě elliptické, procházející tečnou ve vrcholu podstavy, jak zcela obdobně vyvoditi lze.

Vyšetřujme dále vztah mezi poloměry křivosti všech řezů procházejících normálou N bodu y rot. válce o poloměru r pro tento bod [1]. Je-li rovina σ řezu S (obr. 2., N kolmé k nákresně) odchýlena od roviny kruhového řezu o úhel α, jsou poloosy řezu

$$\overline{sv} = \frac{r}{\cos\alpha}, \quad \overline{sy} = r,$$

[1]) Řezy takové nazývány zde normálné.

tedy pro bod y poloměr křivosti

$$r_1 = \frac{r}{\cos^2 \alpha}.$$

Abychom jej sestrojili, veďme $\overline{vu} \perp \sigma$ protínající rovinu kruhového řezu hlavního v bodě u, načež jest $\overline{su} = r_1$ hledaným poloměrem křivosti.

Rovina σ protínejž rovinu tečnou bodu y v přímce T. Vyšetřujme pro bod y poloměry křivosti všech řezů vedených touto tečnou. Ellipsou S veďme plochu válcovou o ose $U \perp \sigma$, protínající ještě daný válec v kuželosečce R o poloose $\overline{sy}$. Potom každá rovina tečnou T proložená, tedy dvěma soumeznými body křivky S procházející, protíná R taktéž v bodě y, tedy její křivky řezové s oběma válci mají v y tři splývající body, tedy se oskulují. Dle toho, co dříve bylo o řezech elliptického válce řečeno, obdržíme poloměr křivosti libovolného řezu jdoucího obecnou tečnou T rotačního válce, promítneme-li do jeho roviny poloměr křivosti řezu normálného, což ovšem platí i pro řezy rotačního kužele.

Chceme-li vyšetřiti poloměr křivosti libovolného bodu y řezové křivky roviny σ s rotačním kuželem, vyšetřme nejprve délku r úseku normály N bodu y mezi tímto bodem a osou plochy, a odchylku $90^0 - \alpha$ tečny T kužele v rovině σ ležící s površkou bodu y. Za pomocí délky r a úhlu α sestrojme poloměr křivosti

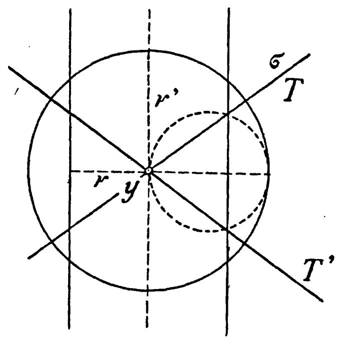
$$r' = \frac{r}{\cos^2 \alpha}$$

řezu normálného, jdoucího tečnou T; konstrukci provedeme jako v obr. 2., sestrojíce přeponu $\triangle$ pravoúhlého, je-li α jeho úhel, r k němu přilehlý úsek přepony. Tuto délku r' naneseme na normálu a promítneme ji pravoúhle do roviny σ, čímž hledaný poloměr křivosti nalezen.

2. Dotýkají-li se dvě plochy navzájem v bodě y, jest tento bod dvojným bodem pronikové křivky; tečny v tomto bodě nelze obvyklým způsobem jako průsečnice rovin tečných sestrojiti. Je-li T jednou z nich, potom každá jí vedená rovina protíná druhou větev taktéž v bodě y, řezy této roviny s oběma

plochami se tedy v bodě y oskulují. Naopak sestrojíme-li ony roviny, jichž řezy se oskulují, leží v nich tečny pronikové.

Jako nejjednodušší případ mějme plochu kulovou o poloměru r' a válcovou o poloměru r, v bodě y se dotýkající (obr. 3.). Vyhledejme onu rovinu σ normálou bodu y procházející, jež protíná válec v křivce mající v bodě y délku r' za poloměr křivosti. Dle obr. 2. sestrojme kružnici poloměrem $\frac{r'}{2}$ dotýkající se osy válce, ta protne jednu z obrysových přímek válce ve dvou bodech, jimiž již hledané tečny procházejí.



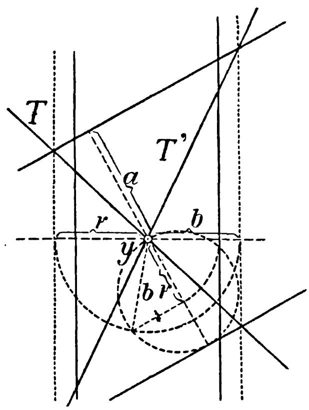
Obr. 3.

Jedná-li se o pronik plochy kulové a rotační plochy kuželové, nahraďme tuto oskulačním válcem rotačním pro bod y, majícím úsek normály mezi bodem y a tečnou za poloměr.

Máme-li posléze dva rotační válce a je-li r poloměr menšího, a většího (obr. 4), nahraďme prvý z nich válcem elliptickým, jehož kolmý řez má a za poloosu hlavní a kružnici řezovou prvého válce za oskulační kružnici ve vrcholu y hlavní osy. Poloosa vedlejší bude pak $b = \sqrt{a \cdot r}$, dle čehož ji snadno zobrazíme Tento nový válec protíná druhý daný válec ve dvou ellipsách, v jichž rovinách leží hledané tečny T, T'.

Všeobecně známe-li poloměr křivosti jakéhokoliv řezu plochy — ať kuželové nebo válcové — jdoucího dvojným bodem, umíme ji dle obou odvozených vztahů nahraditi válcem rotačním oskulačním; dle toho řešíme naši úlohu v případech ploch nerotačních.

Mimochodem budiž poznamenáno, že se pronikova křivka promítá ze svého dvojného bodu y kuželem 2. stupně, tedy jeho obě površky ležící ve společné rovině tečné jsou též hledanými tečnami.



Obr. 4.

3. Budiž y libovolným bodem pronikové křivky dvou ploch, na př. válcových; veďme její tečnou T v tomto bodě k oběma plochám roviny jdoucí jich normálami a na těchto sestrojme středy křivosti s, ${}^1s$ obou řezů. Ježto tyto obě normály stojí ku T kolmo, jest i spojnice $\overline{s\,{}^1s} \perp T$. Vedeme-li tečnou T rovinu $\omega \perp \overline{s\,{}^1s}$, kteráž tuto spojnici protíná v bodě s', jest s' společným kolmým průmětem bodů s i ${}^1s$ do roviny ω, oba řezy této roviny mají v y společnou kružnici oskulační, tedy rovina ω obsahuje v y tři soumezné body pronikové křivky a sluje *rovinou oskulační* bodu y; bod s' jest středem, přímka $\overline{s\,{}^1s}$ *osou křivosti* téhož bodu. (Konstrukce Hachetteova.) Umíme-li pak k ellipse, do níž se kružnice křivosti promítá, sestrojiti pro průmět bodu y kružnici křivosti, jest tato oskulační kružnicí i pro průmět pronikové křivky v témž bodě. [1])

[1]) V obr. 1. stůjž f_1, f_2 místo f, f a v obr. 4. na levo svorka při r buď zkrácena.