A. Lochmann

O jednoduché polární vlastnosti kuželosečky

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 50 (1921), No. 2-3, 196--199

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/109181

poněvadž řídící přímku známe aneb možno použiti věty Brianchonovy. Tak můžeme rýsovati osy ellipsy, dány-li jsou dva sdružené průměry. Délku os omezíme způsobem shora uvedeným.

Zvláštní případ Steinerovy paraboly jest ten, jest-li že bod B nekonečně blízko se přibliží k bodu A; pak spojnice AB přejde v tečnu. Parabola jest pak stanovena čtyřmi tečnami, t. j. tečnou, normálou a osami kuželosečky. Dotyčný bod tečny na normále n_a jakožto tečně paraboly jest mezní bod, jemuž se blíží průsečík normály n_a a normály k této nekonečně blízké; jest tedy středem křivosti kuželosečky pro bod A. Lze tedy dle předchozího buď užitím řídící přímky aneb větou Brianchovou snadno narýsovati střed křivosti kuželosečky v daném jejím bodě.

O jednoduché polární vlastnosti kuželosečky.

A. Lochmann.

Kuželosečka je určena pěti podmínkami. Je-li dán pól a polára jemu příslušná, jsou tím dány dvě podmínky; proto tři póly s polárami by dávaly šest podmínek, čímž by kuželosečka byla přeurčena. Z toho plyne, že poláry tří bodů a tři body musí býti vázány nějakým vztahem. Skutečně je tomu tak, jak v dalším je ukázáno.

Buďtež dány tři libovolné póly P_1 (x_1, y_1), P_2 (x_2, y_2), P_3 (x_3, y_3) kuželosečky a p_1, p_2, p_3 buďtež příslušné jich poláry.

Označme spojnici pólu P_1 (P_2 resp. P_3) s průsečíkem polár p_2p_3 (p_3p_1 resp. p_1p_2) m_1 (m_2 resp. m_3) a obdobně průsečík poláry p_1 (p_2 resp. p_3) se spojnicí pólů P_2P_3 (P_3P_1 resp. P_1P_2) M_1 (M_2 resp. M_3).

Platí pak věty:

I. *Přímky m_1, m_2, m_3 jdou jedním bodem L.*

II. *Body M_1, M_2, M_3 leží na jediné přímce l.*

Důkaz:

I. Rovnice kuželosečky buď dána ve tvaru vrcholovém:

$$K \equiv y^2 = 2px + qx^2.$$

Rovnice polár p_1, p_2, p_3 odvodíme z rovnice tečny dané kuželosečky pro dotyčný bod T (ξ, η).

Pišme rovnici kuželosečky ve tvaru

$$K \equiv q\left(x + \frac{p}{q}\right)^2 - y^2 = \frac{p^2}{q}.$$

Pak zní její rovnice tečny t pro dotyčný bod T (ξ, η):

$$t \equiv q\left(x + \frac{p}{q}\right)\left(\xi + \frac{p}{q}\right) - y\eta = \frac{p^2}{q}$$

aneb v jiné úpravě:

$$t \equiv x(p + q\xi) - y\eta + p\xi = 0.$$

Dosadíme-li za ξ, η souřadnice pólů P_1, P_2, P_3, obdržíme rovnice příslušných polár:

$$p_1 \equiv x(p + qx_1) - yy_1 + px_1 = 0$$

$$p_2 \equiv x(p + qx_2) - yy_2 + px_2 = 0$$

$$p_3 \equiv x(p + qx_3) - yy_3 + px_3 = 0.$$

Rovnice přímky m_1 jdoucí průsečíkem polár p_2. p_3 bude míti tvar

$$m_1 \equiv p_2 - \lambda p_3 = 0.$$

Přímka m_1 prochází však též pólem P_1 (x_1, y_1). Dosadíme-li proto do rovnice přímky m_1 za plynulé souřadnice x, y souřadnice pólu $P_1(x_1, y_1)$, obdržíme rovnici, z níž vypočteme neurčitý koëfficient λ:

$$\lambda = \frac{x_1(p + qx_2) - y_1y_2 + px_2}{x_1(p + qx_3) - y_1y_3 + px_3}.$$

Vložením λ do rovnice přímky m_1 dostaneme posléze rovnici přímky m_1 a zcela obdobně i rovnice přímek m_2, m_3:

$$m_1 \equiv a_1x + b_1y + c_1 = 0$$

$$m_2 \equiv a_2x + b_2y + c_2 = 0$$

$$m_3 \equiv a_3x + b_3x + c_3 = 0,$$

při čemž jest:

$$a_1 = p^2(x_3 - x_2) - py_1(y_3 - y_2) + qy_1(y_2x_3 - x_2y_3)$$

$$b_1 = -[px_1(y_2 - y_3) + p(x_3y_2 - x_2y_3) + qx_1(y_2x_3 - x_2y_3)]$$

$$c_1 = p[px_1(x_2 - x_3) + y_1(y_2x_3 - x_2y_3)].$$

Cyklickou záměnou obdržíme snadno:

$$a_2 = p^2(x_1 - x_3) - py_2(y_1 - y_3) + qy_2(y_3x_1 - x_3y_1)$$
$$b_2 = -[px_2(y_3 - y_1) + p(x_1y_3 - x_3y_1) + qx_2(y_3x_1 - x_3y_1)]$$
$$c_2 = p[px_2(x_3 - x_1) + y_2(y_3x_1 - x_3y_1)],$$

podobně:

$$a_3 = p^2(x_2 - x_1) - py_3(y_2 - y_1) + qy_3(y_1x_2 - x_1y_2)$$
$$b_3 = -[px_3(y_1 - y_2) + p(x_2y_1 - x_1y_2) + qx_3(y_1x_2 - x_1y_2)]$$
$$c_3 = p[px_3(x_1 - x_2) + y_3(y_1x_2 - x_1y_2)].$$

Ježto

$$a_1 + a_2 + a_3 = 0$$
$$b_1 + b_2 + b_3 = 0$$
$$c_1 + c_2 + c_3 = 0,$$

je též

$$m_1 + m_2 + m_3 \equiv (a_1 + a_2 + a_2) \, . \, x + (b_1 + b_2 + b_3) \, . \, y +$$
$$+ (c_1 + c_2 + c_3) \equiv x \, . \, 0 + y \, . \, 0 + 0$$

čili

$$m_1 + m_2 + m_3 \equiv 0.$$

Proto, jak bylo dokázati, procházejí přímky jedním bodem L.

II. Řešením rovnic

$$p_1 \equiv x(p + qx_1) - yy_1 + px_1 = 0$$

$$\overline{P_2P_3} \equiv y - y_2 - \frac{y_2 - y_3}{x_2 - x_3}(x - x_2 = 0$$

vypočteme souřadnice bodu M_1 (ξ_1, η_1) a zcela obdobně i souřadnice bodů M_2 (ξ_2, η_2), M_3 (ξ_3, η_3):

$$\xi_1 = \frac{a_1}{c_1}, \quad \eta_1 = \frac{b_1}{c_1},$$

$$\xi_2 = \frac{a_2}{c_2}, \quad \eta_2 = \frac{b_2}{c_2},$$

$$\xi_3 = \frac{a_3}{c_3}, \quad \eta_2 = \frac{b_3}{c_3},$$

při čemž jest:

$$a_1 = -y_1y_2x_3 + y_1y_3x_2 - px_1(x_2 - x_3)$$
$$b_1 = -px_1(y_2 - y_3) - (x_3y_2 - x_2y_3)(p + qx_1)$$
$$c_1 = -y_1(y_2 - y_3) + (p + qx_1)(x_2 - x_3);$$

cyklickou záměnou pak

$$a_2 = -y_2y_3x_1 + y_2y_1x_3 - px_2(x_3 - x_1)$$
$$b_2 = -px_2(y_3 - y_1) - (x_1y_3 - x_3y_1)(p + qx_2)$$
$$c_2 = -y_2(y_3 - y_1) + (p + qx_2)(x_3 - x_1)$$

a dále

$$a_3 = -y_3y_1x_2 + y_3y_2x_1 - px_3(x_1 - x_2)$$
$$b_3 = -px_3(y_1 - y_2) - (x_2y_1 - x_1y_2)(p + qx_3)$$
$$c_3 = -y_3(y_1 - y_2) + (p + qx_3)(x_1 - x_2).$$

Počítejme dvojnásobnou plochu $2\triangle$ trojúhelníku $M_1M_2M_3$; to můžeme učiniti buď podle známého vzorce (což ponechávám čtenáři) nebo jednodušeji užitím determinantu. Je totiž

$$2\triangle = D = \begin{vmatrix} \frac{a_1}{c_1} & \frac{b_1}{c_1} & 1 \\ \frac{a_2}{c_2} & \frac{b_2}{c_2} & 1 \\ \frac{a_3}{c_3} & \frac{b_3}{c_3} & 1 \end{vmatrix}.$$

Determinantu D lze dáti postupně tvary

$$D = \frac{1}{c_1c_2c_3}\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix},$$

dále

$$D = \frac{1}{c_1c_2c_3}\begin{vmatrix} a_1 + a_2 + a_3 & b_1 + b_2 + b_3 & c_1 + c_2 + c_3 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

a konečně $$D = \frac{1}{c_1c_2c_3}\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix},$$

t. j. $$D = \frac{1}{c_1c_2c_3} \cdot 0 = 0,$$

ježto — jak snadno se přesvědčíme — platí rovnice

$$a_1 + a_2 + a_3 = 0$$
$$b_1 + b_2 + b_3 = 0$$
$$c_1 + c_2 + c_3 = 0.$$

Ježto plocha $\triangle M_1M_2M_3$ rovná se nule, leží body M_1, M_2, M_3 na jedné přímce l, jak bylo dokázati.
