Antonín Libický

Pohyb hmotného bodu v poli gravitačním dle všeobecné theorie relativnosti

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 50 (1921), No. 2-3, 134--149

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/109177

Abychom mohli posouditi přesnost, s jakou jsme uvedené hodnoty stanovili, verifikujme vypočtenými číselnými hodnotami Barkhausenovu vnitřní rovnici lampy: dostáváme

$$SDR_i = 0{\cdot}989.$$

Od teoretické hodnoty ($SDR_i = 1$) liší se tento výsledek asi o 1%.

V Praze počátkem října 1920.

Pohyb hmotného bodu v poli gravitačním dle všeobecné theorie relativnosti.

Napsal ředitel *Ant. Libický*.

Theorie relativnosti, jak ji původně *Einstein* odvodil, založena byla na postulátu, že zákony fysikální platné v soustavě souřadnic **S**, v níž vyjádřeny jsou formou nejjednodušší, platí též pro soustavu **S'**, která se pohybuje vzhledem k **S** přímočárně a rovnoměrně Dle toho přísluší přímému pohybu rovnoměrnému jakási přednost před jinými pohyby, jako jsou pohyb kruhový, pohyb zrychlený a j. Okolnost ta byla patrně závadou této theorie, kterou se snažil *Einstein* odstraniti tím, že ji zvšeobecnil tak, aby platnost její vztahovala se k jakémukoli pohybu postupnému neb otáčecímu. Požadavku tomu se vyhoví, budou-li rovnice, jimiž vyjadřujeme zákony fysikální, kovariantní vzhledem k libovolné substituci souřadnic a nikoliv jen vzhledem k substituci Lorentzově*), jak tomu bylo dosavad. Novou tuto theorii nazval *Einstein všeobecnou* theorií relativnosti, na rozdíl od theorie původní, která sluje *specielní*.

O poli gravitačním, v němž pohyb hmotného útvaru se děje, předpokládá se ve všeobecné theorii, že jest zvláštním polem metrickým, jehož význačnou vlastností jest, že kvadra-

---

*) Substituce ta dána jest rovnicemi: $x' = \beta\,(x - v\,t)$, $y' = y$, $z' = z$, $t' = \beta\,(t - \frac{v}{c^2}\,x)$, kde $\beta = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$; viz můj čl. *„Kinematika theorie relativnosti“* v tomto Časopise roč. XLIII., pag. 213.

tická forma diferenciální tvaru $\sum\limits_{\mu\nu} g_{\mu\nu}\, dx_\mu\, dx_\nu$ (pro $\mu = 1, 2, 3, 4$, $\nu = 1, 2, 3, 4$) jest invariantní. Formou tou dána jest dvojmoc diferenciálu oblouku s přináležejícího křivce, jíž určen jest pohyb hmotného bodu v prostoru a v čase (Minkovského čáře světové); jest tudíž

$$\begin{aligned} ds^2 = {} & g_{11}\, dx_1^2 + g_{12}\, dx_1\, dx_2 + g_{13}\, dx_1\, dx_3 + g_{14}\, dx_1\, dx_4 \\ & + g_{21}\, dx_2\, dx_1 + g_{22}\, dx_2^2 + g_{23}\, dx_2\, dx_3 + g_{24}\, dx_2\, dx_4 \\ & + g_{31}\, dx_3\, dx_1 + g_{32}\, dx_3\, dx_2 + g_{33}\, dx_3^2 + g_{34}\, dx_3\, dx_4 \\ & + g_{41}\, dx_4\, dx_1 + g_{42}\, dx_4\, dx_2 + g_{43}\, dx_4\, dx_3 + g_{44}\, d^2x_4 \end{aligned}$$

čili kratčeji $ds^2 = \sum\limits_{\mu\nu} g_{\mu\nu}\, dx_\mu\, dx_\nu$.*) (1)

Ve výraze tom značí x_1, x_2, x_3, x_4 souřadnice hmotného bodu v prostoru čtyřrozměrném; z nich x_1, x_2, x_3 jsou souřadnice prostorové, které stanoví polohu bodu v prostoru a x_4 souřadnice časová, která má hodnotu $c\,t$, je-li c rychlost světla, jíž položíme rovnou jednotce, a t doba v *sec.*

Veličiny $g_{\mu\nu}$ jež můžeme nazvati *gravitačními potenciály*, jsou funkcemi souřadnic x_1, x_2, x_3, x_4; jimi vyjádřen jest vliv pole gravitačního na pohyb hmotného bodu. Platí o nich podmínka $g_{\mu\nu} = g_{\mu\nu}$; různých těchto veličin jest tudíž 10.**)

Hmotu *M* která vytvořuje pole gravitační, myslíme si soustředěnou v počátku soustavy souřadnic.

V specielní theorii relativnosti jest výraz ds^2 jednodušší, totiž $ds^2 = -dx_1^2 - dx_2^2 - dx_3^2 + dx_4^2$.***) (1a)

*) Výraz ten pro ds^2 vyskytuje se v neeuklidovské geometrii *Riemann-ově* (viz jeho pojednání: „Über die Hypothesen, welche der Geometrie zu Grunde liegen"); svět jest tudíž dle všeobecné theorie relativnosti čtyřrozměrné kontinuum, v němž stav, rozpoložení a pohyb hmoty stanoví pole metrické, vyjádřené svrchu uvedenou kvadratickou formou.

**) Soubor veličin $g_{\mu\nu}$ tvoří *tensor stupně druhého* (v tomto případě *souměrný*); ježto tyto veličiny se transformují dle rovnic

$$x_1 = a_{11} x'_1 + a_{12} x'_2 + a_{13} x'_3 + a_{14} x'_4 \text{ atd., kde } a_{11} = \frac{\partial x_1}{\partial x'_1} \ldots,$$

tudíž $dx_1 = \dfrac{\partial x_1}{\partial x'_1} dx'_1 + \dfrac{\partial x_1}{\partial x'_2} dx'_2 + \dfrac{\partial x_1}{\partial x'_3} dx'_3 + \dfrac{\partial x_1}{\partial x'_4} dx'_4$ atd.,

zove se tensor ten *kovariantní*.

***) „Kinematika theorie relativnosti", Čas. m. a f. XLIII., pag. 600, vzorec (28c), v němž za čas vlastní lze položiti oblouk s čáry světové a $x = x_1$, $y = x_2$, $z = x_3$.

Jsou tedy v theorii té veličiny $g_{\mu\nu}$ stálé, na souřadnicích nezávislé; hodnoty jejich jsou $g_{11} = g_{22} = g_{33} = -1$, $g_{44} = +1$ a ostatní rovny nule.

Odvodíme nyní diferenciální rovnice pohybu hmotného bodu v poli gravitačním *), vycházejíce od zákona pohybu, který *J. Hertz* učinil základním zákonem své proslulé mechaniky. Zákon ten zní **)

„Systema omne liberum perseverare in statu suo quiescendi vel movendi uniformiter in directissimam".

Tudíž soustava volná pohybuje se v dráze nejpřímější; dráha ta jest pak dána čarou geodetickou.

Má-li se bod hmotný pohybovati na křivce geodetické, jest nutná a postačující analytická podmínka, aby variace integralu prvku ds, jehož meze jsou dva body A_1 a A_2 čáry světové, dané oblouky s_1 a s_2, se rovnala nule. Jest tedy

rovnice čáry geodetické $$\delta \int_{s_1}^{s_2} ds = 0. \qquad (2)$$

Provedeme-li variaci obou stran rovnice (1) uvážíce, že veličiny $g_{\mu\nu}$ jsou funkcemi souřadnic, obdržíme

$$2\,ds\,\delta\,ds = \sum_{\mu\nu}\left(\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x_1}\delta x_1 + \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x_2}\delta x_2 + \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x_3}\delta x_3 + \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x_4}dx_4\right)dx_\mu dx_\nu$$
$$+ \sum g_{\mu\nu}\,(dx_\mu\,\delta\,dx_\nu + dx_\nu\,\delta\,dx_\mu),$$

čili píšeme-li na pravé straně za první součet kratčeji

$$\sum_{\mu\nu\sigma}\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x_\sigma}\delta x_\sigma\,dx_\mu\,dx_\nu \text{ (kde } \sigma = 1, 2, 3, 4) \text{ též}$$

$$2\,ds\,\delta\,ds = \sum_{\mu\nu\sigma}\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x_\sigma}\delta x_\sigma\,dx_\mu\,dx_\nu + \sum_{\mu\nu} g_{\mu\nu}\,(dx_\mu\,\delta\,dx_\nu +$$
$$+ dx_\nu\,\delta\,dx_\mu).$$

---

*) Odvození toho jest do jisté míry odchylné od odvození, které podává *Einstein* ve svých pojednáních: „Die formale Grundlage der allgemeinen Relativitätstheorie" Sitzungsber. der kgl. preussischen Akademie der Wissensch." pag. 1044, a „Die Grundlage der allgemeinen Relativitätstheorie", Leipzig 1916, pag. 29.

**) *H. Hertz*: Die Prinzipien der Mechanik", 1894, pag. 162.

Druhý součet přetvoříme takto: Ježto jest dovoleno v druhém členu na pravé straně zaměniti indexy μ a ν (majíť oba hodnoty 1, 2, 3, 4), nabudeme pro tento člen výrazu $\sum\limits_{\nu\mu} g_{\nu\mu}\, dx_\mu\, \delta\, dx_\nu$. Poněvadž $g_{\nu\mu} = g_{\mu\nu}$, bude

$$\sum_{\mu\nu} g_{\mu\nu}\,(dx_\mu\, \delta\, dx_\nu + dx_\nu\, \delta\, dx_\mu) = 2 \sum_{\mu\nu} g_{\mu\nu}\, dx_\mu\, \delta\, dx_\nu,$$

kde $\delta\, dx_\nu = d\,\delta x_\nu$; dosadíme-li tuto hodnotu do posledního vzorce pro $ds\,\delta\, ds$, dostaneme

$$ds\,\delta\, ds = \tfrac{1}{2} \sum_{\mu\nu\sigma} \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x_\sigma}\, dx_\mu\, dx_\nu\, \delta x_\sigma + \sum_{\mu\nu} g_{\mu\nu}\, dx_\mu\, d\,\delta x_\nu.$$

Substitucí do rovnice (2) vychází

$$\delta \int_{s_1}^{s_2} ds = \int_{s_1}^{s_2} \delta\, ds = \int_{s_1}^{s_2} \left[\tfrac{1}{2} \sum_{\mu\nu\sigma} \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x_\sigma} \frac{dx_\mu}{ds}\, dx_\nu\, \delta x_\sigma + \right.$$

$$\left. + \sum_{\mu\nu} g_{\mu\nu} \frac{dx_\mu}{ds}\, d\,\delta x_\nu \right] = 0. \qquad (m)$$

Druhý integrál na pravé straně přeměníme, integrujeme-li po částech; poněvadž $d\left(g_{\mu\nu} \frac{dx_\mu}{ds}\, \delta x_\nu\right) = g_{\mu\nu} \frac{dx_\mu}{ds}\, d\,\delta x_\nu + \delta x_\nu\, d\left(g_{\mu\nu} \frac{dx_\mu}{ds}\right)$, jest

$$\int_{s_1}^{s_2} \sum_{\mu\nu} g_{\mu\nu} \frac{dx_\mu}{ds}\, d\,\delta x_\nu = \Big|_{s_1}^{s_2} \sum_{\mu\nu} g_{\mu\nu} \frac{dx_\mu}{ds}\, \delta x_\nu - \int_{s_1}^{s_2} \sum_{\mu\nu} d\left(g_{\mu\nu} \frac{dx_\mu}{ds}\right) \delta x_\nu.$$

Ježto v prvém členu na pravé straně pro mezní hodnoty s_1 a s_2 variace souřadnic x_ν se rovnají nule, bude

$$\int_{s_1}^{s_2} \sum_{\mu\nu} g_{\mu\nu} \frac{dx_\mu}{ds}\, d\,\delta x = - \int_{s_1}^{s_2} \sum_{\mu\nu} d\left(g_{\mu\nu} \frac{dx_\mu}{ds}\right) \delta x_\nu$$

a dle rovnice (m)

$$\int_{s_1}^{s_2} \left[\tfrac{1}{2} \sum_{\mu\nu\sigma} \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x_\sigma} \frac{dx_\mu}{ds} \frac{dx_\nu}{ds}\, \delta x_\sigma - \sum_{\mu\nu} \frac{d\left(g_{\mu\nu} \frac{dx_\mu}{ds}\right)}{ds}\, \delta x_\nu \right] ds = 0.$$

Diferencujme nyní v druhém členu součin $g_{\mu\nu}\dfrac{dg_\mu}{ds}$; tím obdržíme zaměnivše ještě znaménka

$$\int\limits_{s_1}^{s_2}\left[\sum_{\mu\nu}\left(g_{\mu\nu}\frac{d^2x_\mu}{ds^2}+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\frac{dg_{\mu\nu}}{ds}\frac{dx_\mu}{ds}\right)\delta x_\nu-\tfrac{1}{2}\sum_{\mu\nu\sigma}\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x_\sigma}\frac{dx_\mu}{ds}\frac{dx_\nu}{ds}\delta x_\sigma\right]ds=0.$$

Ve druhém členu jest

$$\frac{dg_{\mu\nu}}{ds}=\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x_1}\frac{dx_1}{ds}+\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x_2}\frac{dx_2}{ds}+\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x_3}\frac{dx_3}{ds}+\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x_4}\frac{dx_4}{ds}$$

$$=\sum_\sigma\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x_\sigma}\frac{dx_\sigma}{ds};$$

pročež, kladouce ještě v δx_ν za ν index σ, obdržíme

$$\int\limits_{s_1}^{s_2}\left[\sum_{\mu\nu\sigma}\left(g_{\mu\nu}\frac{d^2x_\mu}{ds^2}+\right.\right.$$

$$\left.\left.\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x_\sigma}\frac{dx_\sigma}{ds}\frac{dx_\mu}{ds}-\tfrac{1}{2}\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x_\sigma}\frac{dx_\mu}{ds}\frac{dx_\nu}{ds}\right)\right]\delta x_\sigma\,ds=0. \qquad (n)$$

Výraz na levé straně upravíme na soumèrnější tvar takto: Rozvrhněme druhý člen dle rovnice

$$\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x_\sigma}\frac{dx_\sigma}{ds}\frac{dx_\mu}{ds}=\tfrac{1}{2}\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x_\sigma}\frac{dx_\sigma}{ds}\frac{dx_\mu}{ds}+\tfrac{1}{2}\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x_\sigma}\frac{dx_\sigma}{ds}\frac{dx_\mu}{ds};$$

pišme na pravé straně za $\dfrac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x_\sigma}$ v prvním sčítanci $\dfrac{\partial g_{\mu\sigma}}{\partial x_\nu}$ a ve druhém $\dfrac{\partial g_{\nu\sigma}}{\partial x_\mu}$, pak vyměňme tam v $\dfrac{dx_\sigma}{ds}$ index σ za ν; i bude

$$\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x_\sigma}\frac{dx_\sigma}{ds}\frac{dx_\mu}{ds}=\tfrac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{\mu\sigma}}{\partial x_\nu}+\frac{\partial g_{\nu\sigma}}{\partial x_\mu}\right)\frac{dx_\mu}{ds}\frac{dx_\nu}{ds}.$$

Substitucí tohoto výrazu do rovnice (n) nabudeme

$$\int\limits_{s_1}^{s_2}\sum_{\mu\nu\sigma}\left[g_{\mu\nu}\frac{d^2x_\mu}{ds^2}+\right.$$

$$\left.+\tfrac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{\mu\sigma}}{\partial x_\nu}+\frac{\partial g_{\nu\sigma}}{\partial x_\mu}-\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x_\sigma}\right)\frac{dx_\mu}{ds}\frac{dx_\nu}{ds}\right]\delta x_\sigma\,ds=0.$$

Rovnice ta platí pro jakékoli δx_σ; tomu se vyhoví, jestliže

$$\sum_{\mu\nu\sigma}\left[g_{\mu\nu}\frac{d^2x_\mu}{ds^2}+\tfrac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{\mu\sigma}}{\partial x_\nu}+\frac{\partial g_{\nu\sigma}}{\partial x_\mu}-\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x_\sigma}\right)\frac{dx_\mu}{ds}\frac{dx_\nu}{ds}\right]=0.$$

V rovnici té výraz $\frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{\mu\sigma}}{dx_\nu}+\frac{\partial g_{\nu\sigma}}{\partial x_\mu}-\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x_\sigma}\right)$ jest známý *Christoffelův* symbol prvního druhu (trojindexový), za nějž píšeme $\begin{bmatrix}\mu\ \nu\\ \sigma\end{bmatrix}$; tím se poslední rovnice mění ve

$$\sum_{\mu\nu\sigma}\left(g_{\mu\nu}\frac{d^2x_\mu}{ds^2}+\begin{bmatrix}\mu\ \nu\\ \sigma\end{bmatrix}\frac{dx_\mu}{ds}\frac{dx_\nu}{ds}\right)=0, \qquad (3)$$

což jest hledaná rovnice čáry geodetické.

Rovnici té lze dáti ještě jiný tvar. Utvořme determinant

$$g=\begin{vmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} & g_{14}\\ g_{21} & g_{22} & g_{23} & g_{24}\\ g_{31} & g_{32} & g_{33} & g_{34}\\ g_{41} & g_{42} & g_{43} & g_{44}\end{vmatrix}$$

a označme $g^{\mu\nu}$ podíl, který obdržíme, dělíme-li podřízený determinant, příslušný k prvku $g_{\mu\nu}$, determinantem g. I jest zřejmo, že $g^{\mu\nu}=g^{\nu\mu}$.*)

Násobme rovnici (3) po řadě veličinami g^{11}, g^{12}, g^{13}, g^{14} a sečtěme takto vzniklé čtyři rovnice. Z nauky o determinantech jest známo, že $\sum_\tau g_{\mu\tau}g^{\nu\tau}$ se rovná 1, je-li $\mu=\nu$, a rovná se nulle, jestliže $\mu \neq \nu$, čili že

$$\sum_\tau g_{\mu\tau}g^{\nu\tau}=\delta^\nu_\mu, \qquad (4)$$

*) Veličiny $g^{\mu\nu}$ tvoří tensor druhého stupně, zvaný *kontravariantním*. Z transformačních rovnic $x_1=a_{11}x'_1+a_{12}x'_2+a_{13}x'_3+a_{14}x'_4$ a d. plyne totiž $x'_1=b_{11}x_1+b_{12}x_2+b_{13}x_3+b_{14}x_4$ atd., kde $b_{11}=\frac{\Delta_{11}}{\Delta}$, $b_{12}=\frac{\Delta_{12}}{\Delta}$ . . (tedy téhož tvaru jako veličiny $g^{\mu\nu}$), značí-li Δ determinant koefficientů $a_{\mu\nu}$ a $\Delta_{\mu\nu}$ podřízený determinant k prvku $a_{\mu\nu}$. Jest pak též $b_{11}=\frac{\partial x'_1}{\partial x_1}$, $b_{12}=\frac{\partial x'_1}{\partial x_2}$ ..., pročež $dx'_1=\frac{\partial x'_{11}}{\partial x_1}dx_1+\frac{\partial x'_{12}}{\partial x_2}dx_2+\frac{\partial x'_{13}}{\partial x_3}dx_3+\frac{\partial x'_{14}}{\partial x_4}dx_4$ atd., což jest podmínka, aby tensor byl kontravariantním.

kde $\delta^{\nu}_{\mu} = \begin{cases} 1 \text{ pro } \mu = \nu \\ 0 \text{ pro } \mu \neq \nu \end{cases}$ **); užijeme-li této věty, zjednáme si snadno z utvořeného součtu rovnici

$$\frac{d^2 x_1}{ds^2} + \sum_{\mu\nu\sigma} g^{1\sigma} \begin{bmatrix} \mu\nu \\ \sigma \end{bmatrix} \frac{dx_\mu}{ds} \frac{dx_\nu}{ds} = 0.$$

A podobně, násobíme-li (3) po řadě veličinami g^{21}, g^{22}, g^{23}, g^{24} a sečteme-li; pak vzhledem k (4) obdržíme

$$\frac{d^2 x_2}{ds^2} + \sum_{\mu\nu\sigma} g^{2\sigma} \begin{bmatrix} \mu\nu \\ \sigma \end{bmatrix} \frac{dx_\mu}{ds} \frac{dx_\nu}{ds} = 0.$$

Týmž způsobem odvodíme ještě další dvě obdobné rovnice; všechny čtyři můžeme pak shrnouti v jedinou (o šestnácti sčítancích), totiž

$$\frac{d^2 x_i}{ds^2} + \sum_{\mu\nu\sigma} g^{i\sigma} \begin{bmatrix} \mu\nu \\ \sigma \end{bmatrix} \frac{dx_\mu}{ds} \frac{dx_\nu}{ds} = 0 \quad (i = 1, 2, 3, 4).$$

Výraz $\sum_{\sigma} g^{i\sigma} \begin{bmatrix} \mu\nu \\ \sigma \end{bmatrix}$ ve druhém členu jest *Christoffelův* symbol druhého druhu, který se značí $\begin{Bmatrix} \mu\nu \\ i \end{Bmatrix}$. Užijeme však místo něho vhodnějšího označení *Einsteinova* $-\Gamma^{\sigma}_{\mu\nu}$, pro něž platí

$$\Gamma^{i}_{\mu\nu} = -\begin{Bmatrix} \mu\nu \\ i \end{Bmatrix} = -\sum_{\sigma} g^{i\sigma} \begin{bmatrix} \mu\nu \\ \sigma \end{bmatrix} = -\tfrac{1}{2} \sum_{\sigma} g^{i\sigma} \left(\frac{\partial g_{\mu\sigma}}{\partial x_\nu} + \frac{\partial g_{\nu\sigma}}{\partial x_\mu} - \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x_\sigma} \right); \quad (5)$$

pak obdržíme rovnice geodetické čáry v konečném tvaru

$$\frac{d^2 x_i}{ds^2} = \sum_{\mu\nu} \Gamma^{i}_{\mu\nu} \frac{dx_\mu}{ds} \frac{dx_\nu}{ds}. \quad (6)$$

Z těchto rovnic plynou čtyři rovnice pohybu hmotného bodu, násobíme-li je hmotou m_0 bodu (je-li v klidu) a píšeme-li místo oblouku

**) Veličina δ^{ν}_{μ} jest *specielní* tensor tvaru

$$\begin{matrix} -0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & +1 \end{matrix}$$

s *Minkowského* čas vlastní τ,*) tím ustanovíme

$$m_0 \frac{d^2 x_i}{d\tau^2} = m_0 \sum_{\mu\nu} \Gamma^i_{\mu\nu} \frac{dx_\mu}{d\tau} \frac{dx_\nu}{d\tau}. \tag{7}$$

Analogicky k známým rovnicím mechaniky Newtonovy $m \frac{d^2 x}{dt^2} = X$, $m \frac{d^2 y}{dt^2} = Y$, $m \frac{d^2 z}{dt^2} = Z$ můžeme výrazy na pravé straně této rovnice pokládati za složky jakési síly P, které jsou dány vzorci

$$P_i = m_0 \sum_{\mu\nu} \Gamma^i_{\mu\nu} \frac{dx_\mu}{d\tau} \frac{dx_\nu}{d\tau}.\text{**)} \tag{8}$$

Veličiny $\Gamma^i_{\mu\nu}$ můžeme zváti *složkami pole gravitačního*; patrně jest vzhledem k $g_{\mu\nu} = g_{\nu\mu}$ a $g^{\mu\nu} = g^{\nu\mu}$ též $\Gamma^i_{\mu\nu} = \Gamma^i_{\nu\mu}$. Tudíž různých složek těch jest 40.

Jde nyní o integraci rovnic (6); tu lze provésti jen pro některé případy zvláštní, jež však jsou důležité, když totiž pole gravitační vyhovuje jistým podmínkám.

I. Především obdržíme pro specielní theorii relativnosti,***) v níž platí pro $g_{\mu\nu}$ výše uvedené hodnoty ($g_{11} = g_{22} = g_{33} = -1$, $g_{44} = +1$, ostatní $g_{\mu\nu} = 0$), tudíž všechny $\Gamma^i_{\mu\nu} = 0$, rovnici

$$m_0 \frac{d^2 x_i}{d\tau^2} = 0,$$

t. j. v této theorii jest pohyb hmotného bodu v poli gravitačním přímočarý a rovnoměrně zrychlený.

II. Přecházejíce nyní k přesnější aproximaci. předpokládejme:

1 že veličiny $g_{\mu\nu}$ liší se od hodnot specielní theorie relativnosti jen o tak malé veličiny $\gamma_{\mu\nu}$ (jež jsou funkcemi souřadnic), že lze druhou i každou vyšší mocninu jejich vynechati.

---

*) »Kinematika theorie relativnosti«, roč. XLIII., pag. 600.

**) Tato síla jest obdobou síle ponderomotorické v poli elektrickém; dle theorie relativnosti také síla odstředivá a síla *Coriolisova* mají původ svůj v poli gravitačním. Viz »*H. Weyl* Raum-Zeit-Materie« pag. 177 a násl.

***) Podotýká se, že i ve všeobecné theorii relativnosti platí pro malé prostory přibližně tato specielní theorie.

Položme tedy

$$g_{\mu\nu} = -\delta^{\nu}_{\mu} - \gamma_{\mu\nu}, \quad g_{44} = 1 - \gamma_{44}, \tag{9}$$

kde opět $\delta^{\nu}_{\mu} = 1$ neb 0 dle toho, je-li $\mu = \nu$ neb $\mu \neq \nu$.

Vypočítáme snadno, že v tomto případu determinant g veličin $g_{\mu\nu}$ jest roven $-1-(\gamma_{11}+\gamma_{22}+\gamma_{33}+\gamma_{44})$. Abychom obdrželi pro tento determinant hodnotu -1, čímž docílíme značného zjednodušení,*) položme ještě $\gamma_{11}+\gamma_{22}+\gamma_{33}+\gamma_{44}=0$.

Pak plynou pro veličiny $g^{\mu\nu}$ (podřízené determinanty dělené g) tyto výrazy:

$g^{11} = -1 + \gamma_{11}$, $g^{22} = -1 + \gamma_{22}$ atd., $g^{12} = \gamma_{12}$, $g^{13} = \gamma_{13}$ atd., obecně

$$g^{\mu\nu} = -\delta^{\nu}_{\mu} + \gamma_{\mu\nu} \quad (\text{pro } \mu = 1,2,3;\ \nu = 1,2,3) \tag{10}$$

a konečně

$$g_{44} = 1 - \gamma_{44}. \tag{10a}$$

2. O poli gravitačním stanovme dále podmínku, že je středově souměrné, t. j. veličiny $g_{\mu\nu}$ mají touž hodnotu v bodech (x_1, x_2, x_3) a $(-x_1, -x_2, -x_3)$; aby tomu bylo vyhověno, položme dle *Einsteina* **)

$$\begin{array}{llll}
\gamma_{11} = \dfrac{\alpha x_1^2}{r^3}, & \gamma_{12} = \dfrac{\alpha x_1 x_2}{r^3}, & \gamma_{13} = \dfrac{\alpha x_1 x_3}{r^3}, & \gamma_{14} = 0, \\
\gamma_{21} = \dfrac{\alpha x_2 x_1}{r^3}, & \gamma_{22} = \dfrac{\alpha x_2^2}{r^3}, & \gamma_{23} = \dfrac{\alpha x_2 x_3}{r^3}, & \gamma_{24} = 0, \\
\gamma_{31} = \dfrac{\alpha x_3 x_1}{r^3}, & \gamma_{32} = \dfrac{\alpha x_3 x_2}{r^3}, & \gamma_{33} = \dfrac{\alpha x_3^2}{r^3}, & \gamma_{34} = 0, \\
\gamma_{41} = 0, & \gamma_{42} = 0, & \gamma_{43} = 0, & \gamma_{44} = \alpha / r,
\end{array} \tag{11}$$

pročež bude dle (9) obecně

$$g_{\mu\nu} = -\delta^{\nu}_{\mu} - \frac{\alpha x_\mu x_\nu}{r^3} \begin{pmatrix} \text{pro } \mu = 1,2,3, \\ \nu = 1,2,3 \end{pmatrix}, \tag{9a}$$

$$g_{\mu 4} = 0, \quad g_{\nu 4} = 0, \quad g_{44} = 1 - \frac{\alpha}{r};$$

ve výrazech těch značí $r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$ a α konstantu závislou na hmotě M, vytvořující pole gravitační, jejíž význam

---

*) *Einstein* uvád ještě jiné důvody, o nichž nelze se tuto šířiti, pro podmínku $g = -1$ (vlastně $g = -c^2$, kde $c = 1$).

**) »Erklärung der Perihelbewegung des Merkurs aus der allgemeinen Relativitätstheorie«, Sitzungsb. der kg. preuss. Akademie des Wissenschaften, roč. 47 (1915), pag. 831.

poznáme později. Jest zřejmo, že pro $r = \infty$ všechna $\gamma_{\mu\nu}$ se rovnají nule, tudíž platí v nekonečnu specielní theorie relativnosti.

3. Konečně předpokládejme, že rychlost hmotného bodu v jest malá vzhledem k rychlosti světla c, kterou klademe rovnou 1; podmínce té vyhovuje se ve velkém počtu případů, jde-li o rychlosti nejčastěji se vyskytující. Pak jsou také složky této rychlosti $\frac{dx_1}{d\tau}$, $\frac{dx_2}{d\tau}$, $\frac{dx_3}{d\tau}$ veličiny malé; i netřeba přihlížeti k členům obsahujícím součiny jejich $\frac{dx_\mu}{d\tau}\frac{dx_\nu}{d\tau}$ (pro $\mu, \nu = 1, 2, 3$), jež jsou veličinami malými druhého stupně. V rovnicích (6) zbývají pak jen sčítanci, v nichž jeden činitel jest $\frac{dx_4}{ds}$; stačí tudíž vypočítati hodnoty složek $\Gamma^i_{\mu 4}$ (pro $i, \mu = 1, 2, 3, 4$). Především jsou všechny $\Gamma^i_{\mu 4}$ pro $i, \mu = 1, 2, 3$ rovny nule, ježto jednak $g_{\mu 4} = 0$, $g_{4\nu} = 0$, jednak $\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x_4} = 0$ (pro $\mu, \nu = 1, 2, 3$) vzhledem k tomu, že dle (9a) tyto $g_{\mu\nu}$ buď neobsahují souřadnic x_4 neb se rovnají nule; také $g^{\mu 4} = \gamma_{\mu 4} = 0$, $g^{4\nu} = \gamma_{4\nu} = 0$.

Jde tedy jen o veličiny Γ^i_{44} a $\Gamma^4_{\mu 4}$; z těch na př.

$$\Gamma^1_{44} = \tfrac{1}{2}\left(g^{11}\frac{\partial g_{14}}{\partial x_1} + g^{12}\frac{\partial g_{44}}{\partial x_2} + g^{13}\frac{\partial g_{44}}{\partial x_3}\right),$$

přihlížíme-li k uvedeným hodnotám pro $g_{\mu 4}$, $g_{4\nu}$ a $\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x_4}$.

Vložíce na pravé straně dle (10) a (11)

$$g^{11} = -1 + \frac{\alpha x_1^2}{r^3}, \quad g^{12} = \frac{\alpha x_1 x_2}{r^3}, \quad g^{13} = \frac{\alpha x_1 x_3}{r^3},$$

jakož i $\frac{\partial g_{44}}{\partial x_1} = \frac{\alpha x_1}{r^3}$, $\frac{\partial g_{44}}{\partial x_2} = \frac{\alpha x_2}{r^3}$, $\frac{\partial g_{44}}{\partial x_3} = \frac{\alpha x_3}{r^3}$,

nabudeme $\Gamma^1_{44} = \tfrac{1}{2}\left[-\frac{\alpha x_1}{r^3} + \frac{\alpha^2}{r^6}(x_1^3 + x_1 x_2^2 + x_1 x_3^2)\right]$,

čili, jelikož $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = r^2$, též

$$\Gamma^1_{44} = \tfrac{1}{2}\left(-\frac{\alpha x_1}{r^3} + \frac{\alpha^2 x_1}{r^4}\right) = -\tfrac{1}{2}\frac{\alpha x_1}{r^3}\left(1 - \frac{\alpha}{r}\right);$$

tutéž hodnotu má $\Gamma^4_{14} = -\tfrac{1}{2} g^{44}\frac{\partial g_{44}}{\partial x_1} = -\tfrac{1}{2}\left(1 - \frac{\alpha}{r}\right)\frac{\alpha x_1}{r^3}$.

Podobné výrazy obdržíme pro Γ^2_{44}, Γ^3_{44}, pročež obecně

$$\Gamma^i_{44} = \Gamma^4_{i4} = -\tfrac{1}{2}\frac{\alpha x_i}{r^3}\left(1 - \frac{\alpha}{r}\right), \tag{12}$$

kdežto $\Gamma^4_{44} = 0.$

Rovnice (6) nabývají pak pro $i = 1, 2, 3$ jednoduššího tvaru

$$\frac{d^2 x_i}{ds^2} = \Gamma^i_{44}\left(\frac{dx_4}{ds}\right)^2.$$

Čtvrtá rovnice (pro $i = 4$) upraví se jako obdobná rovnice v odd. III.

Čas t souvisí s časem vlastním τ relací $d\tau = dt\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$ *); pro malé v jest přibližně $d\tau = dt$. Za čas vlastní τ lze však položiti oblouk s a za čas t souřadnici x_4 (je-li $c = 1$), pročež přibližně $\frac{dx_4}{ds} = 1$.

Vložíme-li tuto hodnotu, jakož i výraz za Γ^i_{44} daný vzorcem (12) do poslední rovnice, obdržíme

$$\frac{d^2 x_i}{ds^2} = -\tfrac{1}{2}\frac{\alpha x_i}{r^3}\left(1 - \frac{\alpha}{r}\right). \tag{13}$$

Vynecháme-li v závorce zlomek $\frac{\alpha}{r}$, který za jistých podmínek může býti velmi malý, dostaneme pro složky síly P dle vzorce (8)

$$P_i = -m_0\frac{\alpha x_i}{2r^3} = -\frac{\alpha}{2}\frac{m_0}{r^3}\frac{x_i}{r}, \text{**)} \tag{14}$$

což jsou složky síly přitažlivé dvou hmot dle gravitačního zázákona Newtonova. Tato theorie jest tudíž aproximací všeobecné theorie relativnosti.

III. Upusťme nyní od výše uvedené podmínky třetí a předpokládejme, že nemůžeme pokládati složky rychlosti v za tak malé, abychom mohli vynechati součiny $\frac{dx_\mu}{d\tau}\frac{dx_\nu}{d\tau}$ $(\mu, \nu = 1, 2, 3)$.

---

*) »Kinematika theorie relativnosti«, roč. XLIII, vzorec (28a) na str. 599.

**) Ježto $\frac{\partial g_{44}}{\partial x_i} = \frac{\alpha x_i}{r^3}$, lze také psáti (pro $m_0 = 1$) $P_i = -\frac{1}{2}\frac{\partial g_{44}}{\partial x_i}$, jest tudíž $-\frac{g_{44}}{2}$ gravitační potenciál theorie Newtonovy.

Zavedeme však zjednodušení takové, že v součinech tvaru $g^{i\sigma}\frac{\partial g_{\mu\sigma}}{\partial x_\nu}$ atd., jež se vyskytují ve výrazech pro $\Gamma^i_{\mu\nu}$, položíme za $g^{i\sigma}$ přibližné hodnoty, plynoucí z rovnic (10) pro $\gamma_{\mu\nu}=0$, tedy $g^{\mu\nu}=-\delta^\nu_\mu=\begin{cases}-1 \text{ pro } \mu=\nu\\ \;\;0 \;\;\text{,,}\;\; \mu\neq\nu\end{cases}$. Pak zbude ze součtu $-\frac{1}{2}\sum_\sigma g^{i\sigma}\left(\frac{\partial g_{\mu\sigma}}{\partial x_\nu}+\frac{\partial g_{\nu\sigma}}{\partial x_\mu}-\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x_\sigma}\right)$ pro $\Gamma^i_{\mu\nu}$ toliko výraz $\left(\frac{\partial g_{\mu i}}{\partial x_\nu}+\right.$ $\left.+\frac{\partial g_{\nu i}}{\partial x_\mu}-\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x_i}\right)$. Tento trojčlen jest *Christoffelův* symbol $\left[\begin{matrix}\mu\nu\\ i\end{matrix}\right]$; píšeme tedy za $\Gamma^i_{\mu\nu}$ toliko $\left[\begin{matrix}\mu\nu\\ i\end{matrix}\right]$.

Vypočteme-li differenciální poměry $\frac{\partial g_{\mu\sigma}}{\partial x_\nu}$ atd., obdržíme pro ně vzorce:

$$\frac{\partial g_{\mu\mu}}{\partial x_\mu}=-\frac{2\alpha x_\mu}{r^3}\left(1-\frac{3}{2}\frac{x_\mu{}^2}{r^2}\right),\quad \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x_\mu}=-\frac{\alpha x_\nu}{r^3}\left(1-\frac{3}{2}\frac{x_\mu{}^2}{r^2}\right),$$

$$\frac{\partial g_{\mu\mu}}{\partial x_\nu}=\frac{3\alpha x_\mu{}^2 x_\nu}{r^5},\quad \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x_\sigma}=\frac{3\alpha x_\mu x_\nu x_\sigma}{r^5}\quad (\text{pro } \mu,\nu=1,2,3).$$

Pomocí těchto rovnic ustanovíme na př.

$$\Gamma^1_{11}=\left[\begin{matrix}11\\ 1\end{matrix}\right]=\frac{1}{2}\frac{\partial g_{11}}{\partial x_1}=-\frac{\alpha x_1}{r^3}\left(1-\frac{3}{2}\frac{x_1^2}{r^2}\right),$$

$$\Gamma^2_{13}=\left[\begin{matrix}13\\ 2\end{matrix}\right]=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{12}}{\partial x_3}+\frac{\partial g_{23}}{\partial x_1}-\frac{\partial g_{31}}{\partial x_2}\right)=\frac{3}{2}\frac{\alpha x_1 x_2 x_3}{r^3}\text{ atd.};$$

obecně pro $i,\mu,\nu=1,2,3$

$$\Gamma^i_{\mu\nu}=-\frac{\alpha x_i}{r^3}\left(\delta^\nu_\mu-\frac{3}{2}\frac{x_\mu x_\nu}{r^2}\right). \tag{15}$$

K těmto veličinám připojíme (opět pro $i,\mu=1,2,3$)

$$\Gamma^i_{\mu 4}=\Gamma^i_{4\mu}=0,$$

$$\Gamma^i_{44}=\Gamma^4_{i4}=-\frac{1}{2}\frac{\alpha x_i}{r^3}\left(1-\frac{\alpha}{r}\right),\quad \Gamma^4_{44}=0. \tag{15a}$$

Vložíce tyto hodnoty do rovnic (6) dostaneme pro první tři z nich:

$$\frac{d^2x_i}{ds^2}=\frac{\alpha x_i}{r^3}\left[\left(1-\tfrac{3}{2}\frac{x_1^2}{r^2}\right)\left(\frac{dx_1}{ds}\right)^2+\left(1-\tfrac{3}{2}\frac{x_2^2}{r^2}\right)\left(\frac{dx_2}{ds}\right)^2+\left(1-\tfrac{3}{2}\frac{x_3^2}{r^2}\right)\left(\frac{dx_3}{ds}\right)^2\right.$$

$$-3\frac{x_1x_2}{r^2}\frac{dx_1}{ds}\frac{dx_2}{ds}-3\frac{x_1x_3}{r^2}\frac{dx_1}{ds}\frac{dx_3}{ds}-3\frac{x_2x_3}{r^2}\frac{dx_2}{ds}\frac{dx_3}{ds}+\left.\tfrac{1}{2}\left(1-\frac{\alpha}{r}\right)\left(\frac{dx_4}{ds}\right)^2\right]$$

$$=\frac{\alpha x_i}{r^3}\left\{\left(\frac{dx_1}{ds}\right)^2+\left(\frac{dx_2}{ds}\right)^2+\left(\frac{dx_3}{ds}\right)^2-\tfrac{3}{2}\left[\frac{x_1^2}{r^2}\left(\frac{dx_1}{ds}\right)^2+\frac{x_2^2}{r^2}\left(\frac{dx_2}{ds}\right)^2+\frac{x_3^2}{r^2}\left(\frac{dx_3}{ds}\right)^2\right.\right.$$

$$\left.\left.+2\frac{x_1x_2}{r^2}\frac{dx_1}{ds}\frac{dx_2}{ds}+2\frac{x_1x_3}{r^2}\frac{dx_1}{ds}\frac{dx_3}{ds}+2\frac{x_2x_3}{r^2}\frac{dx_2}{ds}\frac{dx_3}{ds}\right]+\tfrac{1}{2}\left(1-\frac{\alpha}{r}\right)\left(\frac{dx_4}{ds}\right)^2\right\}.$$

Výraz na pravé straně v prostředních závorkách jest však $\left(\frac{dr}{ds}\right)^2$, neboť z rovnice

$$r^2=x_1^2+x_2^2+x_3^2$$

jde

$$\frac{dr}{ds}=\frac{x_1}{r}\frac{dx_1}{ds}+\frac{x_2}{r}\frac{dx_2}{ds}+\frac{x_3}{r}\frac{dx_3}{ds}.$$

Za $\left(\frac{dx_1}{ds}\right)^2+\left(\frac{dx_2}{ds}\right)^2+\left(\frac{dx_3}{ds}\right)^2$ můžeme psáti v^2; tudíž bude

$$\frac{d^2x_i}{ds^2}=\frac{\alpha x_i}{r^3}\left[v^2-\tfrac{3}{2}\left(\frac{dr}{ds}\right)^2+\tfrac{1}{2}\left(1-\frac{\alpha}{r}\right)\left(\frac{dx_4}{ds}\right)^2\right]. \tag{o}$$

Čtvrtá rovnice pohybu zní

$$\frac{d^2x_4}{ds^2}=\sum_{\mu\nu}\Gamma^4_{\mu\nu}\frac{dx_\mu}{ds}\frac{dx_\nu}{ds}$$

čili vzhledem k (15a)

$$\frac{d^2x_4}{ds^2}=2\left(\Gamma^4_{14}\frac{dx_1}{ds}+\Gamma^4_{24}\frac{dx_2}{ds}+\Gamma^4_{34}\frac{dx_3}{ds}\right)\frac{dx_4}{ds}$$

$$=-\frac{\alpha}{r^3}\frac{x_1dx_1+x_2dx_2+x_3dx_3}{ds}\left(1-\frac{\alpha}{r}\right)\frac{dx_4}{ds}.$$

Ježto $r\,dr = x_1 dx_1 + x_2 dx_2 + x_3 dx_3$, bude též

$$\frac{d^2 x_4}{ds^2} = -\frac{\alpha}{r^2}\left(1 - \frac{\alpha}{r}\right)\frac{dr}{ds}\frac{dx_4}{ds}.$$

Z rovnice té můžeme vypočítati pro $\frac{dx_4}{ds}$ hodnotu přesnější, než jest hodnota, jíž jsme výše použili ($= 1$). Za tou příčinou položme nejprve za $\frac{dx_4}{ds}$ na pravé straně jednotku a spolu vynechme součin $\frac{\alpha}{r^2}\frac{\alpha}{r}$; tím nabýváme rovnice

$$\frac{d^2 x_4}{ds^2} = -\frac{\alpha}{r^2}\frac{dr}{ds}.$$

Integrací vychází

$$\frac{dx_4}{ds} = \frac{\alpha}{r} + C,$$

kde stálá $C = 1$, jelikož pro $r = \infty$ platí $\frac{dx_4}{ds} = 1$.

Jest tedy

$$\frac{dx_4}{ds} = 1 + \frac{\alpha}{r}. \tag{16a}$$

Nyní lze upraviti rovnici (o), jejíž poslední člen v prostředních závorkách bude

$$\tfrac{1}{2}\left(1 - \frac{\alpha}{r}\right)\left(1 + \frac{\alpha}{r}\right)^2;$$

kladouce přibližně $1 - \frac{\alpha}{r} = \frac{1}{1 + \frac{\alpha}{r}}$ nalezneme pro tento člen

$$\frac{1}{2}\left(1 + \frac{\alpha}{r}\right),$$

pročež rovnice (o) nabývá konečného tvaru

$$\frac{d^2 x_i}{ds^2} = \frac{\alpha x_i}{2r^3}\left[1 + \frac{\alpha}{r} + 2v^2 - 3\left(\frac{dr}{ds}\right)^2\right] \tag{16}$$

Odvodíme ještě z těchto rovnic první a třetí zákon *Kepplerův*. Zaveďme v nich souřadnice polárné r a φ; pak jest

$$x_1 = r \cos \varphi, \quad x_2 = r \sin \varphi$$

a $x_3 = 0$, ježto hmotný bod (v tomto případě oběžnice) pohybuje se v rovině $(X_1 X_2)$. Vypočítáme-li z těchto rovnic $\frac{d^2x_1}{ds^2}$ a $\frac{d^2x_2}{ds^2}$, dostaneme substitucí techto výrazů do prvních dvou rovnic (16)

$$\left[\frac{d^2r}{ds^2} - r\left(\frac{d\varphi}{ds}\right)^2\right]\cos\varphi - \left(r\frac{d^2\varphi}{ds^2} + 2\frac{dr}{ds}\frac{d\varphi}{ds}\right)\sin\varphi$$

$$= -\frac{\alpha\cos\varphi}{2r^2}A, \qquad (p)$$

$$\left[\frac{d^2r}{ds^2} - r\left(\frac{d\varphi}{ds}\right)^2\right]\sin\varphi + \left(r\frac{d^2\varphi}{ds} + 2\frac{dr}{ds}\frac{d\varphi}{ds}\right)\cos\varphi$$

$$= -\frac{\alpha\sin\varphi}{2r^2}A,$$

$$\text{kde } A = 1 + \frac{\alpha}{r} + 2v^2 - 3\left(\frac{dr}{ds}\right)^2.$$

Násobme první z těchto rovnic $-\sin\varphi$, druhou $\cos\varphi$ a sečtěme; tím vychází

$$r\frac{d^2\varphi}{ds^2} + 2\frac{dr}{ds}\frac{d\varphi}{ds} = 0$$

čili

$$d\left(r^2\frac{d\varphi}{ds}\right) = 0$$

a integrací

$$r^2\frac{d\varphi}{ds} = const.,$$

kteráž rovnice vyslovuje první zákon Kepplerův.

Předpokládejme dále, že pohyb hmotného bodu jest kruhový a rovnoměrný; pak bude v rovnicích (16) $\frac{dr}{ds} = 0$ a $v = r\omega$, značí-li ω rychlost úhlovou. Poněvadž

$$\frac{d^2r}{ds^2} = 0,\quad \frac{d\varphi}{ds} = \omega,\quad \frac{d^2\varphi}{ds^2} = 0,$$

obdržíme z rovnic (p) jedinou rovnici

$$r\omega^2 = \frac{\alpha}{2r^2}\left(1 + \frac{\alpha}{r} + 2r^2\omega^2\right)$$

čili

$$\omega^2\left(1 - \frac{\alpha}{r}\right) = \frac{\alpha}{2r^3}\left(1 + \frac{\alpha}{r}\right),$$

z čehož
$$\omega^2 = \frac{\alpha}{2r^3} \cdot \frac{1+\frac{\alpha}{r}}{1-\frac{\alpha}{r}}.$$

Položíme-li přibližně za $\frac{1}{1-\frac{\alpha}{r}}$ součet $1+\frac{\alpha}{r}$ a za

$\left(1+\frac{\alpha}{r}\right)^2 = 1+\frac{2\alpha}{r}$, dostaneme
$$\omega^2 = \frac{\alpha}{2r^3}\left(1+\frac{2\alpha}{r}\right)$$

čili, vynecháme-li ještě $\frac{\alpha^2}{r^4}$ jako malou veličinu,
$$\omega^2 = \frac{\alpha}{2r^3}.$$

Z této rovnice plyne $\frac{\alpha}{r} = 2\omega^2 r^2 = 2v^2$, t. j. $\frac{\alpha}{r}$ rovná se přibližně dvojnásobnému čtverci rychlosti oběžnice (je-li rychlost světla $c = 1$).*)

Zavedeme-li místo ω dobu oběhu oběžnice T dle rovnice $\omega = \frac{2\pi}{T}$, bude
$$\frac{4\pi^2}{T^2} = \frac{\alpha}{2r^3}$$

jako výraz třetího zákona Kepplerova (pro pohyby kruhové).

Z rovnic (16) vypočetl *Einstein*, že perihelium oběžnice Merkur předbíhá za 100 let o 43″, což se dosti shoduje s astronomickými pozorováními, dle nichž tato anomalie pohybu perihelia činí $45'' \pm 5''$.

---

*) Hodnotu konstanty α určil *Einstein* výrazem $\frac{\varkappa M}{8\pi}$, kde $\varkappa = \frac{8\pi\varepsilon}{c^2}$ a M značí hmotu tělesa, jež vytvořuje pole gravitační. Je-li konstanta gravitační $\varepsilon = 6{\cdot}7 . 10^{-8}$, jest $\varkappa = 1{\cdot}87 . 10^{-27}$.