Alois Strnad

Drobné zprávy

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 17 (1888), No. 1, 31--33

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/109153

Drobné zprávy.

Napsal

A. Strnad,
professor v Hradci Králové.

Z kombinatoriky. Budiž $S_{k,n}$ součet všech součinů po k činitelích vybraných z prvků $1, 2, 3, \ldots, n$. Potom jest patrně $S_{k,n} = o$, je-li $k > n$ a $S_{k,n} = n!$, je-li $k = n$. Klademe-li $S_{o,n} = 1$, má platnosť rekurentní vzorec

$$S_{k,n} = n\, S_{k-1,\, n-1} + S_{k,\, n-1},$$

ze kterého *Mollame*, professor na universitě v Catanii, ustanovil řadu zajímavých relací.

Některé tuto uvádíme:

$$S_{o,n} + S_{1,n} + S_{2,n} + \ldots + S_{n,n} = (n+1)!$$

$$S_{o,n} + S_{2,n} + S_{4,n} + \ldots = S_{1,n} + S_{3,n} + S_{5,n} + \ldots$$

$$(n-k+1)\, S_{k,n} = \sum_{r=o}^{r=k} \frac{(n+1)\, n\, (n-1) \ldots (n-r+1)}{r+1} S_{k-r,\, n-r-1}.$$

$$k\, S_{k,n} = n(n+1)\, S_{k-1,\, n-1}$$

$$-\sum_{r=1}^{r=k} \frac{(n+1)\, n\, (n-1) \ldots (n-r+1)}{r+1} S_{k-r,\, n-r+1}.$$

(*Nouvelles annales de mathématiques, 1886, p. 364.*)

Zlomky řetězové. Maje stanoviti hodnotu nekonečného řetězce

$$X = 1 + 1/1 + 1/2 + 1/3 + \ldots$$

našel *Cesaro*, professor na universitě v Palermě, že jest

$$a_n = f\left(\frac{n}{2}\right), \quad b_n = n : f\left(\frac{n}{2}\right),$$

značí-li a_n čitatele, b_n jmenovatele n-té hodnoty sbližné, a je-li

$$f(n) = \frac{2.4.6 \ldots 2n}{1.3.5 \ldots (2n-1)}.$$

Přechodem k hodnotám mezným při $\lim n = \infty$ objeví se pozoruhodný výsledek

$$X = \frac{\pi}{2}.$$

Budiž obecněji

$$X(\mu) = 1 + \mu/1 + \mu/2 + \mu/3 + \ldots;$$

potom lze zlomek ten vyjádřiti řadou

$$X(\mu) = 2\mu\left(\frac{1}{\mu} - \frac{1}{\mu+2} + \frac{1}{\mu+4} - \ldots\right),$$

ze které ku př. při $\mu = 2$ obdržíme

$$1 + 2/1 + 2/2 + 2/3 + \ldots = l4.$$

Z ještě obecnějších zlomků řetězových vyvodil týž autor hodnoty

$$1 + 1/2 + 2/3 + 3/4 + \ldots = \frac{1}{e-2}$$

$$1 + 2/2 + 4/3 + 6/4 + \ldots = \frac{4}{e^2 - 5}.$$

(Nouvelles annales de mathématiques, 1887, p. 29.)

Geometrická posloupnosť. Členy geometrické posloupnosti $u_1, u_2, u_3, \ldots, u_n$ a součet její s_n lze dle *Korolkova* graficky znázorniti takto:

Sestrojme rovnoběžky

$$\overline{a_1 b_1} = u_1, \quad \overline{a_2 b_2} = u_2,$$

spojme body a_1, a_2 přímkou A, body b_1, b_2 přímkou B, které se protínají v bodě o. Mezi těmito dvěma přímkami stanovme příčky

$$a_1 b_1 \parallel a_2 b_2 \parallel a_3 b_3 \parallel \ldots \parallel a_n b_n$$

$$a_2 b_1 \parallel a_3 b_2 \parallel a_4 b_3 \parallel \ldots \parallel a_n b_{n-1};$$

další členy posloupnosti jsou znázorněny délkami

$$\overline{a_3 b_3} = u_3, \quad \overline{a_4 b_4} = u_4, \ldots, \overline{a_n b_n} = u_n.$$

Jestliže pak rovnoběžka bodem b_n ku $a_2 b_1$ vedená protíná prodlouženou $a_1 b_1$ v bodě c_n, jest

$$\overline{a_1 c_n} = s_n.$$

Je-li $a_1 b_1 > a_2 b_2$ a tedy řada konvergentní, lze stanoviti součet s_∞ nekonečného počtu členů; seče-li totiž přímka $oc \parallel a_2 b_1$ přímku prodlouženou $a_1 b_1$ v bodě c, jest

$$\overline{a_1 c} = s_\infty.$$

(Вѣстникъ опытной физики и элементарной математики, I. семестръ, стр. 195).

Nový důkaz tak zvané Carnotovy věty. V trojúhelníku abc sestrojme výšku $cd \perp ab$ a opišme ze středu c poloměrem

ac kružnici; tato protíná stranu ab (neb její prodloužení) v bodě e, prodlouženou stranu bc v bodech f, g. Jest pak

$$gb \,.\, bf = ab \,.\, be$$

čili
$$(cg + bc)(cf - bc) = ab\,(ae - ab)$$

aneb
$$(ac + bc)(ac - bc) = ab\,(2ad - ab).$$

Odtud obdržíme

$$bc^2 = ac^2 + ab^2 - 2ab \,.\, ad.$$

(Вѣстникъ опытной физики и элементарной математики, II. семестръ, стр. 262.)

Křivost křivek při isogonalné transformaci. Vyšetřuje, kterak se mění křivost rovinné křivky při isogonálné transformaci, objevil *Laisant* tuto větu: Prochází-li bodem řada křivek a leží-li ich středy křivosti tomuto bodu příslušné na kuželosečce, jsou též středy křivosti křivek odvozených transformací isogonálnou položeny na kuželosečce.

Zvláštními případy obsaženými v tomto theoremu jsou dvě věty, které dříve již odvodil *Transon* (Nouv. annales, 1869):

Křivky odvozené isogonálnou transformací ze svazku přímek mají příslušné středy křivosti na určité přímce.

Jde-li bodem řada křivek majících v bodě tom stejnou křivost, leží příslušné středy křivosti křivek odvozených na kuželosečce, která má v bodě odvozeném ohnisko.

(Bulletin de la société mathématique de France. Tome XV. 1887. pag. 39).

Úlohy.

Řešení úlohy 17. z roč. XVI.

(Zaslal p. *Vladimír Novák*, stud. VIII. tř. v Truhlářské ulici v Praze.)

Výslednice obou sil jest v prvém případě $2P \cos \frac{\alpha}{2}$, v druhém pak $(P+p)\cos\left(\frac{\alpha}{2}-\beta\right)+(P-p)\cos\left(\frac{\alpha}{2}+\beta\right)$.

Aby se břímě s nezměněnou rychlostí pohybovalo, musejí obě výslednice býti sobě rovny, tedy