Václav Petržílka

Příspěvek k teorii dvou spřažených oscilačních kruhů. [II.]

Časopis pro pěstování matematiky a fysiky, Vol. 59 (1930), No. 3, 172--180

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/109077`

Příspěvek k teorii dvou spřažených oscilačních kruhů.[1])

Václav Petržílka.

ČÁST II.

Tato práce je pokračováním I. části, pojednávající o energetických poměrech ve dvou spřažených oscilačních kruzích. Jsou v ní diskutovány výrazy pro úhrnnou energii W, energii W_1 primárního kruhu a energii W_2 sekundárního kruhu pro dva specielní případy:

A. Vlastní frekvence ω_1 a ω_2 obou kruhů jsou konstantní, $\omega_1 \neq \omega_2$, ω je proměnné.

1. Diskuse výrazů W, W_1, W_2 vede k rovnici 5. stupně, kterou nelze jednoduše řešiti; proto bylo od řešení tohoto případu upuštěno.

B. Frekvence ω je konstantní, mění se buď ω_1 nebo ω_2.

1. Diskuse výrazů W, W_1, W_2 je provedena
   a) za předpokladu ω_2 konstantní, ω_1 proměnné,
   b) za předpokladu ω_1 konstantní, ω_2 proměnné;
   α) diskuse výrazu W,
   β) diskuse výrazu W_1.

Oba případy α) i β) vedou ke křivkám se dvěma extrémy, jedním maximem a jedním minimem;

γ) diskuse výrazu W_2 vede pouze k jednoduchým resonančním křivkám.

2. Podmínky pro maximální přenos energie jsou stanoveny:
   a) za předpokladu ω_2 konstantní, ω_1 proměnné rovnicí (57),
   b) za předpokladu ω_1 konstantní, ω_2 proměnné rovnicí (59).

V předcházející I. části této práce[2]) zabýval jsem se energetickými poměry ve dvou spřažených oscilačních kruzích. Odvodil jsem obecné vzorce pro úhrnnou energii W dodávanou systému dvou induktivně spřažených oscilačních kruhů, jakož i výrazy pro energie částečně dodávané jednak kruhu primárnímu, jednak kruhu sekundárnímu v závislosti na útlumech, vazbě a rozladění obou

[1]) Vyjde také v Elektrische Nachrichtentechnik.
[2]) Časop. pro pěst. mat. a fys. Roč. 59, čís. 2, str. 113 (1930).

kruhů vůči frekvenci vtištěné elektromotorické síly. (Viz vzorce (11), (12), (13) pro W, W_1, W_2.)[3]) Známe-li výrazy pro energie dodávané oběma kruhům, známe tím i resonanční křivky obou kruhů.

V I. části této práce specialisoval jsem tyto vzorce pro případ, že se mění ω, při čemž vlastní frekvence ω_1 prvního kruhu rovná se vlastní frekvenci ω_2 kruhu druhého a jest konstantní. Vyšetřil jsem pro tento případ průběh resonančních křivek W, W_1 a W_2 v závislosti na rozladění ξ, roztřídil jsem je na křivky jednoduché a rozštěpené a stanovil jsem obory existence obou druhů těchto křivek. Zároveň jsem stanovil podmínku pro maximální přenos energie W_2 z kruhu primárního do kruhu sekundárního, jak v oboru jednoduchých, tak v oboru rozštěpených resonančních křivek.

Týmž způsobem budeme postupovati i v této práci, kde chceme odvozené vztahy pro W, W_1 a W_2 studovati pro dva případy: A) Vlastní frekvence ω_1 a ω_2 obou kruhů jsou konstantní, $\omega_1 \neq \omega_2$, a měníme ω. B) Frekvence ω je konstantní, měníme buď ω_1, nebo ω_2.

Konečně případ, kdy vlivem spřaženého systému mění se frekvence ω vtištěné elektromotorické síly podle t. zv. „rovnice frekvencí", a který v literatuře byl již celou řadou prací osvětlen, bude podrobně probrán v následující III. části této práce.

A. Vlastní frekvence ω_1 a ω_2 obou kruhů jsou konstantní; $\omega_1 \neq \omega_2$, ω je proměnné.

1. Diskuse výrazů W, W_1, W_2.

Užijeme-li postupu citované předcházející I. části práce, nevede řešení tohoto případu k přehledným a jednoduchým výsledkům, které zde proto ani neuvádím. Body, v nichž existují extrémy funkcí W, W_1, jsou dány kořeny rovnice 5. stupně, jejíž koeficienty jsou mimo to ještě dosti složité výrazy. Kdybychom chtěli stanoviti aspoň počet reálných resp. komplexních kořenů této rovnice tak, jak to učinil Sommer pro rovnici 4. stupně,[4]) dojdeme ke komplikovaným, nepřehledným výsledkům, které nemají ani s teoretického ani s praktického hlediska významu. Proto teoretické výsledky plynoucí pro tento případ z rovnice (8), (9) a (10) nebudu uváděti; zato bude tato část doplněna podrobným studiem experimentálním, které bude podáno v jiné práci.

---

[3]) Rovnice (1) až (44) jsou obsaženy v uvedené I. části, rovnice (45) až (60) v této práci.

[4]) Sommer: Ann. d. Phys. 58, str. 375 (1919); viz též str. 384, kde ukazuje na obtíže při aplikaci metody (užité u rovnice 4. stupně) na rovnice vyšších stupňů.

B. Frekvence ω je konstantní, mění se buď ω_1 nebo ω_2.

1. Diskuse výrazů W, W_1, W_2.

V této části budeme vyšetřovati výrazy pro energie W, W_1, W_2 (viz rovnice (8), (9), (10)) za předpokladu, že ω je konstantní: a) měníme ω_1, při čemž ω_2 je konstantní, b) měníme ω_2, při čemž ω_1 je konstantní.

Pro W byl odvozen (viz rovnici (8)) výraz

$$\frac{E^2\left(R_1+\dfrac{\omega^2 L_{12}^2 R_2}{R_2^2+\left(\omega L_2-\dfrac{1}{\omega C_2}\right)^2}\right)}{\left(R_1+\dfrac{\omega^2 L_{12}^2 R_2}{R_2^2+\left(\omega L_2-\dfrac{1}{\omega C_2}\right)^2}\right)^2+\left(\left(\omega L_1-\dfrac{1}{\omega C_1}\right)-\dfrac{\omega^2 L_{12}^2\left(\omega L_2-\dfrac{1}{\omega C_2}\right)}{R_2^2+\left(\omega L_2-\dfrac{1}{\omega C_2}\right)^2}\right)^2}. \tag{45}$$

Zavedeme nyní označení

$$1-\frac{\omega_1^2}{\omega^2}=\eta,\quad 1-\frac{\omega_2^2}{\omega^2}=\xi,\quad d_1=\frac{R_1}{\omega L_1},\quad d_2=\frac{R_2}{\omega L_2},\quad k^2=\frac{L_{12}^2}{L_1 L_2}, \tag{46}$$

které se liší od označení v I. části tím, že ve výrazech pro d_1 a d_2 klademe ω místo ω_1. Pak jsou W, W_1, W_2 dány výrazy (viz výrazy (8), (9) a (10))

$$W=\frac{E^2}{R_1}\cdot\frac{d_1^2d_2^2+k^2d_1d_2+d_1^2\xi^2}{(k^2+d_1d_2)^2+d_1^2\xi^2+d_2^2\eta^2+\eta^2\xi^2-2k^2\eta\xi}, \tag{47}$$

$$W_1=\frac{E^2}{R_1}\cdot\frac{d_1^2d_2^2+d_1^2\xi^2}{(k^2+d_1d_2)^2+d_1^2\xi^2+d_2^2\eta^2+\eta^2\xi^2-2k^2\eta\xi}, \tag{48}$$

$$W_2=\frac{E^2}{R_1}\cdot\frac{k^2d_1d_2}{(k^2+d_1d_2)^2+d_1^2\xi^2+d_2^2\eta^2+\eta^2\xi^2-2k^2\eta\xi}; \tag{49}$$

při tom dlužno podotknouti, že výrazy W, W_1, W_2 byly odvozeny úplně přesně; lze tedy očekávati, že křivky získané experimentem pro určité hodnoty k, d_1, d_2 budou shodné s křivkami vypočtenými pro tyto hodnoty z výrazů (47), (48), (49).

a) Frekvence ω, ω_2 jsou konstantní, ω_1 je proměnné. Vlastní frekvenci sekundárního kruhu ω_2 ponecháme konstantní a sledujeme výrazy W, W_1, W_2 jakožto funkce η, čili jakožto funkce ω_1 resp. C_1, které měníme. Všechny tyto tři funkce v závislosti na η nabývají jediného extrému a sice maxima v témž bodě

$$\eta_1=\frac{k^2\xi}{d_2^2+\xi^2}. \tag{50}$$

Jest tedy charakter těchto tří křivek úplně stejný a typu jednoduchých resonančních křivek. Maximum nastává zde buď napravo nebo nalevo od bodu $\eta = 0$, podle toho, je-li ξ větší nebo menší než nula. S rostoucím ξ se od bodu $\eta = 0$ vzdaluje; maximální vzdálenosti nabude pro $\xi = d_2$. Je-li $\xi = 0$, pak je resonanční křivka $W_2 = f(\eta)$ symetrická podle osy W_2, která jde bodem $\eta = 0$ a vrcholem resonanční křivky. Rozladění, pro které klesne W_2 na polovinu své maximální hodnoty $W_2^{(\eta=0)}$, je dáno výrazem

$$\eta_0 = d_1 + \frac{k^2}{d_2}.$$

Lze tedy při extrémně volné vazbě ($k^2/d_2 \doteq 0$) užíti šířky resonanční křivky $W_2 = f(\eta)$ k měření útlumu primárního kruhu. V jakých mezích je při tom třeba udržovati k, o tom je podrobněji pojednáno sub b) γ) (při měření útlumu).

b) Frekvence ω, ω_1 jsou konstantní, ω_2 je proměnné. α) Diskuse výrazu W. Extrémy W jakožto funkce ξ existují v bodech, kde $dW/d\xi = 0$, čili pro kořeny kvadratické rovnice

$$d_1\eta\xi^2 + (d_2\eta^2 - d_1^2 d_2 - k^2 d_1)\,\xi - (\eta d_1 d_2^2 + k^2 d_2 \eta) = 0, \qquad (51)$$

jež jsou dány výrazy

$$\xi_1 = \frac{k^2 + d_1 d_2}{\eta}, \quad \xi_2 = -\frac{d_2}{d_1}\eta. \qquad (52)$$

A tu mohou nastati tři případy:

Je-li $\eta = 0$, čili $\omega_1 = \omega = \omega_2$, pak existuje jediný kořen $\xi_2 = 0$, a tudíž jediný extrém a sice minimum v bodě $\xi_2 = 0$, jak patrno direktně z výrazu (47).

Je-li $\eta < 0$, čili $\omega_1 > \omega$, pak $\xi_1 < 0$, $\xi_2 > 0$; v bodě ξ_1 existuje maximum, v bodě ξ_2 minimum výrazu W. Křivka má průběh znázorněný v obr. 1 , z něhož je patrno, že extrémy leží na různých stranách od bodu $\xi = 0$.

Je-li $\eta > 0$, čili $\omega_1 < \omega$, pak je $\xi_1 > 0$, $\xi_2 < 0$; v bodě ξ_1 existuje maximum, v bodě ξ_2 minimum výrazu W, jak ukazuje obr. 2.

Zvětšujeme-li η co do absolutní hodnoty, blíží se ξ_1 k počátku, kdežto bod ξ_2 se od něho vzdaluje. Zvětšujeme-li k, nemění se poloha bodu ξ_2, zato bod ξ_1, se vzdaluje od bodu $\xi = 0$.

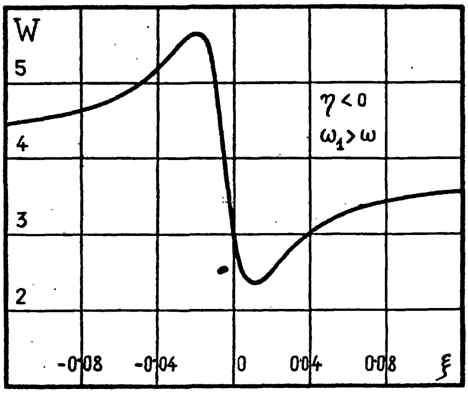
β) *Diskuse výrazu W_1.* Stejným způsobem zjistíme, že body, v nichž existují extrémy $W_1 = f(\xi)$, jsou dány výrazy

$$\xi_{1,2} = \frac{(k^2 + 2d_1d_2) \pm \sqrt{(k^2 + 2d_1d_2)^2 + 4\eta^2 d_2^2}}{2\eta}. \qquad (53)$$

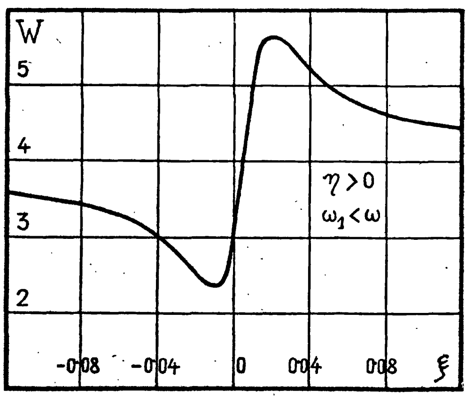
Existují tedy také pro W_1 tři případy:

Je-li $\eta = 0$, pak existuje jediný extrém a sice minimum W_1 v bodě $\xi = 0$, které je stále hlubší a hlubší, vzrůstá-li k.

Je-li $\eta < 0$, čili $\omega_1 > \omega$, pak $\xi_1 < 0$, $\xi_2 > 0$; v bodě ξ_1 existuje maximum, v bodě ξ_2 minimum W_1 (viz rovnici (48)).



Obr. 1.



Obr. 2.

Je-li $\eta > 0$, čili $\omega_1 < \omega$, pak jest $\xi_1 > 0$, $\xi_2 < 0$; v bodě ξ_1 existuje maximum, v bodě ξ_2 minimum.

Charakter křivek je úplně analogický jako pro případ funkce W.

γ) *Diskuse* W_2. Výraz W_2 nabývá jediného extrému a sice maxima v bodě

$$\xi_1 \doteq \frac{k^2\eta}{d_1{}^2 + \eta^2}; \tag{54}$$

je-li $\eta = 0$, existuje tento extrém v bodě $\xi_1 = 0$; je-li $\eta < 0$, leží ξ_1

nalevo od bodu $\xi = 0$, je-li $\eta > 0$, leží ξ_1 napravo od bodu $\xi = 0$. Vzrůstá-li k (při čemž η = konst.), vzdalují se maxima stále směrem od bodu $\xi = 0$. Vzrůstá-li η co do absolutní hodnoty (při čemž k = konst.), nabývá ξ_1 maximální vzdálenosti od bodu $\xi = 0$ pro $\eta = d_1$.

Je-li $\eta = 0$, pak je resonanční křivka W_2 symetrická podle osy W_2, která jde bodem $\xi = 0$ a tudíž vrcholem resonanční křivky. Rozladění, pro které klesne W_2 na polovinu své maximální hodnoty $W_2^{(\xi=0)}$, je dáno výrazem

$$|\xi_0| = d_2 + \frac{k^2}{d_1} \quad \text{čili} \quad \left(\omega L_2 - \frac{1}{\omega C_2}\right) = R_2 + \frac{\omega^2 L_{12}^2}{R_1}, \tag{55}$$

kde $\omega^2 L_{12}^2/R_1$ je odpor indukovaný z kruhu primárního do kruhu sekundárního. Určujeme tedy útlum d_2 z resonanční křivky vždy s jistou chybou. Je-li d_1 a d_2 řádu 10^{-2}, k řádu 10^{-3}, určujeme d_2 ještě s chybou 1%, vyjímaje chyby pozorovací. Je-li při tom L_1 a L_2 řádu 10^{-4} Henry, je měření zatíženo touto chybou ještě při vazbě $L_{12} = 10^{-7}$ Henry, čili řádově při vazbě $L_{12} = 100\,cm$. Abychom se vyvarovali uvedených chyb, plynoucích již z metody samé, je nutno měřiti při extrémně volné vazbě. Proto při měření útlumu volíme raději některou jinou metodu.[5]) Pro $k^2 = d_1 d_2$, čili pro optimální vazbu (viz rovnici (40)) je $\xi_0 = 2d_2$; je tedy šířka resonanční křivky pro $\frac{1}{2} W_2^{(\xi=0)}$ při optimální vazbě dvakrát větší než šířka resonanční křivky při velmi volné vazbě. Totéž platí i pro redukovanou resonanční křivku $W_2/W_2^{(\xi=0)}$.

Je-li $\eta \neq 0$, pak je maximum křivky W_2, které označíme $W_2^{(\xi_1)}$, vždy posunuto (rovnice (54)). Klademe-li

$$v = \frac{W_2^{(\xi_1)}}{W_2},$$

lze psáti rovnici (49) též ve tvaru

$$(d_1^2 + \eta^2)\,\xi^2 - 2k^2\eta\xi + (1 - v)(k^2 + d_1 d_2)^2 + (1 - v)\,d_2^2\eta^2 + \\ + v\,\frac{k^4\eta^2}{d_1^2 + \eta^2} = 0. \tag{56}$$

Označíme-li kořeny této rovnice, t. j. rozladění odpovídající téže hodnotě W_2 (resp. v), $\xi^{(1)}$ a $\xi^{(2)}$, pak je

$$\xi^{(1)} + \xi^{(2)} = \frac{2k^2\eta}{d_1^2 + \eta^2} = 2\xi_1$$

podle rovnice (54) nezávisle na v. Ježto výraz $\frac{1}{2}(\xi^{(1)} + \xi^{(2)})$ dává abscissu bodu, dělícího šířku resonanční křivky ve výši v, je z toho

[5]) Pauli: Zeitschrift für Physik, sv. 5, str. 376 a sv. 6, str. 118 (1921), Zeitschrift für technische Physik, sv. 10, čís. 12, str. 592 (1929).

patrno, že křivka spojující tyto body je kolmice vedená vrcholem resonanční křivky k ose ξ. Je tudíž resonanční křivka vzhledem k této kolmici symetrická. Její asymetrie vzhledem k ose ξ je dána hodnotou ξ_1.

Šířka resonanční křivky je dána rozdílem kořenů rovnice (56)

$$\xi^{(1)} - \xi^{(2)} = 2d_2\sqrt{v-1}\sqrt{1 + \frac{k^2}{d_1^2+\eta^2}\,\frac{k^2+2d_1d_2}{d_2^2} - \frac{k^4}{(d_1^2+\eta)^2}\,\frac{d_2^2}{\eta^2}}.$$

Je-li $v = 2$, čili klesne-li W_2 na polovinu své maximální hodnoty $W_2^{(\xi_1)}$, pak je

$$\tfrac{1}{2}(\xi^{(1)} - \xi^{(2)}) = d_2\sqrt{1 + \frac{k^2}{d_1^2+\eta^2}\,\frac{k^2+2d_1d_2}{d_2^2} - \frac{k^4}{(d_1^2+\eta^2)^2}\,\frac{\eta^2}{d_2^2}}.$$

Odmocnina udává chybu, s jakou je stanoveno d_2 z resonanční křivky pro $\eta \neq 0$. Touto chybou netřeba se blíže zabývati, ježto máme vždy možnost prováděti měření útlumu pro $\eta = 0$, kde je dána korekce daleko jednodušším výrazem (rovnice (55)).

2. Podmínky pro maximální přenos energie.

a) *Frekvence ω, ω_2 jsou konstantní, ω_1 je proměnné.* Jsou-li ω_2 a E konstantní, pak jsou energie W_1 a W_2 funkcemi pouze veličin η a k. Jedná-li se tedy o to vyšetřiti podmínky pro maximální přenos energie z kruhu primárního do kruhu sekundárního, je třeba stanoviti, kdy W_2 nabývá maxima jakožto funkce η a současně maxima jakožto funkce k.

Měníme-li ω_1 resp. η, nabývá W_2 maxima pro hodnotu

$$\eta_1 = \frac{k^2\xi}{d_2^2+\xi^2}$$

(viz rovnici (50)), pro kterou existuje také maximum W_1. Dosaďme tedy do W_1 a W_2 (rovnice (48) a (49)) za η hodnotu η_1 a označme tyto hodnoty $W_1^{(\eta_1)}$ a $W_2^{(\eta_1)}$.

Nyní je třeba ještě stanoviti podmínku, kdy tato maxima $W_2^{(\eta_1)}$ jsou zároveň maximy v závislosti na k. Derivujeme tedy $W_2^{(\eta_1)}$ podle k, položíme tuto derivaci rovnu nule a získáme tak pro optimální maximum $W_2^{(\eta_1)}$ podmínku

$$k_0^2 = d_1d_2\left(1 + \frac{\xi^2}{d_2^2}\right). \tag{57}$$

V předcházející I. části této práce stanovil jsem pro maximální přenos energie za předpokladu $\omega = \omega_1 = \omega_2$, čili $\xi = \eta = 0$, optimální podmínku vztahem $k_0^2 = d_1d_2$ (rovnice (40)). Tato podmínka plyne i z rovnice (57), klademe-li podle předpokladu $\xi = 0$.

Pro tento případ ($\xi = 0$) při optimální vazbě $k = \sqrt{d_1 d_2}$ platí $W_1 = W_2 = \frac{1}{4} E^2/R_1$. Za předpokladu, že $\xi \neq 0$ a že platí rovnice (50) a (57), plyne dosazením do rovnic (48) a (49), že i pro tento případ je splněn vztah

$$W_1^{(\eta_1, k_0)} = W_2^{(\eta_1, k_0)} = \frac{1}{4} \frac{E^2}{R_1}. \tag{58}$$

b) *Frekvence ω, ω_1 jsou konstantní, ω_2 je proměnné.* Úplně analogicky se dá ukázati, že pro maxima energií $W_2^{(\xi_1)}$ (kde ξ_1 je dáno rovnicí (54)) existuje v závislosti na k jedno maximum největší. Zjistíme-li opět extrém $W_2^{(\xi_1)}$ v závislosti na k, získáme pro optimální vazbu analogickou podmínku k rovnici (57)

$$k_0^2 = d_1 d_2 \left(1 + \frac{\eta^2}{d_1^2}\right). \tag{59}$$

Pro vazbu definovanou touto rovnicí jest opět

$$W_1^{(\xi_1, k_0)} = W_2^{(\xi_1, k_0)} = \frac{1}{4} \frac{E^2}{R_1}.$$

Tento fakt má zvláště pro přijimače elektromagnetických vln značnou důležitost.

Konečně by zbývalo ještě vyšetřiti průběh výrazu

$$y = \frac{W_2}{W_1} = \frac{d_2}{d_1} \frac{k^2}{d_2^2 + \xi^2}, \tag{60}$$

který vede za předpokladu ω konstantní, ω_2 proměnné vždy k jednoduchým resonančním křivkám s jediným maximem v bodě $\xi = 0$. Klesne-li y na polovinu své maximální hodnoty, čili je-li

$$y = \frac{1}{2} \frac{k^2}{d_1 d_2},$$

je poloviční šířka resonanční křivky $y = f(\xi)$ právě rovna útlumu sekundárního kruhu čili

$$\xi_0 = d_2.$$

Můžeme tudíž tímto způsobem stanoviti útlum d_2 nezávisle na k na rozdíl od rovnice (55).

O vlastnostech křivek $y = f(\xi)$ definovaných rovnici (60) jsem pojednal ve svém článku v „Rozhledech“ roč. 7, čís. 4, str. 117 (1928) a proto by bylo zbytečné odvozené výsledky zde znovu uváděti.

Mimo to bych se ještě rád zmínil o tom, že všechny rovnice uvedené v této práci byly odvozeny úplně přesně; dá se tudíž očekávati, že odvozené výsledky budou v mezích pozorovacích chyb souhlasiti s hodnotami získanými experimentálně. Předběžná měření tento předpoklad velmi dobře potvrzují; podrobné experimentální výsledky budou podány v práci jiné.

II. oddělení fysikálního ústavu Karlovy university v Praze.

Contribution à la théorie de deux circuits oscillatoires couplés.

(Extrait de l'article précédent.)

Dans ce travail on discute les formules pour les énergies W, W_1, W_2 (établies dans le travail précédent (Ière partie)) pour deux cas spéciaux: A) En supposant que les fréquences propres ω_1, ω_2 de l'un et de l'autre circuit sont constantes, $\omega_1 \neq \omega_2$, ω étant variable. B) En supposant que la fréquence ω est constante et tantôt ω_1, tantôt ω_2 est variable.

La discussion des formules W, W_1, W_2 au cas A) conduit à une équation du 5ème degré qui fournit une solution trés compliquée. C'est pourquoi on a renoncé à une classification de ces courbes.

Au contraire, la solution du cas B) est très simple, puisqu' elle est donnée par une équation quadratique; elle est parfaitement précise. La fréquence ω_1 étant variable, les énergies W, W_1, W_2 sont données par des courbes de résonance simples, avec un maximum au même point (l'équation (50)). La fréquence ω_2 étant variable, les énergies W et W_1 prennent deux valeurs extrêmes, un maximum et un minimum (les équations (51) et (52)), W_2 est donné constamment par une courbe simple avec un seul maximum (l'équation (54)). Pour les deux cas (ω_1 variable, ω_2 variable) on a établi, par les équations (57) et (59), aussi les conditions pour le transport maximum de l'énergie du circuit primaire dans le circuit secondaire.