Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky

Josef Langr

Příspěvek ku geometrii lichoběžníka

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 32 (1903), No. 3, 276--285

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/109064

směrnice tečen v těchto bodech (dle $A = \frac{p}{y}$)

$$A_1 = \frac{1}{2\xi}(\eta - \sqrt{\eta^2 - 2p\xi}),$$

$$A_2 = \frac{1}{2\xi}(\eta + \sqrt{\eta^2 - 2p\xi}),$$

a vložíce tyto hodnoty do vzorce

$$\frac{A_2 - A_1}{1 + A_1 A_2} = k,$$

nabudeme jakožto rovnici uvažovaného geometrického místa

$$k^2 (2\xi + p)^2 = 4 (\eta^2 - 2p\xi).$$

Příspěvek ku geometrii lichoběžníka.

Napsal

Josef Langr,

c. a k. inženýr námořního dělostřelectva v Pulji.

1. Jest dán lichoběžník $ABCD$ (obr. 1). Protilehlými vrcholy A, C vedeme libovolné rovnoběžky, jež protínají ramena lichoběžníka v bodech E, F. Spojnice těchto průsečíků s druhými protilehlými vrcholy B, D jsou rovnoběžny. Tedy, je-li

$$AE \parallel FC, \text{ jest } DE \parallel FB.$$

Důkaz odvodíme snadno. Poznamenejme k vůli zjednodušení

$$\overline{AB} = a_1, \quad \overline{DC} = a_2, \quad \overline{AD} = b_1, \quad \overline{BC} = b_2,$$

a
$$\frac{a_1}{a_2} = \alpha, \quad \frac{\overline{AF}}{\overline{FD}} = \mu \quad \text{a} \quad \frac{\overline{BE}}{\overline{EC}} = \nu.$$

Průsečík ramen buď O.

Pak jest

$$\overline{OC} : \overline{OF} = \overline{OE} : \overline{OA},$$

a
$$\overline{OC} : \overline{OD} = \overline{OB} : \overline{OA}$$

čili

$$\overline{OC}.\overline{OA} = \overline{OF}.\overline{OE}$$

a

$$\overline{OC}.\overline{OA} = \overline{OD}.\overline{OB}$$

tedy

$$\overline{OF}.\overline{OE} = \overline{OD}.\overline{OB}$$

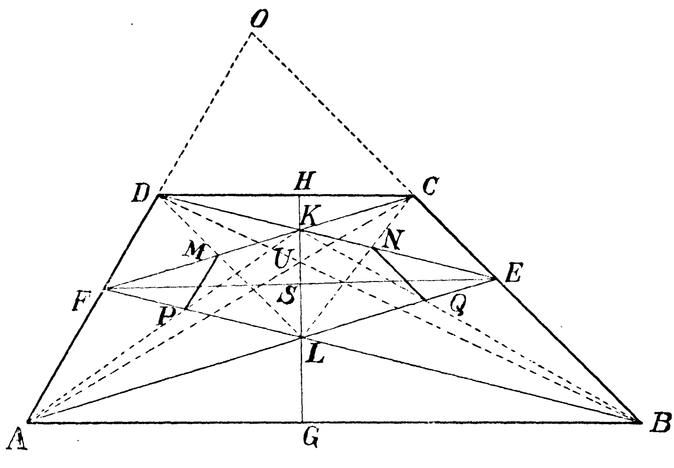
pročež

$$\overline{OF}:\overline{OD} = \overline{OB}:\overline{OE}$$

a musí tedy býti

$$\overline{DE} \parallel \overline{FB}.$$

Spojnice $\overline{EF}$ jest ovšem jen ve zvláštním případě rovnoběžna s $\overline{AB}$.



Obr. 1.

2. Výše uvedené indexy poměrové α, μ a ν spojeny jsou zajímavým vztahem, který tuto odvodíme.

Jestiť

$$\frac{\overline{AF}}{\overline{FD}} \cdot \frac{\overline{BE}}{\overline{EC}} = \mu\nu;$$

avšak

$$\frac{\overline{AF}}{\overline{EC}} = \frac{\overline{OF}}{\overline{OC}} \quad \text{a} \quad \frac{\overline{BE}}{\overline{FD}} = \frac{\overline{OE}}{\overline{OD}},$$

tedy

$$(1)\qquad \mu\nu = \frac{\overline{OF}\,.\,\overline{OE}}{\overline{OC}\,.\,\overline{OD}} = \frac{\overline{OC}\,.\,\overline{OA}}{\overline{OC}\,.\,\overline{OD}} = \frac{a_1}{a_2} = \alpha.$$

Zmíněné dva páry rovnoběžek určují kosodélník $EKFL$, jehož plochu označme 2Δ. Jestliže zavedeme dále pro plochy $\triangle ABL = \Delta_1$, $\triangle CDK = \Delta_2$, jest

$$(2)\qquad \Delta^2 = \Delta_1 \Delta_2 .$$

Jesti totiž

$$\Delta : \Delta_1 = \overline{FL}\,.\,\overline{EL} : \overline{AL}\,.\,\overline{BL},$$
$$\Delta \quad \Delta_2 = \overline{FK}\,.\,\overline{EK} : \overline{DK}\,.\,\overline{CK},$$

a

$$\Delta^2 = \Delta_1 \Delta_2 \,.\, \frac{\overline{FL}\,.\,\overline{EL}\,.\,\overline{FK}\,.\,\overline{EK}}{\overline{AL}\,.\,\overline{BL}\,.\,\overline{DK}\,.\,\overline{CK}}.$$

Jelikož však

$$\frac{\overline{FL}}{\overline{DK}} = \mu, \quad \frac{\overline{EL}}{\overline{CK}} = \nu, \quad \frac{\overline{FK}}{\overline{AL}} = \frac{1}{\mu}, \quad \frac{\overline{EK}}{\overline{BL}} = \frac{1}{\nu},$$

jest

$$\Delta^2 = \Delta_1 \Delta_2 .$$

Poněvadž trojúhelníky Δ_1 a Δ_2 jsou si podobny, jest v platnosti též věta

$$(3)\qquad \Delta_1 : \Delta_2 = \alpha^2,$$

z čehož plyne

$$(4)\qquad \Delta = \alpha \Delta_2 = \frac{1}{\alpha} \Delta_1 .$$

3. Označme plochu celého lichoběžníka $ABCD = P$, a jeho díly $ABEF = P_1$, $CDEF = P_2$, a hledejme další relace.

Zaveďme též symboly

$$\triangle ALF = \Delta_1^\mu, \quad BLE = \Delta_1^\nu, \quad FKD = \Delta_2^\mu, \quad KCE = \Delta_2^\nu .$$

Pak jest

$$(5)\qquad \begin{aligned} P_1 &= \Delta_1 + \Delta_1^\mu + \Delta_1^\nu + \Delta, \\ P_2 &= \Delta_2 + \Delta_2^\mu + \Delta_2^\nu + \Delta . \end{aligned}$$

Uvážíme-li, že

$$\frac{\Delta_1}{\Delta_1^\mu} = \nu, \quad \frac{\Delta_1}{\Delta_1^\nu} = \mu,$$

a
$$\frac{\Delta_2}{\Delta_2^\mu}=\frac{1}{\nu},\quad \frac{\Delta_2}{\Delta_2^\nu}=\frac{1}{\mu},$$
jest

$$(6)\qquad \Delta_1\Delta_2=\Delta_1^\mu\Delta_2^\mu \quad \text{a} \quad \Delta_1\Delta_2=\Delta_1^\nu\Delta_2^\nu,$$

a také
$$\Delta_1^\mu\Delta_2^\mu=\Delta_1^\nu\Delta_2^\nu.$$

Substitucí do rovnic (5) docílíme

$$\begin{aligned}P_1&=\Delta\alpha+\Delta\frac{\alpha}{\nu}+\Delta\frac{\alpha}{\mu}+\Delta\\&=\Delta(\alpha+\mu+\nu+1)\end{aligned}$$

a podobně

$$P_2=\frac{\alpha+\mu+\nu+1}{\alpha},$$

z čehož srovnáním plyne

$$(8)\qquad P_1:P_2=\alpha,\quad P_1=\frac{\alpha P}{\alpha+1},\quad P_2=\frac{P}{\alpha+1}.$$

Dělí tedy příčka EF plochu lichoběžníka na 2 díly, mající se k sobě jako přilehlé základny lichoběžníka.*)

4. Studujme nyní vlastnosti útvarů vzniklých vedením úhlopříčky KL. Tato protíná základny lichoběžníka v bodech G, H. Označme poměry

$$\overline{AG}:\overline{GB}=\alpha_1 \quad \text{a} \quad \overline{DH}:\overline{HC}=\alpha_2$$

a určeme blíže jich hodnoty.

K tomu účeli poznamenejme

$$\begin{aligned}\triangle AGL&=\Delta'_\mu, & GBL&=\Delta'_\nu,\\ DHK&=\Delta''_\mu, & HCK&=\Delta''_\nu.\end{aligned}$$

Jestliže střed rovnoběžníka $FLEK$ označen jest S, má se

*) Plocha trojúhelníka OFE jesl konstantní, a obaluje tedy při různých μ, ν příčka EF hyperbolu, jak známo. Táž hyperbola jest geom. místem bodu S půlícího EF.

$$\Delta'_\mu : \frac{\Delta}{2} = \overline{AL} \,.\, \overline{LG} : \overline{EL} \,.\, \overline{LS} = \mu \,.\, \frac{\overline{LG}}{\overline{LS}}$$

a
$$\Delta'_\nu : \frac{\Delta}{2} = \nu \, \frac{LG}{LS},$$

z čehož plyne

$$\Delta'_\mu : \Delta'_\nu = \mu : \nu. \tag{9}$$

Poněvadž však

$$\frac{\Delta'_\mu}{\Delta'_\nu} = \alpha_1,$$

jest

$$\alpha_1 = \frac{\mu}{\nu}. \tag{10}$$

Analogicky lze odvoditi rovnici

$$\alpha_2 = \frac{\nu}{\mu}. \tag{11}$$

z čehož plyne zajímavý výsledek

$$\alpha_1 \alpha_2 = 1 \tag{12}$$

čili

$$\overline{AG} : \overline{BG} = \overline{CH} : \overline{DH}.$$

Pro plochy trojúhelníků snadným způsobem pak obdržíme vzorce

$$\Delta'_\mu = \Delta \,.\, \frac{\alpha\mu}{\sigma}, \quad \Delta'_\nu = \Delta \,.\, \frac{\alpha\nu}{\sigma},$$

$$\Delta''_\mu = \Delta \,.\, \frac{1}{\mu\sigma}, \quad \Delta''_\nu = \Delta \,.\, \frac{1}{\nu\sigma},$$

kdež

$$\sigma = \mu + \nu.$$

Z těchto vzorců získáme úměru

$$\frac{\overline{GA}}{\overline{HC}} = \frac{\overline{GB}}{\overline{HD}} = \alpha, \tag{13}$$

která praví, že příčka HG prochází průsečíkem U úhlopříček lichoběžníka $ABCD$, neboť jest

$$\frac{\overline{GU}}{\overline{HU}} = \alpha.$$

Lze tedy vysloviti obecnou větu: Mění-li se poměry μ, ν, otáčí se úhlopříčka HG okolo svého bodu U, který jest průsečíkem úhlopříček daného lichoběžníka.

Poměr $UL : UK$ lze vyjádřiti následovně:

$$\frac{\overline{UL}}{\overline{UK}} = \frac{\overline{UG} - \overline{LG}}{\overline{UH} - \overline{KH}} = \frac{\overline{UH} \cdot \alpha - \overline{KH} \cdot \alpha}{\overline{UH} - \overline{KH}} = \alpha.$$

Dělí tedy bod U úhlopříčku KL na 2 díly v poměru α.

5. Úhlopříčka GH dělí lichoběžník na 2 díly, jichž plochy označme P_μ a P_ν. Tyto lze vyjádřiti následovně:

$$P_\mu = \Delta'_\mu + \Delta_1^\mu + \Delta_2^\mu + \Delta''_\mu + \Delta,$$
$$P_\nu = \Delta'_\nu + \Delta_1^\nu + \Delta_2^\nu + \Delta''_\nu + \Delta.$$

Příslušným dosazením vychází

$$P_\mu = \Delta \cdot \frac{(\alpha + \sigma + 1)(\alpha\mu + \nu)}{\alpha\sigma},$$
$$P_\nu = \Delta \cdot \frac{(\alpha + \sigma + 1)(\alpha\mu + \mu)}{\alpha\sigma}.$$

S ohledem na dříve získané vzorce pro P_1 a P_2 lze psáti

$$P_\mu = P_1 \frac{\alpha\mu + \nu}{\alpha\sigma} = P_2 \frac{\alpha\mu + \nu}{\sigma},$$
$$P_\nu = P_1 \frac{\alpha\nu + \mu}{\alpha\sigma} = P_2 \frac{\alpha\nu + \mu}{\sigma},$$

a $$P_\mu : P_\nu = (\alpha\mu + \nu) : (\alpha\nu + \mu).$$

Úhlopříčky FE a GH dělí lichoběžník na 4 čtyrúhelníky, jichž plochy označme

$$AGSF = P_1^\mu, \qquad BGSE = P_1^\nu,$$
$$FSHD = P_2^\mu, \qquad SECH = P_2^\nu.$$

Vzorce pro tyto plochy jsou

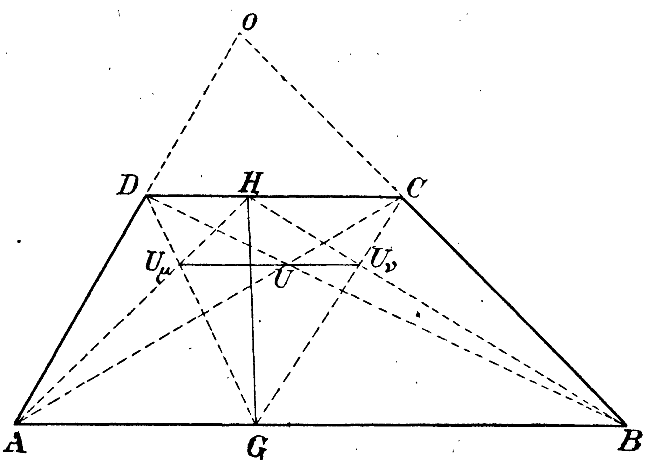
$$
(15)\quad
\begin{aligned}
P_1^{\mu} &= \varDelta \,.\, \frac{2\alpha\mu + 2\mu\sigma + \sigma}{2\sigma}, &
P_1^{\nu} &= \varDelta \,.\, \frac{2\alpha\nu + 2\nu\sigma + \sigma}{2\sigma}, \\
P_2^{\mu} &= \varDelta \,.\, \frac{\mu\sigma + 2\sigma + 2}{2\sigma\mu}, &
P_2^{\nu} &= \varDelta \,.\, \frac{\nu\sigma + 2\sigma + 2}{2\nu\sigma}.
\end{aligned}
$$

Zajímavý jest výsledek

$$
(16)\qquad (P_1^{\nu} - P_2^{\mu}) : (P_1^{\mu} - P_2^{\nu}) = \nu : \mu
$$

a lze jej snadno na základě vzorců (15) odvoditi.

6. Vzpomeňme ještě následujících vlastností:



Obr. 2.

Spojíme-li bod L s vrcholy C, D a bod K s vrcholy A, B, vzniknou na stranách rovnoběžníka $FLEK$ průsečíky M, N, P, Q, a jest

$$
MP \parallel AD \quad \text{a} \quad NQ \parallel CB,
$$

což vysvítá z úměr

$$
DM : ML = FP : PL = 1 : \mu,
$$

a

$$
CN : NL = EQ : QL = 1 : \nu.
$$

V dalším chceme poukázati ještě na jinou vlastnost lichoběžníka.

7. Mysleme si lichoběžník $ABCD$ (obr. 2.) daný v soustavě os pravoúhelných souřadnicemi

$$A(x_1, 0),\quad B(x_2, 0),\quad C(x_3, h),\quad D(x_4, h)$$

a rozdělme jej libovolnou přímkou GH na 2 nové lichoběžníky, kde G, H jsou průsečíky na základnách, o souřadnicích

$$G(x_5, 0),\quad H(x_6, h)$$

a označme plochy

$$ABCD = P,\quad AGHD = P_\mu,\quad GHCB = P_\nu$$

a průsečíky úhlopříček U, U_μ, U_ν.

Tu platí věta, že všecky 3 průsečíky nalézají se na jediné přímce a

$$\overline{U_\mu U} : \overline{U_\nu U} = P_\nu : P_\mu.$$

Označíme-li souřadnice průsečíků

$$U_\mu(\xi_\mu, \eta_\mu),\quad U_\nu(\xi_\nu, \eta_\nu) \quad \text{a} \quad U(\xi, \eta),$$

jest

$$\xi = \frac{x_2 x_3 - x_1 x_4}{2P} h, \qquad \eta = \frac{h^2 a_1}{2P},$$

$$\xi_\mu = \frac{x_5 x_6 - x_1 x_4}{2P_\mu} h, \qquad \eta_\mu = \frac{h^2 a_\mu}{2P_\mu},$$

$$\xi_\nu = \frac{x_2 x_3 - x_5 x_6}{2P_\nu} h \quad \text{a} \quad \eta_\nu = \frac{h^2 a_\nu}{2P_\nu},$$

kde značí $a_1 = AB$, $a_\mu = AG$, $a_\nu = GB$.

Náležitým upravením docílíme výsledků

$$\frac{\xi_\mu - \xi}{\xi - \xi_\nu} = \frac{P_\nu}{P_\mu} \quad \text{a} \quad \frac{\eta_\mu - \eta}{\eta - \eta_\nu} = \frac{P_\nu}{P_\mu}$$

čili

$$\frac{\xi_\mu - \xi}{\xi - \xi_\nu} = \frac{\eta_\mu - \eta}{\eta - \eta_\nu},$$

to jest body U_μ, U_ν, U leží na společné přímce a

$$\overline{UU_\mu} : \overline{UU_\nu} = P_\nu : P_\mu,$$

kterážto věta upomíná na větu platnou ohledně těžisek. Jsou-li totiž T_μ, T_ν, a T těžiska našich 3 lichoběžníků, jest

$$TT_\mu : TT_\nu = P_\nu : P_\mu.$$

Poznámka redakční.

1. Že plocha trojúhelníka OFE jest konstantní, jak na str. 279. se tvrdí, lze odůvodniti takto:

Označíme-li obsah trojúhelníka ODC písmenem Q, jest

$$Q : (P + Q) = a_2^2 : a_1^2 = 1 : \alpha^2,$$

tudíž

$$Q = \frac{P}{\alpha^2 - 1};$$

potom jest však

$$\triangle OFE = Q + P_2 = \frac{\alpha P}{\alpha^2 - 1}.$$

Obsah trojúhelníka OFE nezávisí tudíž na μ, ν čili na směru příček AE, CF, nýbrž jen na P a α, t. j. na ploše daného lichoběžníka a na poměru jeho půdic.

2. Věta, že body U, U_μ, U_ν leží v jedné přímce, jest jen zvláštním případem věty platné o dvou libovolných přímkách P, P_1 v rovině:

Jsou-li v přímce P body a, b, c a v přímce P_1 body a_1, b_1, c_1, leží průsečíky spojnic

$$ab_1, \; a_1 b, \quad bc_1, \; b_1 c, \quad ca_1, \; c_1 a$$

v jediné přímce O.

Tuto větu znal již *Pappus*. Přímka O slove v novější geometrii *osou řad projektivných* určených družinami aa_1, bb_1, cc_1.

Z téže věty plyne, že body K, L, U (obr. 1.) jsou v jedné přímce.

3. Srovnávajíce obsahy Δ_1, Δ_2, Δ s obsahem P lichoběžníka, přijdeme k výsledku

$$\frac{\Delta_1}{\alpha^2} = \frac{\Delta}{\alpha} = \frac{\Delta_2}{1} = \frac{P}{(\alpha + 1)(\mu + 1)(\nu + 1)}.$$

Maximální hodnoty nabude Δ a tudíž i obsah kosodélníka $EKFL$, je-li $EF \parallel AB$; potom jest

$$EF = \sqrt{AB \cdot CD},$$

$$\mu = \nu = \sqrt{\alpha}, \quad \Delta = \frac{\alpha P}{(\alpha + 1)(\sqrt{\alpha} + 1)^2}.$$

Tyto výsledky vyvoditi zůstavujeme ku cvičení čtenáři.

Čtyrúhelník o největší ploše.

Napsal

Ant. Sýkora,
professor v Rakovníku.

Vyšetřme, který čtyrúhelník, jehož za sebou jdoucí strany jsou a, b, c, d, má největší plochu.

Veďme úhlopříčku x, jež dělí čtyrúhelník na trojúhelníky o stranách a, b, x; c, d, x; plochy jejich jsou

$$\Delta_1 = \frac{1}{4}\sqrt{(a+b+x)(a+b-x)(x+a-b)(x-a+b)}$$

$$= \frac{1}{4}\sqrt{[(a+b)^2 - x^2][x^2 - (a-b)^2]},$$

$$\Delta_2 = \frac{1}{4}\sqrt{(c+d+x)(c+d-x)(x+c-d)(x-c+d)}$$

$$= \frac{1}{4}\sqrt{[(c+d)^2 - x^2][x^2 - (c-d)^2]}$$

a plocha čtyrúhelníka

$$u = \frac{1}{4}\sqrt{[(a+b)^2 - x^2][x^2 - (a-b)^2]}$$
$$+ \frac{1}{4}\sqrt{[(c+d)^2 - x^2][x^2 - (c-d)^2]}.$$

Znamenáme-li tu

$$\text{(A)} \quad \begin{aligned} (a+b)^2 &= \alpha, \quad (a-b)^2 = \beta, \\ (c+d)^2 &= \gamma, \quad (c-d)^2 = \delta, \\ x^2 &= \xi, \end{aligned}$$