Antonín Sýkora

Trojúhelník z těžnic daného trojúhelníka

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 32 (1903), No. 3, 292--295

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/109058`

nesme na X délku OM = OL a veďme MN || FH. Potom jest $\overline{OM} = x$, $\overline{ON} = y$.

Důkaz: Dle sestrojení jest

$$OE : OM = OM : OK = ON : OG,$$

pročež EN || MG a tudíž

$$\triangle OEG = \triangle OMN$$

čili

$$\frac{1}{2} a (c + c_1) \sin \alpha = \frac{1}{2} \overline{OM} \,.\, \overline{ON} \,.\, \sin \alpha.$$

Jest tedy

$$\overline{OM} \,.\, \overline{ON} = a (c + c_1) = ac + bd;$$

mimo to jest

$$\frac{\overline{OM}}{\overline{ON}} = \frac{OF}{OH} = \frac{b + b_1}{d + d_1} = \frac{ab + cd}{ad + bc}.$$

Z toho patrno, že

$$\overline{OM} = x, \quad \overline{ON} = y$$

jsou délky úhlopříček čtyrúhelníka tětivového, stranami a, b, c, d určeného.

Trojúhelník z těžnic daného trojúhelníka.

Napsal

Antonín Sýkora,
professor v Rakovníku.

Poznamenáme-li nejdelší stranu nerovnostranného trojúhelníka písmenem a, nejkratší c, tak že

(A) $$a > b > c,$$

a příslušné těžnice po řadě α, β, γ, máme (v. str. 86. t. r.)

$$2\alpha^2 = b^2 + c^2 - \frac{a^2}{2},$$
$$2\beta^2 = a^2 + c^2 - \frac{b^2}{2},$$
$$2\gamma^2 = a^2 + b^2 - \frac{c^2}{2}.$$

Odečtouce první z těchto rovnic od druhé, a tuto od třetí, dostaneme

$$\beta^2 - \alpha^2 = \frac{3}{4}(a^2 - b^2),$$
$$\gamma^2 - \beta^2 = \frac{3}{4}(b^2 - c^2),$$

z čehož patrno, hledíc k výmince (A), že

$$\gamma > \beta > \alpha,$$

t. j. delší straně trojúhelníka přísluší kratší těžnice.

Má-li tedy trojúhelník z těžnic α, β, γ daného trojúhelníka jako stran býti původnímu podoben, třeba aby strany jejich byly úměrny,

$$\alpha : \beta : \gamma = c : b : a$$

anebo

$$\alpha^2 : \beta^2 : \gamma^2 = c^2 : b^2 : a^2,$$

a kladouce za α^2, β^2, γ^2 hodnoty jich výše uvedené,

$$(b^2 + c^2 - \frac{a^2}{2}) : (a^2 + c^2 - \frac{b^2}{2}) : (a^2 + b^2 - \frac{c^2}{2}) = c^2 : b^2 : a^2.$$

Úměra tato rozpadá se na následující dvě rovnice

$$c^2 (a^2 + c^2 - \frac{b^2}{2}) = b^2 (b^2 + c^2 - \frac{a^2}{2}),$$
$$a^2 (a^2 + c^2 - \frac{b^2}{2}) = b^2 (a^2 + b^2 - \frac{c^2}{2})$$

aneb, srovnáme-li první z těchto dvou rovnic dle a^2, druhou dle c^2,

$$a^2(c^2+\frac{b^2}{2}) = 2b^2(c^2+\frac{b^2}{2}) - c^2(c^2+\frac{b^2}{2}),$$
$$c^2(a^2+\frac{b^2}{2}) = 2b^2(a^2+\frac{b^2}{2}) - a^2(a^2+\frac{b^2}{2})$$

čili

$$a^2 = 2b^2 - c^2$$
$$c^2 = 2b^2 - a^2.$$

Obě tyto rovnice redukují se na jedinou

$$\text{(I)} \qquad b^2 = \frac{a^2+c^2}{2}.$$

Pročež máme větu:

Má-li trojúhelník sestrojený z těžnic daného trojúhelníka jako stran býti podoben původnímu, třeba, aby čtverec některé jeho strany byl arithmetickým průměrem čtverců ostatních dvou stran.

Pak jest, jakož snadno najdeme,

$$\alpha = \frac{c}{2}\sqrt{3}, \quad \beta = \frac{b}{2}\sqrt{3}, \quad \gamma = \frac{a}{2}\sqrt{3},$$

t. j. strany nového trojúhelníka jsou zároveň výšky rovnostranných trojúhelníků sestrojených nad stranami trojúhelníka původního.

Poměr stran nového trojúhelníka k původním

$$\frac{\alpha}{c} = \frac{\beta}{b} = \frac{\gamma}{a} = \frac{1}{2}\sqrt{3} = \sin 60^0.$$

Jelikož tu

$$2\beta^2 = \alpha^2 + \gamma^2,$$

vyhovují strany tohoto trojúhelníka opět výmince (I) výše uvedené, a trojúhelník z jeho těžnic jako stran sestrojený jest mu zase podoben; a tak i každý další trojúhelník podobně z předchozího odvozený.

Poznámka. Chceme-li nabýti pro a, b, c celistvých čísel, pišme hodnotu pro b takto:

$$b = \frac{1}{2}\sqrt{(a+c)^2 + (a-c)^2}$$

a kladouce tu

$$a + c = 2mn,$$

$$a - c = m^2 - n^2,$$

je-li

$$2mn > m^2 - n^2$$

a

$$a + c = m^2 - n^2,$$

$$a - c = 2mn,$$

je-li

$$2mn < m^2 - n^2,$$

nabudeme

$$b = \frac{1}{2}(m^2 + n^2).$$

Volíme-li za m a n současně buď sudá, buď za obě lichá čísla, budou a, b, c čísla celistvá.

Je-li na př. $m = 5$, $n = 3$, máme

$$a + c = 30, \quad a - c = 16$$

a odtud

$$a = 23, \quad c = 7, \quad b = 17.$$

Při $m = 6$, $n = 4$ jest

$$a + c = 48, \quad a - c = 20;$$

tedy

$$a = 34, \quad c = 14, \quad b = 26$$

nebo, zkrátíme-li 2ma,

$$a = 17, \quad c = 7, \quad b = 13.$$