d) Buď dána hyperbola reálnou osou svou a asymptotami. Má se sestrojiti tečna rovnoběžně s danou přímkou. (Obr. 2.)

Vzájemná poloha obou průměten budiž jako v obrazci 1. Asymptoty M_2, ${}^1M_2$ buďtež obrysovými přímkami asymptotické rotační plochy kuželové, obalové to plochy veškerých rovin asymptotických, jejíž přímky jsou rovnoběžné s povrchovými přímkami hyperboloidu. Daná přímka P_2, s níž mají býti tečny rovnoběžny, budiž druhým obrazem přímky P, jejíž první obraz máme stanoviti. Vrcholem plochy kuželové o veďme ${}^1P_2 \parallel P_2$ a bodem r_2 ($a_2r_2 \perp X_{1,2}$) rovinu $\varrho \parallel \pi$, která protíná plochu kuželovou v křivce kruhové, jejíž první obraz sjednocuje se v tomto případě s K_1 a přímku ${}^1P$ v bodě m, jehož první obraz jest na K_1. (S druhým obrazem bodu m sjednocuje se též druhý obraz bodu n — oba body jsou na ploše kuželové.) Spojíme-li m_1 nebo n_1 s $o_{1,2}$, obdržíme první obraz přímky ${}^1P$. Ke K_1 sestrojme tečny $P_1' \parallel P_1'' \parallel {}^1P_1$, čímž obdržíme body dotyčné u_1', u_1'', z nichž odvodíme u_2', u_2'' a tím hledané tečny $T_2' \parallel T_2'' \parallel P_2$ s body dotyčnými t_2', t_2''. [Přímkami P', P'' jest určena rovina asymptotická, jež se dotýká plochy kuželové.]

Úloha. Ku hyperbole dané v *d*) sestrojiti tečny bodem mimo křivku daným.

Geometrické místo vrcholu úhlu, jehož ramena dotýkají se křivky druhého stupně.

Napsal

Antonín Sýkora,
professor v Rakovníku.

a) *Pro úhel pravý.*

1. Přímka $y = \mathrm{A}x + \mathrm{B}$ dotýká se *ellipsy*

$$b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2,$$

je-li

$$\mathrm{B}^2 = \mathrm{A}^2a^2 + b^2.$$

Jest tedy

$$\text{(I)} \qquad y = Ax \pm \sqrt{A^2a^2 + b^2}$$

rovnice tečny ellipsy o směrnici A, a rovnice tečny o směrnici A_1

$$y = A_1x \pm \sqrt{A_1^2a^2 + b^2}.$$

Strmí-li tato na oné kolmo, jest $A_1 = -\frac{1}{A}$, a pročež

$$\text{(II)} \qquad y = -\frac{x}{A} \pm \sqrt{\frac{a^2}{A^2} + b^2}$$

rovnice tečny, jež na předešlé kolmo stojí.

O průsečíku (x, y) tečen (I) a (II) platí obě rovnice zároveň; eliminujeme-li z nich měnlivý parametr A, nabudeme rovnice geometrického místa tohoto průsečíku. Za tím účelem pišme ony rovnice ve tvaru

$$\text{(I)} \qquad (y - Ax)^2 = A^2a^2 + b^2$$

$$\text{(II)} \qquad (Ay + x)^2 = a^2 + A^2b^2$$

a sečtěme je; zkrátíce $1 + A^2$, nabudeme

$$\text{(1)} \qquad x^2 + y^2 = a^2 + b^2.$$

Této rovnici vyhovují souřadnice průsečíků tečen k sobě kolmých; poznáváme, že geometrické místo jejich jest kruh s ellipsou soustředný o poloměru $r = \sqrt{a^2 + b^2}$.

Jelikož rovnice (I) a (II) jsou vlastně rovnice dvojic tečen rovnoběžných o směrnicích A a A_1, jest rovnice (1) geometrickým místem vrcholů obdélníka ellipse opsaného. — Všecky obdélníky opsané ellipse jsou vepsány do téhož kruhu.

2. Jinak lze rovnici tohoto geometrického místa odvoditi takto:

Rovnice tečny ellipsy

$$\text{(I)} \qquad b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$$

v bodu (x, y) jest

$$\text{(II)} \qquad b^2xX + a^2yY = a^2b^2,$$

kdež X, Y značí souřadnice měnlivého bodu tečny; prochází-li tato bodem (ξ, η) ležícím mimo ellipsu, vyhovují x, y rovnici

$$\text{(III)} \qquad b^2x\xi + a^2y\eta = a^2b^2.$$

Souřadnic dotýčných bodů tečen bodem (ξ, η) k ellipse vedených nabudeme, rozřešíme-li rovnice (I) a (III) dle neznámých x, y, a vložíme-li hodnoty jejich do rovnice (II), nabudeme rovnic tečných bodem (ξ, η) vedených. — Jak patrno, jde tu tedy o eliminaci neznámých souřadnic x, y bodu dotýčného; tu pak lze vykonati nejsnáze, vypočteme-li z linearných (dle x, y) rovnic (II) a (III), bx, ay, totiž

$$bx = -\frac{a^2b\,(\mathrm{Y}-\eta)}{\mathrm{X}\eta-\mathrm{Y}\xi},$$
$$ay = \frac{ab^2\,(\mathrm{X}-\xi)}{\mathrm{X}\eta-\mathrm{Y}\xi},$$

a vložíme-li tyto hodnoty do rovnice (I); tím nabudeme

$$a^2\,(\mathrm{Y}-\eta)^2 + b^2\,(\mathrm{X}-\xi)^2 = (\mathrm{X}\eta-\mathrm{Y}\xi)^2$$

jakožto rovnice dvojice tečných bodem (ξ, η) k ellipse vedených.

Uspořádáme-li a rozřešíme rovnici tuto dle Y, nabudeme rovnic těchto tečných jednotlivě, totiž

$$\mathrm{Y}^2\,(a^2-\xi^2) - 2\,\mathrm{Y}\,(a^2-\mathrm{X}\,\xi)\,\eta = \mathrm{X}^2\eta^2 - a^2\eta^2 - b^2\,(\mathrm{X}-\xi)^2,$$

$$\mathrm{Y} = \frac{\eta\,(a^2-\mathrm{X}\xi) \pm (\mathrm{X}-\xi)\sqrt{b^2\xi^2+a^2\eta^2-a^2b^2}}{a^2-\xi^2}.$$

Směrnice jejich jsou součinitelé měnlivé úsečky X, t. j.

$$\left.\begin{matrix}\mathrm{A}_1\\ \mathrm{A}_2\end{matrix}\right\} = \frac{-\xi\eta \pm \sqrt{b^2\xi^2+a^2\eta^2-a^2b^2}}{a^2-\xi^2},$$

a mají-li tečny na sobě kolmo státi, třeba, aby

$$\mathrm{A}_1\mathrm{A}_2 + 1 = 0,$$

tedy

$$\frac{\xi^2\eta^2 - a^2\eta^2 - b^2\xi^2 + a^2b^2}{(a^2-\xi^2)^2} + 1 = 0$$

$$\frac{\eta^2\,(\xi^2-a^2) - b^2\,(\xi^2-a^2)}{(\xi^2-a^2)^2} + 1 = 0$$

a konečně

$$\xi^2 + \eta^2 = a^2 + b^2.$$

Této rovnici vyhovují souřadnice bodů (ξ, η), z nichž tečny k ellipse vedené jsou na sobě kolmo. Píšeme-li v rovnici této $-b^2$ místo b^2, nabudeme rovnice geometrického místa vrcholu pravého úhlu, jehož ramena dotýkají se *hyperboly*

$$b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2,$$

totiž

$$\xi^2 + \eta^2 = a^2 - b^2.$$

Z toho vyplývá, že toto místo jest kruh, je-li $a > b$; jedinký bod, je-li $a = b$, t. j. je-li hyperbola rovnoramenná; tu lze vésti k hyperbole jedinou dvojici tečen k sobě kolmých — asymptoty; a konečně kruh imaginárný, je-li $a < b$; tehdy nelze k hyperbole vésti tečen k sobě kolmých

3. Máme-li obecněji kuželosečku v poloze středové

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 = F,$$

najdeme snadno pro průsečíky její s přímkou

$$y = mx + n$$

rovnici

$$x^2 (A + 2Bm + Cm^2) + 2nx (B + Cm) = F - Cn^2$$

a za výminku doteku

$$(AC - B^2)\, n^2 - F (A + 2Bm + Cm^2) = 0.$$

Vypočteme-li odtud úsek n přímky na ose Y,

$$n^2 = \frac{F (A + 2Bm + Cm^2)}{AC - B^2}$$

a vložíme hodnotu jeho do rovnice její, nabudeme rovnice tečny o směrnici m

$$y = mx \pm \sqrt{\frac{F (A + 2Bm + Cm^2)}{AC - B^2}}.$$

Rovnice tečny k ní kolmé vyplyne, zaměníme-li zde m hodnotou $-\dfrac{1}{m}$,

$$y = -\frac{x}{m} \pm \frac{1}{m} \sqrt{\frac{F (Am^2 - 2Bm + C)}{AC - B^2}}.$$

Píšíce tyto rovnice v podobě

$$(y - mx)^2 = \frac{F\,(A + 2Bm + Cm^2)}{AC - B^2}$$

$$(my + x)^2 = \frac{F\,(Am^2 - 2Bm + C)}{AC - B^2}$$

a sečtouce je dostaneme

$$x^2 + y^2 = \frac{F\,(A + C)}{AC - B^2}$$

jakožto rovnici geometrického místa vrchole pravého úhlu, jehož ramena se dotýkají křivky stanovené rovnicí v čele položené.

4. Pro průsečíky *paraboly*

$$y^2 = 2px$$

s přímkou

$$y = Ax + B$$

dostaneme

$$x = \frac{1}{A^2}[p - AB \pm \sqrt{p^2 - 2ABp}],$$

a tudíž výminku, aby se přímka paraboly dotýkala,

$$p = 2AB;$$

vypočteme-li odtud část B, jíž přímka na ose Y odtíná, $B = \frac{p}{2A}$, a vložíme-li ji za B do rovnice přímky, nabudeme rovnice tečny paraboly o směrnici A

$$y = Ax + \frac{p}{2A}.$$

Rovnice tečny k ní kolmé odtud vyplyne, zaměníme-li A hodnotou $-\frac{1}{A}$, čímž dostaneme

$$y = -\frac{x}{A} - \frac{Ap}{2}.$$

Rovnici geometrického místa průsečíku těchto tečen nabudeme, eliminujíce měnlivý parametr A; to pak stane se, odečteme-li je od sebe,

$$x\left(A+\frac{1}{A}\right)+\frac{p}{2}\left(A+\frac{1}{A}\right)=0$$

čili

$$x+\frac{p}{2}=0, \quad x=-\frac{p}{2}.$$

Geometrické místo vrcholu pravého úhlu, jehož ramena dotýkají se paraboly, jest její přímka řídící.

5. *Kuželosečka* v poloze obecné

$$Ax^2+2Bxy+Cy^2+2Dx+2Ey+F=0$$

dává za průsečíky s přímkou $y=mx+n$ body, jichž úsečky stanoveny jsou rovnicí

$$x^2(A+2Bm+Cm^2)+2x(Cmn+Bn+Em+D) \\ +F+2En+Cn^2=0,$$

z níž odvodíme výminku, aby se přímka křivky dotýkala,

$$[n(B+Cm)+D+Em]^2-(F+2En+Cn^2)(A+2Bm+Cm^2)=0,$$

jež spořádána dle n (úseku přímky na ose Y) zní

$$n^2(B^2-AC)-2n[AE-BD+(BE-CD)m]+(D+Em)^2 \\ -F(A+2Bm+Cm^2)=0.$$

Hodnoty n_1, n_2, jež rovnice tato pro n podává, jsou hodnoty úseků obou rovnoběžných tečen uvažované křivky, příslušných směrnici m.

Eliminujíce z rovnice této a z rovnice přímky

$$y=mx+n,$$

hodnotu n, nabudeme rovnice těchto tečných

$$(B^2-AC)(y-mx)^2-2[AE-BD+(BE-CD)m](y-mx) \\ =F(A+2Bm+Cm^2)-(D+Em)^2.$$

Z ní vyplyne rovnice tečen k nim kolmých, zaměníme-li směrnici m hodnotou $-\frac{1}{m}$:

$$(B^2-AC)(my+x)^2-2[(AE-BD)m-(BE-CD)](my+x) \\ =F(Am^2-2Bm+C)-(Dm-E)^2.$$

Geometrické místo průsečíků tečen těmito dvěmi rovnicemi stanovených najdeme, eliminujíce z nich měnlivý parametr m; to stane se, sečteme-li je a zkrátíme pak $1+m^2$; takto nabudeme

$$(B^2-AC)(x^2+y^2)-2y(AE-BD)+2x(BE-CD) = (A+C)F-D^2-E^2.$$

Tato jest tedy rovnice geometrického místa vrcholů obdélníka, jehož strany se dané kuželosečky dotýkají; z ní poznáváme, že přísluší kruhu, jehož poloměr a poloha středu se objeví, uvedeme-li ji na tvar

$$\left(x-\frac{CD-BE}{B^2-AC}\right)^2+\left(y-\frac{AE-BD}{B^2-AC}\right)^2$$
$$=\frac{[(A+C)F-D^2-E^2](B^2-AC)+(AE-BD)^2+(CD-BE)^2}{(B^2-AC)^2}$$
$$=\frac{F(A+C)(B^2-AC)+AC(D^2+E^2)+A^2E^2-2ABDE+C^2D^2-2BCDE}{(B^2-AC)^2}.$$

Střed jeho splývá tedy se středem kuželosečky.

Je-li však $B^2-AC=0$, t. j. je-li křivka parabolou, redukuje se toto geometrické místo na přímku

$$2x(BE-CD)-2y(AE-BD)=(A+C)F-D^2-E^2,$$

kteráž, jak by se dalším vyšetřováním objevilo, její řídící přímce přísluší.

b) *Pro úhel libovolný.*

6. Vyšetřme nyní geometrické místo vrcholu libovolného úhlu φ, jehož ramena dotýkají se *ellipsy*

$$b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2.$$

Jakž jsme v čl. 1. viděli, jest rovnice tečny ellipsy o směrnici A

$$\text{(I)} \qquad y=Ax\pm\sqrt{A^2a^2+b^2}.$$

Má-li druhá tečna, jejíž směrnice budiž A_1, s touto svírati úhel φ, jehož $\operatorname{tg}\varphi=k$, bude

$$\frac{A_1 - A}{1 + AA_1} = k,$$

a tedy

$$A_1 = \frac{A + k}{1 - Ak}$$

a její rovnice

(II) $$y = A_1 x \pm \sqrt{A_1^2 a^2 + b^2}$$

čili

(II) $$[(1 - Ak)\, y - (A + k)\, x]^2 = (A + k)^2 a^2 + (1 - Ak)^2 b^2.$$

Geometrického místa průsečíků obou tečen (I) a (II) nabudeme, eliminujeme-li z těchto jejich rovnic měnlivou směrnici A; toho pak dojdeme nejsnáze následovně. Uveďme též rovnici (I) na tvar

(I′) $$(y - Ax)^2 = A^2 a^2 + b^2,$$

pak znásobivše ji neurčitým činitelem λ přičtěme ji k rovnici předešlé, čímž nabudeme, uspořádajíce zároveň dle x, y,

$$[(1 - Ak)^2 + \lambda]\, y^2 - 2\,[(1 - Ak)(A + k) + A\lambda]\, xy + [(A + k)^2 + A^2\lambda]\, x^2$$
$$= [(A + k)^2 + A^2\lambda]\, a^2 + [(1 - Ak)^2 + \lambda]\, b^2$$

anebo

$$[(1 - Ak)^2 + \lambda]\,(y^2 - b^2) + [(A + k)^2 + A^2\lambda](x^2 - a^2)$$
$$- 2\,[(1 - Ak)(A + k) + A\lambda]\, xy = 0.$$

Volme nyní λ tak, aby zmizel součinitel u xy, t. j.

$$\lambda = \frac{(Ak - 1)(A + k)}{A},$$

pak nabude předešlá rovnice po krátké redukci tvaru

$$(Ak - 1)(y^2 - b^2) + A\,(A + k)\,(x^2 - a^2) = 0,$$

anebo, srovnáme-li ji dle A,

$$A^2 (x^2 - a^2) + Ak\,(x^2 + y^2 - a^2 - b^2) - y^2 + b^2 = 0.$$

Z této pak a z rovnice (I)

$$A^2\,(x^2 - a^2) - 2Axy + y^2 - b^2 = 0,$$

eliminujeme A, sečteme-li a odečteme je,

$$2A(x^2 - a^2) = 2xy - k(x^2 + y^2 - a^2 - b^2),$$
$$A[2xy + k(x^2 + y^2 - a^2 - b^2)] = 2(y^2 - b^2),$$

a tyto poslední rovnice dělíme; tak dostaneme

$$4x^2y^2 - k^2(x^2 + y^2 - a^2 - b^2)^2 - 4(x^2 - a^2)(y^2 - b^2)$$

anebo konečně

$$k^2(x^2 + y^2 - a^2 - b^2)^2 = 4(b^2x^2 + a^2y^2 - a^2b^2)$$

jako rovnici žádaného místa geometrického.

7. Jinak lze rovnice této nabýti, uvážíme-li, že dle čl. 2. jsou směrnice tečen vedených bodem (ξ, η) vně ellipsy ležícím

$$A_1 = \frac{-\xi\eta + \sqrt{b^2\xi^2 + a^2\eta^2 - a^2b^2}}{a^2 - \xi^2},$$
$$A_2 = \frac{-\xi\eta - \sqrt{b^2\xi^2 + a^2\eta^2 - a^2b^2}}{a^2 - \xi^2}.$$

Zavedeme-li hodnoty tyto do výrazu

$$\frac{A_2 - A_1}{1 + A_1A_2} = k,$$

vypočtouce po řadě

$$A_2 - A_1 = \frac{2\sqrt{b^2\xi^2 + a^2\eta^2 - a^2b^2}}{\xi^2 - a^2},$$
$$A_1A_2 = \frac{\xi^2\eta^2 - b^2\xi^2 - a^2\eta^2 + a^2b^2}{(\xi^2 - a^2)^2} = \frac{(\xi^2 - a^2)(\eta^2 - b^2)}{(\xi^2 - a^2)^2}$$
$$= \frac{\eta^2 - b^2}{\xi^2 - a^2},$$

$$1 + A_1A_2 = \frac{\xi^2 + \eta^2 - a^2 - b^2}{\xi^2 - a^2},$$

dostaneme konečně

$$\frac{2\sqrt{b^2\xi^2 + a^2\eta^2 - a^2b^2}}{\xi^2 + \eta^2 - a^2 - b^2} = k$$

čili

$$4(b^2\xi^2 + a^2\eta^2 - a^2b^2) = k^2(\xi^2 + \eta^2 - a^2 - b^2)^2.$$

Zaměníce b^2 za $-b^2$, nabudeme rovnice geometrického místa vrchole úhlu φ, jehož $\operatorname{tang}\varphi = k$ a jehož ramena dotýkají se *hyperboly*

$$b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2,$$

totiž

$$k^2(x^2 + y^2 - a^2 + b^2)^2 = 4(a^2y^2 - b^2x^2 + a^2b^2).$$

Je-li v předešlé rovnici $b = a$, t. j. je-li základní křivka kruh, přejde příslušná křivka ve dvojici kruhovou; jest totiž

$$(x^2 + y^2 - 2a^2)^2 - \frac{4a^2}{k^2}(x^2 + y^2 - a^2) = 0,$$

čili

$$(x^2 + y^2 - 2a^2)^2 - \frac{4a^2}{k^2}(x^2 + y^2 - 2a^2) = \frac{4a^4}{k^2}$$

anebo

$$(x^2 + y^2 - 2a^2\frac{1 + k^2}{k^2})^2 = \frac{4a^4}{k^4}(1 + k^2)$$

a konečně

$$x^2 + y^2 = \frac{2a^2}{k^2}(1 + k^2 \pm \sqrt{1 + k^2}).$$

Jeden z těchto soustředných kruhů přísluší úhlu φ, druhý jeho výplňku $\pi - \varphi$; neboť obecná rovnice platí patrně pro oba tyto úhly, jelikož

$$\operatorname{tang}(\pi - \varphi) = -\operatorname{tang}\varphi = -k,$$

avšak při $-k$ se ona rovnice nezmění, ano

$$(-k)^2 = k^2.$$

Rovněž přejde ona křivka ve dvojici kruhovou, je-li vedlejší osa ellipsy $b = 0$; rovnice těchto kruhů jest

$$x^2 + y^2 - a^2 = \pm\frac{2ay}{k}$$

čili

$$x^2 + (y \mp \frac{a}{k})^2 = \frac{a^2}{k^2}(1 + k^2).$$

V případě tomto procházejí ramena úhlů φ a $(\pi - \varphi)$ dvěma pevnými body, $(a, 0)$, $(-a, 0)$.

Je-li $k = \infty$, t. j. $\varphi = \frac{\pi}{2}$, nabudeme rovnice čl. 1.

8. Pro *parabolu* $y^2 = 2px$ máme dle čl. 4. rovnici tečny o směrnici A

$$y = \mathrm{A}x + \frac{p}{2\mathrm{A}}$$

a rovnici tečny o směrnici A_1

$$y = \mathrm{A}_1 x + \frac{p}{2\mathrm{A}_1}.$$

Má-li úhel φ těmito tečnami sevřený býti takový, aby $\operatorname{tg}\varphi = k$, t. j.

$$\frac{\mathrm{A}_1 - \mathrm{A}}{1 + \mathrm{A}\mathrm{A}_1} = k,$$

tedy

$$\mathrm{A}_1 = \frac{\mathrm{A} + k}{1 - \mathrm{A}k},$$

nabude rovnice druhé tečny tvaru

$$\text{(II)} \quad (\mathrm{A} + k)^2 x - (\mathrm{A} + k)(1 - \mathrm{A}k)\, y + \frac{p}{2}(1 - \mathrm{A}k)^2 = 0;$$

rovnici prvé tečny pak pišme

$$\text{(I)} \qquad \mathrm{A}^2 x - \mathrm{A}y + \frac{p}{2} = 0.$$

Z rovnic těchto jest eliminovati A; to učiníme takto: znásobme (I) neurčitým součinitelem λ, a odečtěme od rovnice (II), čímž nabudeme

$$[(\mathrm{A} + k)^2 - \lambda\mathrm{A}^2]\, x - [(\mathrm{A} + k)(1 - \mathrm{A}k) - \lambda\mathrm{A}]\, y$$
$$+ \frac{p}{2}[(1 - \mathrm{A}k)^2 - \lambda] = 0.$$

Určíme-li nyní λ tak, aby součinitel

$$(\mathrm{A} + k)(1 - \mathrm{A}k) - \lambda\mathrm{A} = 0,$$

tedy

$$\lambda = \frac{(\mathrm{A} + k)(1 - \mathrm{A}k)}{\mathrm{A}},$$

dostaneme z předešlé rovnice

$$(A + k)\, x = \frac{p}{2} \cdot \frac{1 - Ak}{A}$$

čili

$$A^2 x + A\,(kx + \frac{kp}{2}) - \frac{p}{2} = 0.$$

Přičtouce pak a odečtouce rovnici (I) nabudeme

$$2Ax = y - kx - \frac{kp}{2},$$

$$p = A\,(y + kx + \frac{kp}{2})$$

a konečně, znásobíce tyto rovnice,

$$2px = y^2 - k^2\,(x + \frac{p}{2})^2$$

čili

$$k^2\,(x + \frac{p}{2})^2 = y^2 - 2px,$$

jakožto rovnici geometrického místa vrcholu úhlu φ, jehož ramena dotýkají se paraboly.

Rovnice tato přísluší *hyperbole*; polohu a délku poloos její seznáme, uvedeme-li ji na tvar

$$k^2\,[x + \frac{p}{2}\,(1 + \frac{2}{k^2})]^2 - y^2 = p^2\,\frac{1 + k^2}{k^2};$$

střed její jest na ose X ve vzdálenosti $-\frac{p}{2}\,(1 + \frac{2}{k^2})$ od počátku souřadnic a délky poloos jsou

$$a = \frac{p}{k^2}\sqrt{1 + k^2}, \qquad b = \frac{p}{k}\sqrt{1 + k^2}.$$

Chceme-li rovnici tohoto místa geometrického vyvinouti návodem čl. 7., najdeme souřadnice dotýčných bodů tečen paraboly vedených bodem (ξ, η); tyto jsou

$$x_{1,2} = \frac{\eta^2}{p} - \xi \pm \frac{\eta}{p}\sqrt{\eta^2 - 2p\xi},$$

$$y_{1,2} = \eta \pm \sqrt{\eta^2 - 2p\xi};$$

směrnice tečen v těchto bodech (dle $\mathrm{A} = \frac{p}{y}$)

$$\mathrm{A}_1 = \frac{1}{2\xi}(\eta - \sqrt{\eta^2 - 2p\xi}),$$

$$\mathrm{A}_2 = \frac{1}{2\xi}(\eta + \sqrt{\eta^2 - 2p\xi}),$$

a vložíce tyto hodnoty do vzorce

$$\frac{\mathrm{A}_2 - \mathrm{A}_1}{1 + \mathrm{A}_1\mathrm{A}_2} = k,$$

nabudeme jakožto rovnici uvažovaného geometrického místa

$$k^2(2\xi + p)^2 = 4(\eta^2 - 2p\xi).$$

Příspěvek ku geometrii lichoběžníka.

Napsal

Josef Langr,

c. a k. inženýr námořního dělostřelectva v Pulji.

1. Jest dán lichoběžník $ABCD$ (obr. 1). Protilehlými vrcholy A, C vedeme libovolné rovnoběžky, jež protínají ramena lichoběžníka v bodech E, F. Spojnice těchto průsečíků s druhými protilehlými vrcholy B, D jsou rovnoběžny. Tedy, je-li

$$AE \parallel FC, \text{ jest } DE \parallel FB.$$

Důkaz odvodíme snadno. Poznamenejme k vůli zjednodušení

$$\overline{AB} = a_1, \quad \overline{DC} = a_2, \quad \overline{AD} = b_1, \quad \overline{BC} = b_2,$$

a
$$\frac{a_1}{a_2} = \alpha, \quad \frac{\overline{AF}}{\overline{FD}} = \mu \quad \text{a} \quad \frac{\overline{BE}}{\overline{EC}} = \nu.$$

Průsečík ramen buď O.

Pak jest

$$\overline{OC} : \overline{OF} = \overline{OE} : \overline{OA},$$

a
$$\overline{OC} : \overline{OD} = \overline{OB} : \overline{OA}$$