Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky

Václav Hübner

Kterak možno upotřebiti vlastnosti rotačního hyperboloidu jednoplochého na řešení některých úloh o hyperbole

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 32 (1903), No. 3, 259--264

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/109054`

čísla než 20 vhodným jich spojením grammatickým. Tento úkol rozřešiti povedlo se různým národům více nebo méně zdařile dle výše vzdělání „arithmetického", jakého dosáhli. Čím větších čísel národ užívá, tím více je nucen vyslovovati čísla soustavně, dle určitého pravidla, stejného pro všechna čísla. U všech téměř národů vzdělaných pak vrchu nabyla soustava, která užívá deseti číslovek za základ soustavy číslovkové. Ovšem i tu jednotlivci, snad i celé kasty, jako u Babyloňanův, Indův, užívají zároveň jiné soustavy číslovkové, která měla *více* číslovek.

Takovým asi způsobem vyvinuly se soustavy číslovkové nutné pro vyslovování čísel v těch dobách, kdy lidstvo neznalo písma vůbec a číslic zvláště. Když pak národové se naučili psáti, prvotně psali čísla celými slovy, nikoliv zvláštními znaky, číslicemi. Číslice jsou původu daleko mladšího než písmo hláskové. Psaní čísel pak číslicemi v určité soustavě číselné jest výsledek vzájemného vztahu soustavy číslovkové a počtu číslic.

(Pokračování.)

Kterak možno upotřebiti vlastností rotačního hyperboloidu jednoplochého na řešení některých úloh o hyperbole.

Napsal

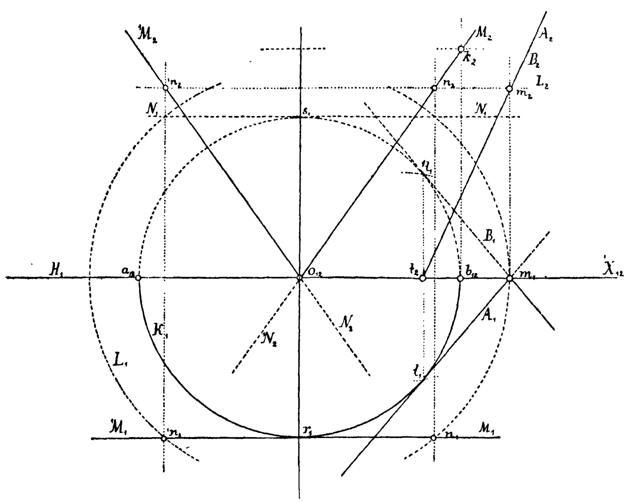
Václav Hübner,

professor na Král. Vinohradech.

a) Budiž dána hyperbola H_2 reálnou osou svou $a_{1,2} b_{1,2}$ a jedním bodem m_2 (obr. 1.). Má se sestrojiti tečna v tomto bodě a obě asymptoty její.

Rovina hyperboly H_2 budiž průmětnou druhou ν, rovina osou reálnou kolmo k ν položená průmětnou první π, osa průmětná X sjednotí se s osou reálnou. Otočí-li se daná hyperbola kolem osy imaginárné, vytvoří, jak známo, plochu rotačního hyperboloidu jednoplochého, jedinou to plochu rotační zároveň sborcenou. Obrys druhý této plochy bude hyperbola H_2, obrys první pak křivka kruhová K_1, opsaná nad reálnou osou $a_{1,2}$ $b_{1,2}$. Daný bod m_2 považujeme za druhý obraz bodu m ($m_2 \equiv m$), jehož první obraz m_1 jest na ose $X_{1,2}$; tečny A_1, B_1, vedené bodem m_1 ku křivce kruhové K_1, jsou první obrazy povrchových přímek hyperboloidu, procházejících bodem m;*) obrazy druhé jsou, jak vidno, v jediné přímce ($A_2 \equiv B_2$), kteráž jest

Obr. 1



tečnou hyperboly H_2 v bodě m_2. Otočíme-li přímky A, B kolem osy otáčení (osy imaginárné) až přijde

$$A \text{ do polohy } M \,||\, v, \quad \left(\text{nebo také: } A \text{ do polohy } N \,||\, v\right)^{**)}$$
$$B \;\;\text{„} \;\;\text{„} \;\; {}^1M \,||\, v, \quad \left(\qquad\qquad B \;\;\text{„} \;\;\text{„} \;\; {}^1N \,||\, v\right)$$

tedy m do polohy n, ${}^1n$,
tak že bude

$$M_1 \equiv {}^1M_1 \,||\, X_{1,2}, \qquad (N_1 \equiv {}^1N_1 \,||\, X_{1,2}),$$

*) Jednoplochý hyperboloid rotační má, jak známo, dvě soustavy povrchových přímek; každým bodem plochy procházejí dvě přímky povrchové, z nichž každá náleží soustavě jiné.

**) T. j. do rovnoběžné polohy s druhou průmětnou.

pak jsou obrazy druhé přímek M, ${}^1M$ (N, ${}^1N$), žádané asymptoty hyperboly H_2.

Přídavek: Značí-li ξ' a η' souřadnice bodu m_2, bude rovnice přímky

$$A_2 \equiv B_2 : \eta - \eta' = A' (\xi - \xi'),$$

kdežto jest A' směrnice této přímky.

Znamenejme

$$\overline{m_1 t_2} = \sigma, \quad \overline{m_1 t_1} = \tau, \quad \overline{t_1 t_2} = \varphi, \quad \overline{o_{1,2} b_{1,2}} = \alpha, \quad \overline{o_{1,2} t_2} = \omega$$

a $$\overline{b_{1,2} k_2} = \beta, \quad (\overline{b_{1,2} k_2} \perp X_{1,2}), \text{*)}$$

tu jest

$$A' = \frac{\eta'}{\sigma}, \tag{1}$$

a $$\tau^2 = \xi'^2 - \alpha^2 = \sigma^2 + \varphi^2 = \sigma^2 + \alpha^2 - \omega^2$$

a ježto

$$\omega = \xi' - \sigma,$$

jest

$$\xi'^2 - \alpha^2 = \alpha^2 - \xi'^2 + 2\xi'\sigma;$$

odtud

$$\sigma = \frac{\xi'^2 - \alpha^2}{\xi'}.$$

Dosadíme-li tuto hodnotu do rovnice (1), vyjde

$$A' = \frac{\eta'\xi'}{\xi'^2 - \alpha^2}.$$

Z podobnosti pravoúhlých trojúhelníků $o_{1,2} b_{1,2} k_2$, $m_1 m_2 t$**) ($\triangle\, m_1 m_2 t$ jest určen v pravém tvaru odvěsnami η', τ), jde

$$\beta : \alpha = \eta' : \tau,$$

z čehož vyplývá

$$\frac{\beta^2}{\alpha^2} = \frac{\eta'^2}{\tau^2} = \frac{\eta'^2}{\xi'^2 - \alpha^2}.$$

---

*) Jak patrno, jsou t_1, ${}^1t_1$ body dotyčné přímek A_1, B_1 a $o_{1,2}$ střed hyperboly H_2.

**) Přímky A, M mají od průmětny π tutéž odchylku.

Upotřebíme-li této rovnice, vyvodíme

$$A' = \frac{\eta'^2}{\xi'^2 - \alpha^2} \cdot \frac{\xi'}{\eta'} = \frac{\beta^2}{\alpha^2} \frac{\xi'}{\eta'},$$

z čehož soudíme, že jest přímka $A_2 \equiv B_2$ tečnou hyperboly H_2 v bodě m_2, β pak délka poloosy imaginárné, t. j. přímky $M_2 \equiv {}^1N_2$, ${}^1M_2 \equiv N_2$ jsou asymptoty.

Odtud jde pro řešení úlohy (a) následující konstrukce;

Učiňme $m_2 m_1 \perp X_{1,2}$ a opišme nad reálnou osou křivku kruhovou K_1; sestrojme bodem m_1 tečny A_1, B_1 ke kružnici K_1 a spojme dotyčné body t_1, ${}^1t_1$: i jest přímka $m_2 t_2$ (t_2 = průsečík přímky $t_1 {}^1t_1$ s $X_{1,2}$) žádaná tečna.

Po té sestrojme: ve středu $o_{1,2}$ kolmici na reálnou osu ($r_1 s_1 \perp a_{1,2} b_{1,2}$) a bodem r_1 (nebo s_1) tečnu $\| X_{1,2}$; opišme ze středu $o_{1,2}$ křivku kruhovou L_1 poloměrem $o_{1,2} m_1$, veďme $L_2 \| X_{1,2}$ bodem m_2 a sestrojme ještě $n_1 n_2 \perp X_{1,2}$, ${}^1n_1 {}^1n_2 \perp X_{1,2}$: i jsou přímky spojující body n_2, ${}^1n_2$ se středem $o_{1,2}$ žádané asymptoty. (Body n_1, ${}^1n_1$ jsou průsečíky přímky $M_1 \equiv {}^1M_1$ s kružnicí L_1).

b) Budiž dána hyperbola H_2 reálnou osou $a_{1,2} b_{1,2}$ a tečnou A_2 (obr. 1.). Mají se sestrojiti obě asymptoty její a dotyčný bod tečny A_2.

Poloha obou průměten budiž jako v *a*). Danou tečnu A_2 považujme za druhý obraz přímky A na hyperboloidu ležící (anebo B, neboť $A_2 \equiv B_2$), jejíž obraz první dotýká se křivky kruhové K_1 v bodě t_1 (B_1 v ${}^1t_1$) *); zobrazme druhou stopu přímky A, i jest bod m_2, žádaný bod dotyčný.

Při zobrazování asymptot počínejme si jako v úloze předcházející.

Přídavek: Znamená-li ξ' a η' jako dříve souřadnice bodu m_2, platí, jak vidno z předešlého

$$\frac{\beta^2}{\alpha^2} = \frac{\eta'^2}{\xi'^2 - \alpha^2} \quad \text{čili} \quad \beta^2 \xi'^2 - \alpha^2 \eta'^2 = \alpha^2 \beta^2,$$

z čehož vysvítá, že bod m_2 náleží hyperbole.

Odtud pro řešení úlohy *b*) následující konstrukce:

---

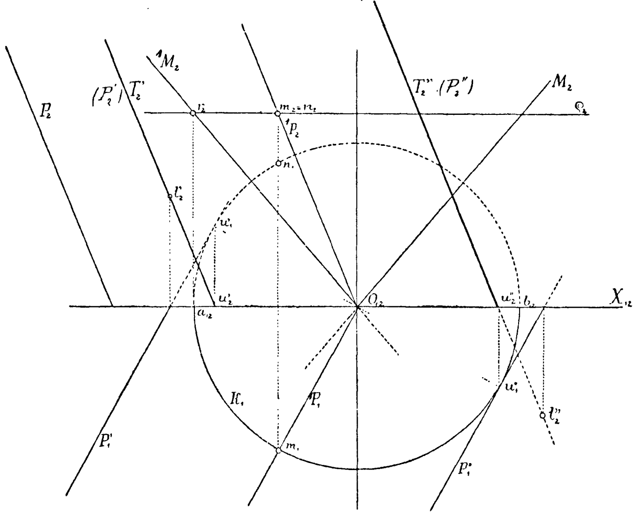
*) Jak zřejmo, jsou t_2, t_1 obrazy průsečíků přímky A s průmětnou první i s křivkou kruhovou K.

Opišme nad reálnou osou křivku kruhovou K_1, učiňme $t_1 t_2 \perp X_{1,2}$ a sestrojme v bodě t_1 tečnu A_1; v bodě m_1 (průsečíku A_1 s $X_{1,2}$) sestrojme ještě $m_1 m_2 \perp X_{1,2}$: i jest bod m_2, žádaný bod dotyčný. Jak z obr. 1. vidno, můžeme při sestrojování upotřebiti i tečny B_1.

c) Buď dána hyperbola asymptotami M_2, ${}^1M_2$ a jedním bodem m_2 (obr. 1.). Má se sestrojiti osa reálná a dle *a*) i tečna v daném bodě.

Přímka půlící $\sphericalangle (M_2 N_2)$ buď osou průmětnou, (osa průmětná vyznačuje tu i polohu osy reálné); vzájemná poloha obou průměten budiž jako v *a*).

Obr 2.



Dané asymptoty M_2, ${}^1M_2$ považujme za druhé obrazy přímek M, ${}^1M$ na hyperboloidu ležící, jakož i bod m_2 za obraz druhý bodu m $(m_2 \equiv m)$.

Zobrazme povrchovou křivku kruhovou L, náležející bodu m a odvoďme z obrazů druhých M_2, ${}^1M_2$ obrazy první $M_1 \equiv {}^1M_1$: i jest $o_{1,2} r_1$ (vzdálenost přímky M_1 od osy $X_{1,2}$) délka poloosy reálné.

Jaká konstrukce jde odtud pro *c*)?

d) Buď dána hyperbola reálnou osou svou a asymptotami. Má se sestrojiti tečna rovnoběžně s danou přímkou. (Obr. 2.)

Vzájemná poloha obou průměten budiž jako v obrazci 1. Asymptoty M_2, ${}^1M_2$ buďtež obrysovými přímkami asymptotické rotační plochy kuželové, obalové to plochy veškerých rovin asymptotických, jejíž přímky jsou rovnoběžné s povrchovými přímkami hyperboloidu. Daná přímka P_2, s níž mají býti tečny rovnoběžny, budiž druhým obrazem přímky P, jejíž první obraz máme stanoviti. Vrcholem plochy kuželové o veďme ${}^1P_2 \parallel P_2$ a bodem r_2 ($a_2r_2 \perp X_{1,2}$) rovinu $\varrho \parallel \pi$, která protíná plochu kuželovou v křivce kruhové, jejíž první obraz sjednocuje se v tomto případě s K_1 a přímku ${}^1P$ v bodě m, jehož první obraz jest na K_1. (S druhým obrazem bodu m sjednocuje se též druhý obraz bodu n — oba body jsou na ploše kuželové.) Spojíme-li m_1 nebo n_1 s $o_{1,2}$, obdržíme první obraz přímky ${}^1P$. Ke K_1 sestrojme tečny $P_1' \parallel P_1'' \parallel {}^1P_1$, čímž obdržíme body dotyčné u_1', u_1'', z nichž odvodíme u_2', u_2'' a tím hledané tečny $T_2' \parallel T_2'' \parallel P_2$ s body dotyčnými t_2', t_2''. [Přímkami P', P'' jest určena rovina asymptotická, jež se dotýká plochy kuželové.]

Úloha. Ku hyperbole dané v d) sestrojiti tečny bodem mimo křivku daným.

Geometrické místo vrcholu úhlu, jehož ramena dotýkají se křivky druhého stupně.

Napsal

Antonín Sýkora,
professor v Rakovníku.

a) *Pro úhel pravý.*

1. Přímka $y = \mathrm{A}x + \mathrm{B}$ dotýká se *ellipsy*

$$b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2,$$

je-li

$$\mathrm{B}^2 = \mathrm{A}^2a^2 + b^2.$$

Jest tedy