Vojtěch Jarník
O funkci Bolzanově

Časopis pro pěstování matematiky a fysiky, Vol. 51 (1922), No. 4, 248--264

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/109021

Příspěvek k plochám pseudosférickým, 38. (1909).

Příspěvek k plochám šroubovým, 39. (1910).

O jistém druhu ploch, 40. (1911).

Plochy konstantní křivosti s dvojnásobným systémem geodetických kruhů stejných poloměrů a oblouků, 41. (1912),

Plochy, jichž čáry charakteristické jsou čarami geodetickými, 42. (1913).

Plochy s isothermicko-konjugovaným systémem čar, majících za sférický obraz čáry ekvidistantní, 44. (1915).

O jistém druhu ploch translačních, 44 (1915).

Rozpravy České Akademie (II. tř.):

Plochy W o čarách křivoznačných stejné geodetické křivosti (1909).

Rhombické dělení ploch geodetickými kruhy, při němž k témuž úhlu souřadnému náleží ∞^1 lineárních elementů (1912).

Věstník Královské České Společnosti Nauk. (Math.-přír. tř.):

Plochy stálé střední křivosti s charakteristickými čarami stejné torse (1913).

Plochy, jichž diagonální čáry mají za sférické obrazy kružnice stálých poloměrů a stejných oblouků (1914).

Věstník IV. sjezdu přírodozpytcův a lékařů českých v Praze r. 1908:

Dělení roviny v infiniterimální rhomby soustavou kružnic.

Věstník V. sjezdu českých přírodozpytců a lékařů v Praze r. 1914.

Čáry ekvidistantní jako systém konjugovaný na plochách konstantní střední křivosti.

O funkci Bolzanově.

Napsal *Vojtěch Jarník.*

Účelem tohoto článku jest dokázati, že funkce Bolzanova*) nemá pro žádnou hodnotu proměnné derivace a pojednati o jejich derivovaných číslech.

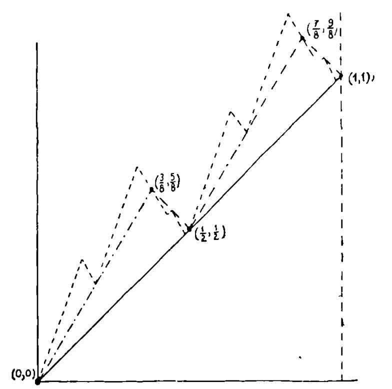
Funkci Bolzanovu definujeme takto: budiž dána úsečka $y = x$ v intervalu (0, 1); rozdělme interval (0, 1) na čtyři intervaly $(0, {}^3/_8)$, $({}^3/_8, {}^1/_2)$, $({}^1/_2, {}^7/_8)$, $({}^7/_8, 1)$ a sestrojme body o souřadnicích (0, 0), $({}^3/_8, {}^5/_8)$, $({}^1/_2, {}^1/_2)$, $({}^7/_8, {}^9/_8)$, (1, 1). Spojme pak vždy dva po sobě následující z těchto bodů úsečkou. Tak dostáváme 4 intervaly, jež nazvu „prvními dělicími intervaly“; uvedených 5 bodů nazvu „prv-

*) Viz Dr. M. Jašek, *Funkce Bolzanova* v 2. čísle tohoto roč. Časopisu.

ními dělicími body" (po příp., kde není třeba obávati se nedorozumění, budu tak nazývati i jejich průměty na osu úseček); lomenou čáru, spojující dělicí body a složenou ze čtyř úseček, nazvu „první lomenou čarou" (na obrázku čerchovaně vytažena). Nyní nad každou z těchto 4 úseček sestrojím lomenou čáru dle téhož předpisu; t. j. jsou-li (a, A), (b, B) koncové body některé z těch úseček, sestrojím body

$$(a, A), \left(a + \frac{3}{8}(b-a), A + \frac{5}{8}(B-A)\right),$$

$$\left(\frac{a+b}{2}, \frac{A+B}{2}\right), \left(a + \frac{7}{8}(b-a), A + \frac{9}{8}(B-A)\right), (b, B),$$



Obr. 1.

a spojím vždy 2 po sobě následující úsečkou; tak dostávám „druhou lomenou čáru", složenou ze 16 úseček (na obrázku čárkována), 17 „druhých dělicích bodů" (ovšem každý „první dělicí bod" je též „druhým dělicím bodem") a 16 „druhých dělicích intervalů". Tak postupuji dále; obecně „n-tá lomená čára" se skládá z 4^n úseček, z nichž každá leží v jednom z 4^n „n-tých dělicích intervalů"; koncové body těchto úseček tvoří $4^n + 1$ „n-tých dělicích bodů". Má-li pak nějaký dělicí bod souřadnice x, y, je hodnota Bolzanovy funkce pro hodnotu proměnné x rovna y. Tím je funkce Bolzanova definována v množině dělicích bodů všude husté v intervalu (0, 1). Je-li tedy vůbec možno doplniti její definici v intervalu (0, 1) tak, aby v tomto uzavřeném intervalu byla spojitá, je to možno jen jediným způsobem.*)

Tyto poznámky, vědomě neúplné, uvádím jen proto, abych objasnil význam názvů, jichž v dalším užívám.

Funkci Bolzanovu značím v dalším symbolem $f(x)$, symbolem $[x]$ značím bod Bolzanovy čáry (t. j. čáry o rovnici $y = f(x)$) o souřadnicích $x, f(x)$.

Předešlu ještě dvě poznámky, jichž v následujícím budu stále užívati.[1])

(A) V libovolném dělicím intervalu (a, b) konstruuje se křivka Bolzanova z úsečky $[a]\,[b]$ týmž způsobem, jako v intervalu $(0, 1)$ z úsečky $[0]\,[1]$.

Čára Bolzanova skládá se v intervalu $(0, 1)$ ze dvou shodných částí, jež jsou k sobě v následujícím vztahu: jsou-li x, x' dvě hodnoty intervalu $(0, 1)$ takové, že

$$x' - x = \frac{1}{2}, \text{ je i } f(x') - f(x) = \frac{1}{2},$$

t. j. spojnice $[x]$ s $[x']$ má směrnici 1.

(B) Obdobně: je-li (a, b) libovolný n-tý dělicí interval a k směrnice n-té lomené čáry v tom intervalu, potom ku každé hodnotě x v (a, b) existuje hodnota x' rovněž v (a, b) taková, že

$$|x' - x| = \frac{1}{2}(b - a),$$

a že spojnice $[x]\,[x']$ má směrnici k. Tyto 2 body $[x]$, $[x']$ nazvu „body sdruženými vzhledem k intervalu (a, b)“.

I.

Přistupme nyní k důkazu, že funkce B. nemá v žádném bodě uvnitř intervalu $(0, 1)$ konečnou derivaci, ani v bodě $x = 0$ konečnou derivaci z prava, ani v bodě $x = 1$ z leva.

K tomu cíli provedu následující úvahu: Uvažujme hodnotu x, jež není bodem dělicím. Potom bod x leží uvnitř jednoho z prvních

*) Důkaz, že funkci takto definovanou lze vskutku tak doplniti, viz v pojednání p. prof. Dra Rychlika *„Über die Funktion von Bolzano“*, Věstník král. česk. spol. nauk, kde též jiným způsobem podán důkaz, že f. B. nemá derivace. V následujícím budu pod „funkcí Bolzanovou“ rozuměti funkci spojitou, definovanou tímto způsobem v celém uzavřeném intervalu (0, 1).

[1]) Správnost těchto poznámek a jejich smysl je čtenáři bezprostředně patrný pro body dělicí, jež dostáváme konečným počtem elementárních geometrických konstrukcí (resp. početních operací). Pro ostatní body vyplývá snadným pochodem limitním. Prosím čtenáře, aby si v dalším ke každému případu nakreslil vždy příslušný schematický obrázek.

dělicích intervalů; tento interval označím J_1, a podrobněji J_1' nebo J_1'' nebo J_1''' nebo J_1^{IV} dle toho, je-li J_1 interval $\left(0, \frac{3}{8}\right)$ nebo $\left(\frac{3}{8}, \frac{1}{2}\right)$ nebo $\left(\frac{1}{2}, \frac{7}{8}\right)$ nebo $\left(\frac{7}{8}, 1\right)$. Rozdělme interval J_1 opět na druhé dělicí intervaly; bod x leží uvnitř jednoho a jen jednoho z nich, jejž označím J_2; budiž interval $J_1 = (x_1{}^l, x_1{}^p)$; potom interval J_2 označím J_2', J_2'', J_2''', J_2^{IV} dle toho, je-li J_2 intervalem $\left((x_1{}^l, x_1{}^l + \frac{3}{8}(x_1{}^p - x_1{}^l)\right)$, $\left(x_1{}^l + \frac{3}{8}(x_1{}^p - x_1{}^l), x_1{}^l + \frac{1}{2}(x_1{}^p - x_1{}^l)\right)$, $\left(x_1{}^l + \frac{1}{2}(x_1{}^p - x_1{}^l), x_1{}^l + \frac{7}{8}(x_1{}^p - x_1{}^l)\right)$, $\left(x_1{}^l + \frac{7}{8}(x_1{}^p - x_1{}^l), x_1{}^p\right)$.
Tak postupuji dále a dostávám nekonečnou posloupnost intervalů

$$(J) \qquad J_1, \quad J_2, \quad J_3, \; \ldots \quad J_n, \ldots\ldots;$$

každý následující z nich je obsažen v každém předcházejícím, délky jejich konvergují s rostoucím n k 0, a bod x leží uvnitř všech těchto intervalů.

Posloupnost (J) je úplně stanovena, je-li dán pořad, v jakém po sobě následují intervaly J', J'', J''', J^{IV}. Zároveň je patrno, že posloupnost (J) stanoví jednoznačně bod x, a naopak, není-li x bodem dělicím, stanoví bod x jednoznačně příslušné (J).[2])

Označím pro další k_n směrnici n-té lomené čáry v intervalu J_n[3]); x_n^l, x_n^p levý resp. pravý krajní bod intervalu J_n; konečně symbolem J_n značím též délku intervalu J_n.

Uvažujme nyní libovolný bod $[x]$ B. čáry; ten je jednoznačně stanoven příslušnou posloupností (J) (to platí i pro body dělicí) Mohou pak nastati tyto případy:

[2]) Tato úvaha platí i pro body dělicí s následujícími změnami:

a) od jistého n počínaje leží x na hranici všech J_n;

b) bodu x jsou přiřazeny zde dvě posloupnosti (J), jedna, v níž od jistého n jsou samá J', druhá, v níž od jistého n jsou samá J^{IV}; pouze bodu $x = 0$ přísluší jediná posloupnost

$$J'_1, J'_2, J'_3, \ldots, J'_n, \ldots$$

a bodu $x = 1$ jediná posloupnost

$$J_1^{IV}, J_2^{IV}, J_3^{IV}, \ldots, J_n^{IV}, \ldots$$

[3]) Poznamenávám jednou pro vždy: Je-li J_{n+1} buď J'_{n+1}, nebo J'''_{n+1}, je $k_{n+1} = \frac{5}{3} k_n$; je-li J''_{n+1} nebo J^{IV}_{n+1}, je $k_{n+1} = -k_n$; ježto $k_0 = 1$, je $|k_n| > 1$ pro libovolné n.

1. Buď tato posloupnost obsahuje jen konečný počet I'' a I^{IV}, tedy nekonečně mnoho I' nebo I''' (nebo obojích); k bodu $[x]$ existuje bod sdružený $[x'_n]$ vzhledem k I_n takový, že spojnice $[x]$ $[x'_n]$ má hodnotu k_n*); roste-li n do nekonečna, konvergují I_n a tedy i $| x - x'_n | = \frac{1}{2} I_n$ k 0, k_n roste do nekonečna (pozn. 3.); nemůže tedy v bodě x existovati konečná derivace

2. Nebo tato posloupnost obsahuje nekonečně mnoho I'' nebo I^{IV} (nebo obojích); potom ke každému N lze nalézti $n > N$ takové, že I_{n+1} je I''_{n+1} nebo I^{IV}_{n+1}. Existují opět body sdružené s $[x]$, a to $[x'_n]$ vzhledem k I_n, $[x''_n]$ vzhledem k I_{n+1} takové, že

$$\lambda\ (x,\ x'_n) = k_n$$
$$\lambda\ (x,\ x''_n) = k_{n+1}.$$

Ale s rostoucím N roste i n do nekonečna, x'_n, x_n'' konvergují k x, $k_{n+1} = - k_n$ (pozn. 3.). V tomto případě neexistuje tedy v bodě x derivace konečná ani nekonečná.

Body dělicí (až na bod $x = 1$) můžeme zahrnouti pod případ 1. (viz pozn. 2.); body sdružené $[x'_n]$ leží potom od jistého n všechny v pravo od $[x]$, takže: v bodech dělicích neexistuje konečná derivace z prava. Ale body dělicí (až na bod $x = 0$) lze zahrnouti též pod případ 2.; potom x'_n, x''_n leží od jistého n všechny v levo od x, takže: v bodech dělicích neexistuje derivace z leva, ani nekonečná.

Konečně poznamenávám: je-li v posloupnosti (J) nekonečně mnoho J'_n nebo J'''_n i nekonečně mnoho J''_n nebo J^{IV}_n, je

$$\lim_{x' = x} \lambda\ (x,\ x') = + \infty, \quad \lim_{x' = x} \lambda\ (x,\ x') = - \infty.$$

Tím je naše věta úplně dokázána.

II.

Dokáži nyní: v žádném vnitřním bodě intervalu (0, 1) neexistuje derivace ani odlišeně nekonečná. K tomu cíli stanovím nejprve dolní a horní hranici Bolzanovy funkce v intervalu (0, 1).

Funkce Bolzanova nemůže nabývati své dolní hranice v intervalu $\left(\frac{1}{2}, 1\right)$, neboť $f\left(x + \frac{1}{2}\right) = f(x) + \frac{1}{2}$ pro $x \leqq \frac{1}{2}$. Tato dolní hranice musí býti dále $\leqq 0$. Předpokládejme, že by nastávala pro x intervalu $\left(\frac{3}{8}, \frac{1}{2}\right)$. Definuji-li bod x příslušnou posloupností (J), bude

*) V dalším směrnici spojnice bodů $[x]$, $[x']$ označuji krátce $\lambda\ (x,\ x')$.

$$J_1 = \frac{1}{8},\ x_1{}' = \frac{3}{8},\ f(x_1{}') = \frac{5}{8},\ k_1 = -1;$$

$$\text{ale}\quad |k_n| \leq \frac{5}{3}|k_{n-1}|,\quad J_n \leq \frac{3}{8} J_{n-1};$$

$$\text{tedy}\quad |k_n| \leq \left(\frac{5}{3}\right)^{n-1},\ J_n \leq \frac{1}{8}\left(\frac{3}{8}\right)^{n-1}.$$

$$\text{Ale}\quad |f(x'_{n+1}) - f(x'_n)| \leq \frac{9}{8}|k_n| J_n,\ \text{takže}$$

$$f(x_{n+1}) > f(x_1) - \frac{9}{8}\cdot\frac{1}{8} - \frac{9}{8}\cdot\frac{1}{8}\cdot\frac{5}{8} - \ldots - \frac{9}{8}\cdot\frac{1}{8}\left(\frac{5}{8}\right)^{n-1},$$

$$\text{a tedy tím spíše}\ f(x'_{n+1}) > \frac{5}{8} - \frac{9}{64}\cdot\frac{1}{1-\frac{5}{8}} = \frac{1}{4}$$

pro libovolné n, a tedy i

$$f(x) = \lim_{n=\infty} f(x'_{n+1}) \geqq \frac{1}{4},$$

což odporuje předpokladu $f(x) \leqq 0$. Musí tedy funkce Bolzanova nabývati své dolní hranice v intervalu $\left(0, \frac{3}{8}\right)$; ale na tento interval mohu užíti téhož postupu (viz A) atd.; takže dostávám: funkce Bolzanova nabývá své dolní hranice pro $x \leqq \left(\frac{3}{8}\right)^n$, kde n je libovolné, t. j. funkce Bolzanova má v intervalu $(0, 1)$ dolní hranici 0, které nabývá pouze pro $x = 0$.

Použijeme-li poznámky (A), můžeme ihned obecněji říci: v libovolném n-tém dělicím intervalu nabývá funkce Bolzanova své dolní nebo horní hranice na levém kraji toho intervalu, a to dle toho, má-li n-tá lomená čára v tomto intervalu směrnici kladnou či zápornou. Na př. v intervalu $\left(\frac{7}{8}, 1\right)$ je horní hranice funkce Bolzanovy $\frac{9}{8}$, které nabývá pro $x = \frac{7}{8}$.

Nyní snadno vyšetřím, v kterém bodě nabývá funkce Bolzanova své horní hranice. Musí to býti především v intervalu $\left(\frac{1}{2}, 1\right)$ (pozn. (B)); nemůže to však býti v int. $\left(\frac{7}{8}, 1\right)$, neboť v něm je horní hranice $\frac{9}{8}$, kdežto v int. $\left(\frac{1}{2}, \frac{7}{8}\right)$ nabývá funkce hodnot větších.

Jest tedy
$$x_1^l = \frac{1}{2},\ x_1^p = \frac{7}{8} = 1 - \frac{1}{8}.$$

Obdobně uvažuji v tomto intervalu (x_1^l, x_1^p) atd. a dostávám obecně

$$x_n^l = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{3}{8} + \left(\frac{3}{8}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{3}{8}\right)^{n-1}\right)$$

$$x_n^p = 1 - \frac{1}{8}\left(1 + \frac{3}{8} + \ldots + \left(\frac{3}{8}\right)^{n-1}\right)$$

Společná limita těchto dvou posloupností jest $x = \frac{4}{5}$, příslušná hodnota $f(x)$ jest $f(x) = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{5}{8} + \left(\frac{5}{8}\right)^2 + \ldots\right) = \frac{4}{3}$.

Přihlížejíce k (A), můžeme říci:

Funkce Bolzanova má v intervalu $(0, 1)$ absolutní minimum 0 pro $x = 0$, absolutní maximum $^4/_3$ pro $x = \frac{4}{5}$; relativní extrémy jsou definovány takto: je-li (a, b) libovolný n-tý dělicí interval a k směrnice n-té lomené čáry v něm, sestrojme bod o souřadnicích

$$(\mathfrak{A}) \quad \begin{aligned} x = a + \frac{4}{5}(b-a),\ y = f(a) + \frac{4}{3}[f(b) - f(a)] = \\ = f(a) + \frac{4}{3}k(b-a); \end{aligned}$$

tento bod dává relativní extrém funkce Bolzanovy, a to maximum nebo minimum dle toho, je-li k kladné či záporné. Jiných extrémů není; můžeme především vyloučiti body dělicí (neboť v těch funkce z leva osciluje, viz odst. I.). Kdyby pak byl bod x_0 nějaký relativní extrém funkce Bolzanovy, byl by absolutním extrémem v jistém intervalu $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$. Ježto pak intervaly J_n příslušné posloupnosti (J) jsou od jistého n obsaženy uvnitř intervalu $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$, má funkce Bolzanova v intervalu J_n absolutní extrém v bodě x_0, jenž leží uvnitř intervalu J_n; jest tedy $x_0 = x_n^l + \frac{4}{5}(x_n^p - x_n^l)$, t. j. bod x_0 je jedním z bodů množiny $\mathfrak{A}$.

Tedy body, v nichž nastávají relat. extrémy funkce Bolzanovy, tvoří množinu jednoduše spočetnou, všude hustou v intervalu $(0, 1)$ a nám úplně známou.

Tyto výsledky postačí k důkazu, že funkce Bolzanova nemá derivaci ani odlišeně nekonečnou v žádném vnitřním bodě intervalu $(0, 1)$.

Jak z odst. I. víme, stačí uvažovati body x, jichž posloupnost (J) obsahuje pouze intervaly J', J''' od jistého n počínaje; prvních několik intervalů, v nichž to splněno není, mohu vynechati (viz (A)).

Mimo to možno vyloučiti případ, že (J) obsahuje (od jistého indexu) samá J', neboť potom by x byl bod dělicí, v němž derivace neexistuje (odst. I.).

Dokáži především, že posloupnost (J) nesmí obsahovati nekonečně mnoho dvojic J'''_n, J'''_{n+1}. Neboť potom by bylo možno ke každému N nalézti $n > N$ takové, že po sobě následují intervaly J_n, J'''_{n+1}, J'''_{n+2}.

Existuje především k bodu $[x]$ bod sdružený $[x_n]$ vzhledem k J_n takový, že
$$\lambda\,(x,\, x'_n) = k_n.$$

Dále jest
$$f(x) > f(x'_n) + \frac{1}{2}\,k_n\,J_n + \frac{1}{2}\cdot\frac{5}{3}\,k_n\cdot\frac{3}{8}\,J_n$$
$$f(x) > f(x'_n) + \frac{13}{16}\,J_n\,k_n. \qquad \left(k_n = \left(\frac{5}{3}\right)^n\right)$$

K intervalu J_n přiléhá z prava n-tý dělicí interval J délky $\frac{1}{3}J^n$, směrnice n-té lomené čáry v něm je $k = -\frac{3}{5}\,k_n$ (neboť J_n je buď J'_n nebo J''_n). Tedy minimum v intervalu J nastává pro hodnotu
$$a_n = x^p_n + \frac{4}{5}J = x'_n + J_n + \frac{4}{5}\cdot\frac{1}{3}\,J_n, \text{ tedy } 0 < a_n - x < \frac{19}{15}\,J_n$$
$$\text{a jest } f\,(a_n) - f\,(x^p_n) + \frac{4}{3}\,J\,k -$$
$$= f\,(x'_n) + J_n\,k_n - \frac{4}{3}\cdot\frac{1}{3}J_n\cdot\frac{3}{5}\,k_n =$$
$$= f\,(x'_n) - \frac{11}{15}\,J_n\,k_n.$$

Tedy $\lambda\,(x, a_n) = \dfrac{f\,(x) - f\,(a_n)}{x - a_n} < -\dfrac{\frac{13}{16} - \frac{11}{15}}{\frac{19}{15}}\,k_n = -\,bk_n$, kde číslo $b > 0$ nezávisí na n.

Roste-li nyní N do nekonečna, roste i n i k_n do nekonečna, x'_n i a_n konvergují ku x,

pro jeden z nich pak $\lambda\,(x,\, x'_n) = k_n$,
pro druhý . . . . $\lambda\,(x,\, a_n) < -\,bk_n$.

Je tedy patrno, že v tomto případě neexistuje v bodě x derivace ani nekonečná, a nad to jest
$$(1) \quad \lim_{x'=x} \frac{f\,(x) - f\,(x')}{x - x'} = +\infty, \quad \lim_{x'=x} \frac{f\,(x) - f\,(x')}{x - x'} = -\infty$$

Obdobný výsledek dostaneme, předpokládáme-li, že posloupnost (J) obsahuje nekonečně mnoho dvojic J'_n, J'_{n+1} (a ovšem též nekonečně mnoho J''').*)

Zbývá tedy jedině vyšetřovati posloupnosti (J), v nichž se od jistého indexu střídají intervaly J', J'''. Vynecháme-li konečný počet intervalů z počátku, zbývá vyšetřiti bod, definovaný posloupností

$$(J) \equiv J'_1, J'_2, J'_3, \ldots, J'_{2n+1}, J'_{2n+2}, \ldots$$

(který je ovšem representantem celé jednoduše spočetné množiny bodové, jako všude v těchto úvahách).

Platí:

$$x'_0 = 0,\ x'_1 = 0,\ x'_{2n+1} = x'_{2n},\ x'_{2n+2} = x'_{2n+1} + \frac{1}{2} J_{2n+1}$$

$$k_o = 1,\ k_n = \left(\frac{5}{3}\right)^n,\ J_o = 1,\ J_n = \left(\frac{3}{8}\right)^n;\ \text{tedy}$$

$$x'_{2n+2} = x'_{2n} + \frac{1}{2}\left(\frac{3}{8}\right)^{2n+1}$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{3}{8} + \left(\frac{3}{8}\right)^3 + \left(\frac{3}{8}\right)^5 + \ldots + \left(\frac{3}{8}\right)^{2n+1}\right)$$

$$f(x'_{2n+2}) = f(x'_{2n}) + \frac{1}{2} k_{2n+1} J_{2n+1}$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{5}{8} + \left(\frac{5}{8}\right)^3 + \left(\frac{5}{8}\right)^5 + \ldots + \left(\frac{5}{8}\right)^{2n+1}\right)$$

čili v limitě $x = \frac{12}{55}$, $f(x) = \frac{20}{39}$.

Obdobně jest ovšem též (dle (A))

$$x = x'_{2n} + \frac{12}{55} J_{2n},$$

$$f(x) = f(x'_{2n}) + \frac{20}{39} k_{2n} J_{2n}.$$

Existuje nyní především bod $[x'_{2n}]$, sdružený s $[x]$ vzhledem k J_{2n}, takže jest

$$\lambda\ (x,\ x'_{2n}) = k_{2n};$$

označme si dále x''_{2n} bod $x'_{2n} + \frac{1}{2} J_{2n}$;

platí $f(x''_{2n}) = f(x'_{2n}) + \frac{1}{2} k_{2n} J_{2n}$.

*) Stačí uvažovati trojici intervalů J'''_n, J'_{n+1}, J'_{n+2}

Potom $$\lambda(x, x''_{2n}) = \frac{\frac{20}{39} - \frac{1}{2}}{\frac{12}{55} - \frac{1}{2}} \cdot k_{2n} = -\, bk_{2n},$$

kde $b > 0$ je nezávislé na n. Tedy ani zde neexistuje nekonečná derivace, a mimo to platí zde opět vztahy (1).

Tím je věta, vyslovená na počátku tohoto odstavce, úplně dokázána.

III.

Derivace neexistuje, jak jsme viděli, ani konečná ani nekonečná v žádném vnitřním bodě intervalu (0, 1). Neexistuje však v některých bodech aspoň derivace z prava nebo z leva?

Uvažujme k tomu cíli body, v nichž nastává extrém, při čemž ovšem stačí omeziti se na bod

$$x = \frac{4}{5}\text{*)}. \text{ Jest } f(x) = \frac{4}{3},$$

a obdobně ovšem

$$x = x_n^l + \frac{4}{5} J_n.\ f(x) = f(x_n^l) + \frac{4}{3} k_n J_n$$

(dle (A)) .

Platí: $$x_{n+1}^l = x_n^l + \frac{1}{2} J_n,\ x_{n+1}^p = x_n^p - \frac{1}{8} J_n.$$

Je-li x' v intervalu (x_n^l, x_{n+1}^l), jest

$$f(x') \leqq f(x) - \frac{1}{2} k_n J_n \qquad \text{(viz } (B));$$

je-li x'' v intervalu (x_{n+1}^p, x_n^p), je

$$f(x'') \leqq f(x_n^p) + \frac{1}{8} J_n k_n = f(x_n^l) + \frac{9}{8} J_n k_n$$

Je tedy, ježto $0 < x - x' < J_n$, $0 < x'' - x < J_n$,

$$\frac{f(x) - f(x')}{x - x'} > \frac{1}{2} k_n, \quad \frac{f(x) - f(x'')}{x - x''} < -\left(\frac{4}{3} - \frac{9}{8}\right) k_n = -\, bk_n,$$

při čemž $b > 0$ nezávisí na n. Ale každé $x' < x$ leží v jistém intervalu (x_n^l, x_{n+1}^l); konverguje-li x' ku x, roste n a tedy i $k_n = \left(\frac{5}{3}\right)^n$ do nekonečna.

Jest tedy $$\lim_{x' = x - 0} \frac{f(x) - f(x')}{x - x} = +\infty,$$

a obdobně $$\lim_{x'' = x + 0} \frac{f(x) - f(x'')}{x - x''} = -\infty.$$

*) Viz odst. II.

Tedy v bodě $x = \frac{4}{5}$ existuje derivace z leva, rovná $+\infty$, a derivace z prava, rovná $-\infty$. Užijeme-li poznámky (A), dostáváme ihned: **Funkce Bolzanova má derivaci z leva $+\infty$ a z prava $-\infty$ v bodech, kde má relativní maximum; v minimech je derivace z leva $-\infty$, z prava $+\infty$.**

Je možno, aby derivace z leva i z prava existovaly obě **současně** ještě v jiných bodech? Můžeme předem vyloučiti body dělicí (derivace z leva neexistuje). Dále nesmí příslušná posloupnost obsahovati nekonečně mnoho J'', jak snadno dokážeme.

Je-li totiž J''_{n+1} a $k_n > 0$, je

$$f(x_n^l) + \frac{1}{2} k_n J_n - \frac{1}{3}\frac{1}{8} k_n J_n \leq f(x) \leq f(x_n^l) + \frac{5}{8} k_n J_n.$$

Je tedy $\lambda\,(x, x_n^l) > \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{24}\right) k_n.$ $\quad (0 < x - x_n^l < J_n.)$

Uvažuji-li za druhé bod

$$x''_n = x_n^l + \frac{4}{5}\frac{3}{8} J_n,$$

je $\quad f(x_n) = f(x_n^l) + \frac{4}{3}\frac{5}{8} k_n J_n. \quad 0 < x - x_n < J_n.$

a tedy $\lambda\,(x, x''_n) < -\left(\frac{4}{3} \cdot \frac{5}{8} - \frac{5}{8}\right) k_n.$

Obdobné nerovniny — pouze se změnou znamení $<$ — platí i pro $k_n < 0$. Z toho snadno plyne, že derivace z leva zde neexistuje.

Obdobně se dokáže, že derivace z leva neexistuje, obsahuje-li (J) nekonečně mnoho J^{IV}.

Zbývá tudíž pouze uvažovati posloupnosti (J), jež obsahují pouze J' a J''', ne však samá J'. Potom však platí vztah (1)

$$\lim_{x' = x} \frac{f(x) - f(x')}{x - x'} = +\infty, \qquad \lim_{x' = x} \frac{f(x) - f(x')}{x - x'} = -\infty;$$

kdyby existovala derivace z leva i z prava, musila by býti jedna $+\infty$, druhá $-\infty$, t. j. v tomto bodě by nastával extrém. Tedy: **Obě derivace, z leva i z prava, existují současně jen v bodech jednoduše spočetné množiny** ($\mathfrak{A}$) (odst. II), a jest tam vždy jedna z nich rovna $+\infty$, druhá $-\infty$.

IV.

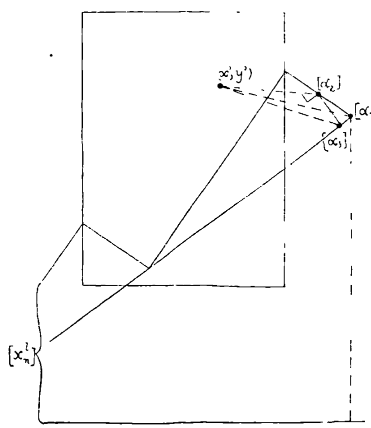
Dosud dostali jsme derivace z prava i z leva nekonečné. Je možno, aby v některém bodě existovala derivace z prava nebo z leva **konečná**?

Vyšetřujme nejprve derivaci z leva. Příslušné (J), jak víme z odst. III., smí obsahovati od jistého indexu pouze J' a J''' (ne však samé J'). Je-li J''_{n+1}, a $[x'^n]$ bod sdružený s $[x]$ vzhledem k J_n, je

$$\lambda\ (x,\ x'_n) = k_n;$$

ale $x'_n < x$, k_n roste do nekonečna současně s n, tedy konečná derivace z leva nemůže existovat.

Vyšetřujme dále derivaci z prava. Obsahuje-li (J) nekonečně mnoho J', je opět $\lambda\ (x,\ x'_n) = k_n$ pro nekonečně mnoho n, při čemž $x'_n > x$ (neboť, je-li J'_{n+1}, a $[x'_n]$ sdruž.. bod s $[x]$ vzhledem k J_n, je zde $x'_n > x$).



Obr. 2.

Zbývají tedy posloupnosti (J), jež obsahují (od jistého indexu) pouze J'', J''', J^{IV}, ne však samá J^{IV} (potom by to totiž byl bod dělicí, v němž konečná derivace z prava neexistuje, viz odst. I).

Budiž nyní n takové, že jest J''_{n+1} nebo J'''_{n+1}. Potom bod $[x]$ leží v obdélníku, jehož strany mají rovnice

$$X = x'_n + \frac{3}{8}\,J_n,\quad X = x'_n + \frac{7}{8}J_n$$

$$Y = y'_n + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{8}\right)k_n J_n,\quad Y = y'_n + \frac{4}{3}\,k_n\,J_n.$$

Budiž nyní (x', y') libovolný bod tohoto obdélníku, a spojme ho s body Bolzanovy čáry $[\alpha_1]$, $[\alpha_2]$, $[\alpha_3]$ o souřadnicích α_i, β_i, kdež

$$\alpha_1 = x_n^p,\ \beta_1 = y_n^p;\ \alpha_2 = x_n^p - \frac{1}{16} J_n,\ \beta_2 = y_n^p + \frac{1}{16} k_n J_n$$

$$\alpha_3 = x_n^p - \frac{1}{64} J_n,\ \beta_3 = y_n^p - \frac{1}{64} k_n J_n.$$

Označme $x' = x_n^l + \xi J_n$, $y' = y_n^l + \eta k_n J_n$; potom směrnice těch spojnic budou

$$\frac{y' - \beta_1}{x' - \alpha_1} = \frac{(\eta - 1) k_n J_n}{(\xi - 1) J_n},\quad \frac{y' - \beta_2}{x' - \alpha_2} = \frac{(\eta - 1 - \frac{1}{16}) k_n J_n}{(\xi - 1 + \frac{1}{16}) J_n},$$

$$\frac{y' - \beta_3}{x' - \alpha_3} = \frac{(\eta - 1 + \frac{1}{64}) k_n J_n}{(\xi - 1 + \frac{1}{64}) J_n}.$$

Probíhá-li bod (x', y') daný obdélník, je obor pro ξ, η:

$$\frac{3}{8} \leqq \xi \leqq \frac{7}{8},\ \frac{1}{2} - \frac{1}{24} \leqq \eta \leqq \frac{4}{3},\ \text{t. j. nezávislý na } n.$$

Tyto směrnice jsou spojité funkce ξ, η v daném oboru. Sestrojme si v každém bodě (x', y') rozdíl mezi největší a nejmenší z těchto 3 směrnic; ten bude tvaru $f(\xi, \eta) \cdot | k_n |$, kde $f(\xi, \eta)$ je spojitá funkce ξ, η, nezávislá na n. Ježto pak pro žádnou dvojici hodnot ξ, η nejsou všechny 3 směrnice stejné, je $f(\xi, \eta) > 0$ v daném oboru, a tedy i jeho minimum v daném oboru je jisté číslo $A > 0$, nezávislé ovšem na n. Následkem toho můžeme říci: máme-li libovolný interval posloupnosti (J), J_n takový, že je J_{n+1}'' nebo J_{n+1}''', existují v intervalu J_n na pravo od x dva body x_n', x_n'' takové,

že
$$\lambda(x, x_n') - \lambda(x, x_n'') \geqq A\, | k_n | .$$

Takových hodnot n jest patrně nekonečně mnoho; nechme n růsti do nekonečna těmito hodnotami. Ježto pak s rostoucím n konvergují x_n', x_n'' ku x, a je stále $| k_n | \geqq 1$, nemůže existovati konečná limita

$$\lim_{x' = x + 0} \lambda(x, x').$$

Tím je proveden důkaz: *V žádném bodě nemá Bolzanova funkce konečnou derivaci z prava ani z leva.*

V.

Obrátím se nyní k číslům derivovaným. Čtenář snadno odvodí — postupem analogickým odstavci III. — následující větu:

V bodech dělicích existuje derivace z prava (odlišeně nekonečná); derivovaná čísla z leva jsou konečná, různá a co do absolutní hodnoty stejná.*)

Dokažme: *Existují body, v nichž všechna čtyři čísla derivovaná jsou konečná.*

Uvažujme bod definovaný posloupností $J_1', J_2', \dots J_n', \dots$

Zde je $k_n = (-1)^n,\ J_n = \left(\frac{1}{8}\right)^n,\ x'_{n+1} = x'_n + \frac{3}{8} J_n,$

$$f(x'_{n+1}) = f(x'_n) + (-1)^n \cdot \frac{5}{8} J_n,$$

z čehož snadno plyne $x = \frac{3}{7},\ f(x) = \frac{5}{9}$; obdobně

$$x = x'_n + \frac{3}{7} J_n,\ f(x) = f(x'_n) + (-1)^n \frac{5}{9} J_n \text{ [viz } (A)]$$

Je-li $x'_{2n} \leqq x' \leqq x'_{2n+1}$, je

$$f(x'_{2n}) \leqq f(x') < f(x'_{2n}) + \frac{5}{6} J_{2n},$$

$$\left(\frac{3}{7} - \frac{3}{8}\right) J_{2n} \leqq x - x' < J_{2n}.$$

Tedy

$$|f(x) - f(x')| < a\, J_{2n}$$

$|x - x'| > b J_{2n}$, kde a, b jsou 2 čísla kladná, nezávislá na n; obdobné nerovniny platí, je-li

$$x'_{2n+1} \leqq x' \leqq x'_{2n+2}.$$

Ale každý bod x' v levo od x leží v jednom z intervalů (x'_n, x'_{n+1}); tedy pro všechna $x' < x$ platí

$$\left|\frac{f(x) - f(x')}{x - x'}\right| < A,$$

kde $A > 0$ nezávisí na x'. Obdobný výsledek platí pro body $x'' > x$. Tedy vskutku všechna čísla derivovaná v bodě $x = \frac{3}{7}$ jsou konečná (a ovšem, dle odst. IV., jsou potom derivovaná čísla z prava od sebe různá, a též z leva).

---

*) Užívám označení Diniova:

$$\Lambda(x) = \overline{\lim_{x' = x+0}} \frac{f(x) - f(x')}{x - x'},\quad \lambda(x) = \underline{\lim_{x' = x+0}} \frac{f(x) - f(x')}{x - x'},$$

$$\Lambda'(x) = \overline{\lim_{x' = x-0}} \frac{f(x) - f(x')}{x - x'},\quad \lambda'(x) = \underline{\lim_{x' = x-0}} \frac{f(x) - f(x')}{x - x'}.$$

Naproti tomu dokáži větu:

E x i s t u j e j i s t á m n o ž i n a b o d o v á m o c n o s t i k o n t i n u a, v n í ž j e s t

$$\Lambda (x) = +\infty, \quad \lambda (x) = -\sim, \quad \Lambda' (x) = +\sim, \quad \lambda' (x) = -\sim.$$

Uvažujme k tomu cíli posloupnosti (J), jež obsahují pouze intervaly J_n' a trojice po sobě jdoucích intervalů $(J_n', J_{n+1}', J_{n+2}^{IV})$, a to obojí v nekonečném množství. Každá taková posloupnost (J) definuje jistý bod x, a množina těchto posloupností (F) definuje jistou množinu bodovou (E); body množiny (E) nejsou body dělicí, a následkem toho je přiřazení bodů x a posloupností (J) vzájemně jednoznačné; mají tedy množiny (E) a (F) touž mocnost. Ale posloupnost (J) množiny (F) je dána, je-li dán pořad, v jakém následují po sobě intervaly J''' a trojice intervalů. Lze tedy psáti

$$(J) \equiv A_1, \; A_2, \; A_3, \ldots, \; A_n, \ldots,$$

kdež A_n značí buď interval J''' nebo vytčenou trojici. Přiřaďme členu A_n číslo $\alpha_n = 0$, je-li $A_n = J'''$, a $\alpha_n = 1$, je-li A_n trojice; potom množina (F) je vzájemně jednoznačně přiřazena množině (ε) čísel

$$a = \frac{\alpha_1}{2^1} + \frac{\alpha_2}{2^2} + \ldots + \frac{\alpha_n}{2^n} + \ldots,$$

kde α_n je rovno libovolně 0 nebo 1, pouze s tou podmínkou, že není od jistého n stále $\alpha_n = 0$ ani stále $\alpha_n = 1$. Jest tedy α libovolné číslo intervalu (0, 1), vyjma čísla tvaru $\frac{p}{2^n}$ (p, n celé). Tedy množina (ε) má skutečně mocnost kontinua a tedy i množina (E).

Zbývá dokázati, že libovolný bod množiny (E) má vlastnost vyřčenou. Ať je N jakkoliv velké, existuje $n > N$ takové, že je

$$J_{n+1}''', \; J_{n+2}', \; J_{n+3}', \; J_{n+4}^{IV}.$$

Jest tedy

$$k_{n+1} = \frac{5}{3} k_n, \; k_{n+2} = -\frac{5}{3} k_n, \; k_{n+3} = -\left(\frac{5}{3}\right)^2 k_n.$$

Existují pak body $[x_n']$, $[x_n'']$, $[x_n]$, $[x_n^{IV}]$, sdružené s $[x]$ vzhledem k intervalům J_n, J_{n+1}, J_{n+2}, J_{n+3}, takže platí

$$\lambda (x, x_n') = k_n, \; \lambda (x, x_n') = \frac{5}{3} k_n, \; \lambda (x, x_n''') = -\frac{5}{3} k_n,$$

$$\lambda (x, x_n^{IV}) = -\left(\frac{5}{3}\right)^2 k_n.$$

Je patrno, že $x_n' < x$, $x_n'' > x$, $x_n''' > x$, $x_n^{IV} < x$.

Ježto pak s rostoucím N roste i n i $| k_n |$ do nekonečna, x_n'', x_n''' konvergují k x z prava, x_n', x_n^{IV} z leva, je věta vyřčená patrna.

Poznamenávám ještě, že lze vytčenou množinu (E) podstatně rozšířiti, jakož i že lze stanoviti další podrobnosti o derivovaných číslech funkce Bolzanovy. Ostatně čtenář snadno vyčte leckteré doplňky vět uvedených přímo z důkazů zde podaných.

VI.

Ke konci poznamenávám ještě toto:

Budiž bod x definován posloupností (J); potom

$x'_{n+1} = x'_n + \frac{a_n}{8} J_n$, kde $a_n = 0, 3, 4, 7$; dále $J_{n+1} = \frac{b_n}{8} J_n$, kde předchozím hodnotám a_n odpovídají hodnoty b_n resp. 3, 1, 3, 1. Dále $k_{n+1} = c'_n k_n$, kde c'_n má hodnoty resp. $\frac{5}{3}, -1, \frac{5}{3}, -1$; konečně $y'_{n+1} = y'_n + \frac{d_n}{8} k_n J_n$, kde d_n má hodnoty resp. 0, 5, 4, 9.

Z těchto rekurentních vzorců snadno vyplývá: Každý bod intervalu (0, 1) lze psáti ve tvaru

$$x = \frac{a_0}{8} + \frac{b_0 a_1}{8^2} + \frac{b_0 b_1 a_2}{8^3} + \frac{b_0 b_1 b_2 a_3}{8^4} + \ldots;$$

potom je (zavedu-li ještě $b_n \cdot c'_n = c_n$)

$$f(x) = \frac{d_0}{8} + \frac{c_0 d_1}{8^2} + \frac{c_0 c_1 d_2}{8^3} + \frac{c_0 c_1 c_2 d_3}{8^4} + \ldots,$$

kde čísla a_n, b_n, c_n, d_n souvisejí dle této tabulky:

a_n	0	3	4	7
b_n	3	1	3	1
c_n	5	−1	5	−1
d_n	0	5	4	9

V extrémech je od jistého n stále $a_n = 4$, takže všechny členy od jistého počínaje tvoří řadu geometrickou; dostávám

$$x_e = \frac{a_0}{8} + \frac{b_0 a_1}{8^2} + \ldots + \frac{b_0 b_1 b_2 \ldots b_{n-2} a_{n-1}}{8^n} + \frac{4}{5} \frac{b_0 b_1 b_2 \ldots b_{n-1}}{8^n}$$

$$f(x_e) = \frac{d_0}{8} + \frac{c_0 d_1}{8^2} + \ldots + \frac{c_0 c_1 c_2 \ldots c_{n-2} d_{n-1}}{8^n} + \frac{4}{3} \frac{c_0 c_1 c_2 \ldots c_{n-1}}{8^n}$$

Tím jsou analyticky dány všechny extrémy mimo $x = 0$, yolím-li za n, a_0, $a_1, \ldots, a_{n-1}$ postupně všechny přípustné hodnoty

($n = 1, 2, 3, \ldots$, $a_i = 0, 3, 4, 7$).

Maximum nebo minimum nastává patrně dle toho, je-li $c_0 c_1 c_2 \ldots . c_{n-1}$ kladné či záporné, čili — což je totéž — je-li $a_0 + a_1 + \ldots . a_{n-1}$ (nebo $d_0 + d_1 + \ldots . + d_{n-1}$) sudé či liché.

Zavedu-li parametr

$$\zeta = \frac{\alpha_0}{4} + \frac{\alpha_1}{4^2} + \ldots . + \frac{\alpha_{n-1}}{4^n} + \ldots .$$

a kladu-li $a_n = 0, 3, 4, 7$ dle toho, je-li $\alpha_n = 0, 1, 2, 3$, dostávám parametrické vyjádření funkce Bolzanovy, jež podali pp. prof. Petr a prof. Rychlík.

O množinách s netransitivním uspořádáním členů.

Napsal *Karel Dusl.*

Množina jest jak známo *„uspořádaná"*, je-li znám seřaďovací zákon členů, takže o kterýchkoli dvou členech víme, který předchází a který následuje, což píšeme $a < b$,*) při čemž symbol $<$ znamená asymetrický, transitivní vztah přiřaďovací.**) Vztah $a < b$ vylučuje tedy současnou platnost $b < a$ a pro každé tři prvky $a < b < c$ jest $a < c$ současně. Takovým přiřaďovacím vztahem jest na př. srovnání členů dle velikosti ($\gtrless$), dle pořadí, nebo dle některé jiné závislosti $(\mathfrak{I})$ předepsané jednotně pro všechny členy množiny.

Můžeme ale stanoviti přiřaďovací vztah $a\ R\ b$, který je sice asymetrický. ale *netransitivní* (t. j. ne vždy transitivní), anebo *intransitivní* ($a\ R\ b$, $b\ R\ c$ vylučuje $a\ R\ c$). Asymetrickým netransitivním vztahem jest na př. příslušnost (ε) ku určité třídě, pro kterou platí jistý závěr $\varphi\ (x)$.

Rozložíme-li tedy množinu na více množin, můžeme elementy každé z množin seřaditi dle asymetrického a transitivního pravidla R_k elementy dvou různých množin na př. *m-té* a *n-té* pak srovnávati dle pravidla $R_{m,\,n}$ rovněž asymetrického a transitivního. Pak seřaďovací zákon stanovený takto pro veškeré elementy původní množiny bude sice asymetrický, ale nebude obecně transitivní. Ponecháme-li i zde symbol $<$, jakožto výraz právě definované obecné „přednosti" elementů, nebude obecně při každých třech prvcích dané množiny a, b, c, pro něž platí $a < b$, $b < c$, splněna relace $a < c$.

*) Symbol přednosti má být složen ze dvou obloučků na rozdíl od znamení nerovnosti. Pro nedostatek příslušného symbolu tištěno však rovně $<$ Čtenáři nebude však snad obtížno si uvědomiti, kde symbol $<$ znamená obecnou přednost a kde nerovnost.

**) L. Couturat. „Philosophische Principen der Mathematik". Str. 33. B. Russel „Principles of Mathematics" Chapter XXVI. p. 218.