N. Raševský

Příspěvek k theorii elektromagnetického pole

Časopis pro pěstování matematiky a fysiky, Vol. 51 (1922), No. 4, 292--308

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/109019

$m\varrho_0 = 763{\cdot}40$ cal, $m = 118{\cdot}7$, $\varrho_0 = 6{\cdot}43$ cal, $\gamma_0 = -0{\cdot}0056$ cal; přijmeme-li za specifické teplo bílého cínu při temperatuře zvratu hodnotu Gaede-ovu[37]) 0·0541 cal, bude specifické teplo šedého cínu při téže teplotě 0·0597 cal, což jest v dobrém souhlasu s hodnotou Wigandovou,[38]) jenž našel pro střední specifické teplo šedého cínu mezi 0° *C* a 18° *C* číslo 0·0589 cal. Dle toho bylo by, jak výše již uvedeno, teplo zvratu asi 6·43 cal. (při 18·7° *C*, což jest temperatura zvratu).

Ke konci pak konám milou povinnost vyslovuje vřelý dík za zvláštní zájem, radu a pomoc, kterou provázeli tuto práci pánové: Dr. Sophus Holst-Weber, továrník v Lejdě, jakož i profesoři Karlovy university Dr. F. Záviška a Dr. J. Heyrovský.

Ústav pro theoretickou fysiku Karlovy university v Praze.

Příspěvěk k theorii elektromagnetického pole.

N. Raševský.

Nedávno*) jsem uveřejnil stručný výklad myšlenek předčasně v r. 1918 zemřelého svého přítele *N. Pašského.* Základní předpoklad jeho theorie jest tento:

Rychlost světla, vyslaného bodovým světelným zdrojem, pohybujícím se rychlostí v, vůči souřadnému systému spolu se zdrojem se pohybujícímu dána jest vztahem

$$\sigma_\varphi = \frac{\sigma}{1 \pm k\cos\varphi} \quad , \quad k = \sqrt{\frac{\psi}{\sigma + \psi}}.$$

Při tom φ značí úhel sevřený světelným paprskem a směrem pohybu; ψ a σ jsou funkce rychlosti v vázané jedině těmito podmínkami:

$\psi(0) = 0 \quad , \quad \sigma(0) = c$ (obvyklá hodnota rychlosti světelné).

Geometricky jest tento předpoklad rovnocenný s výrokem, že hodograf rychlosti světelné v pohyblivém systému jest rotační ellipsoid, jehož rotační osou jest velká osa a v jehož jednom ohnisku tkví světelný zdroj.

Jest patrno, že tímto předpokladem se dá vyložiti výsledek *Michelsonova* pokusu. Značí-li totiž l poloměr pohybující se koule, v jejímž středu tkví světelný zdroj, jest doba potřebná k tomu,

[37]) *Ch. D. Hodgman, M F. Coolbaugh* and *C. E. Senseman:* Handbook of Chemistry and Physics, 8th ed., London. (Chapman and Hall Ltd.); 1921; p. 399.

[38]) Ibidem, p. 400.

*) Physical Review, November 1921, p. 369.

aby světlo dospělo ze středu O této koule ve směru charakterisovaném úhlem φ až na povrch koule, dána výrazem

$$T_1 = \frac{l}{\sigma_\varphi} = \frac{l(1 \pm k \cos \varphi)}{\sigma}.$$

Doba potřebná k návratu světla zpět, považujeme-li bod odrazu za samostatný světelný zdroj, jest podobně

$$T_2 = \frac{l(1 \mp k \cos \varphi)}{\sigma} = \frac{l}{\sigma_{(\varphi + \pi)}}$$

a doba „chodu a návratu“

$$T_1 + T_2 = \frac{2l}{\sigma}$$

jest nezávislá na směru. Při tom jest σ, jak snadno nahlédneme, „vypočtená“ rychlost světla, počítáme-li ji dle methody „chodu tam a zpět“ světelného paprsku.

Jak bylo vytčeno ve výše zmíněném pojednání, tento předpoklad, který budeme v dalším nazývati „princip *Pašského*“, vykládá všechna známá experimentální fakta, a do té míry jest tedy rovnocenný s theorií relativnosti. Libovolnost funkce ψ přináší s sebou tu okolnost, že tu máme nekonečnou řadu předpokladů vzájemně ekvivalentních a vyhovujících výsledku *Michelsonova* pokusu.

Nyní vzniká problém nalézti základní rovnice elektromagnetického pole, jež by byly v souhlasu s principem *Pašského.*

V tomto článku hodlám se zabývati pouze takovými elektromagnetickými soustavami, jichž všechny elementy zůstávají vzájemně v klidu a mají společnou rovnoměrnou a přímočarou rychlost v. Rovnice, které takto obdržíme, budou pouze zvláštním případem obecných rovnic.

§ 1. Dříve než začneme řešiti výše zmíněný problém, nutno se dohodnouti o terminologii, které budeme v dalším užívati. Systém pravoúhlých os, jenž trvá v absolutním klidu, budeme nazývati *„absolutní systém“*. Systém souřadný, pevně spojený s pohybujícím se zdrojem, budeme nazývati *„základní systém“*. Oba systémy jsou položeny tak, že odpovídající sobě osy jsou rovnoběžné a osa x splývá se směrem pohybu, jenž jest tedy vzat za „kladný směr“. Nesnadnost našeho problému vzrostla tou okolností, že rozdělení rychlostí kolem pohybujícího se zdroje není souměrné; geometricky řečeno, že zdroj netkví ve středu, nýbrž v jednom z ohnisek ellipsoidálního hodografu. Tuto nesnáz odstraníme poněkud umělým obratem.

Představme si pomocný systém souřadný S podobně položený jako *systém základní* a pohybující se vůči tomuto systému ve směru osy x rychlostí

$$u = \pm \sqrt{\psi^2 + \sigma \psi}. \tag{1}$$

Poněvadž v *základním systému* rychlost světla ve směru pohybu resp. ve směru opačném jest dána výrazem

$$\sigma + \psi \pm \sqrt{\psi^2 + \sigma\psi} \quad \text{resp.} \quad \sigma + \psi \mp \sqrt{\psi^2 + \sigma\psi},$$

budou tyto obě rychlosti vůči našemu pomocnému systému S v obou směrech rovny

$$\sigma + \psi.$$

Rychlost světla v systému S ve směru kolmém ke směru pohybu jest dána výrazem

$$c = \sqrt{\sigma(\sigma + \psi)}. \tag{2}$$

Hodograf rychlosti světla vůči systému S bude rotační ellipsoid, jehož rotační osou jest velká osa, v jehož středu tkví zdroj a jehož poloosy jsou rovny

$$\sigma + \psi \quad \text{resp.} \quad c = \sqrt{\sigma(\sigma + \psi)}.$$

S geometrického hlediska přechod od *základního systému* k systému S jest tudíž ekvivalentní přenesení počátku souřadnic z ohniska ellipsoidu do jeho středu. Podaří-li se nám nalézti rovnice, které by dávaly takové souměrné rozdělení rychlosti světla kolem zdroje, najdeme rovnice požadované principem *Pašského* jednoduše přechodem od systému S k systému *základnímu*, t. j. jednoduchou *Galileiho* transformací.

Abychom nyní nalezli řešení našeho problému, je třeba si připomenouti, že klassické *Maxwell-Lorentzovy* rovnice vztažené k *absolutnímu* systému dávají za hodograf rychlosti světla kouli.

Uvažujme nyní fysikální děj popsaný těmito *Maxwell-Lorentzovými* rovnicemi se stanoviska jiného *absolutního* systému, v němž jednotka délky ve směru osy x jest zkrácena v daném poměru a.

Se stanoviska tohoto druhého systému hodograf rychlosti světla bude očividně rotační ellipsoid, v jehož středu tkví zdroj.

Položíme-li

$$a = \frac{\sigma + \psi}{c},$$

kde c jest dáno vztahem (2), náš ellipsoidální hodograf bude právě takový, jaký hledáme pro systém S.

Napišme první dvě soustavy *Maxwell-Lorentzových* rovnic v pravoúhlých souřadnicích pro případ

$$v_x = v; \qquad v_y = v_z = 0.$$

$$\frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z} = \frac{1}{c}\frac{\partial E_x}{\partial t} + \frac{\varrho v_x}{c}$$

$$\frac{\partial H_x}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial x} = \frac{1}{c}\frac{\partial E_y}{\partial t}$$

$$\frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} = \frac{1}{c}\frac{\partial E_z}{\partial t}$$

$$\frac{\partial E_z}{\partial y}-\frac{\partial E_y}{\partial z}=-\frac{1}{c}\frac{\partial H_x}{\partial t}$$
$$\frac{\partial E_x}{\partial z}-\frac{\partial E_z}{\partial x}=-\frac{1}{c}\frac{\partial H_y}{\partial t}$$
$$\frac{\partial E_y}{\partial x}-\frac{\partial E_x}{\partial y}=-\frac{1}{c}\frac{\partial H_z}{\partial t}$$

V našem „zkráceném *absolutním*“ systému, kde

$$x'=\alpha x$$

a tudíž

$$\frac{\partial}{\partial x}=a\frac{\partial}{\partial x'}$$

tyto rovnice nabudou tvaru

$$\text{(I)}\qquad \begin{aligned} &\frac{\partial H_z}{\partial y'}-\frac{\partial H_y}{\partial z'}=\frac{1}{c}\frac{\partial E_x}{\partial t'}+\frac{\varrho v_x}{c}\\ &\frac{\partial H_x}{\partial z'}-a\frac{\partial H_z}{\partial x'}=\frac{1}{c}\frac{\partial E_y}{\partial t'}\\ &a\frac{\partial H_y}{\partial x'}-\frac{\partial H_x}{\partial y'}=\frac{1}{c}\frac{\partial E_z}{\partial t'}\end{aligned}$$

$$\text{(II)}\qquad \begin{aligned} &\frac{\partial E_z}{\partial y'}-\frac{\partial E_y}{\partial z'}=-\frac{1}{c}\frac{\partial H_x}{\partial t'}\\ &\frac{\partial E_x}{\partial z'}-a\frac{\partial E_z}{\partial x'}=-\frac{1}{c}\frac{\partial H_y}{\partial t'}\\ &a\frac{\partial E_y}{\partial x'}-\frac{\partial E_x}{\partial y'}=-\frac{1}{c}\frac{\partial H_z}{\partial t'}\end{aligned}$$

Tyto rovnice, jak plyne z toho, co bylo řečeno dříve, musí platiti pro systém S.

Abychom přešli nyní od systému S k *základnímu* systému, musíme provésti tyto transformace:

$$X=x'+ut$$
$$Y=y';\quad Z=z';\quad t=t'.$$

Všechny částečné derivace dle x, y, z zůstanou nezměněny, avšak derivace dle t se změní dle vzorce

$$\frac{\partial}{\partial t'}=\frac{\partial}{\partial t}+u\frac{\partial}{\partial x}$$

Tudíž naše rovnice obdrží tvar

$$\frac{\partial H_z}{\partial Y}-\frac{\partial H_y}{\partial Z}=\frac{1}{c}\frac{\partial E_x}{\partial t}+\frac{u}{c}\frac{\partial E_x}{\partial X}+\frac{\varrho v_x}{c}$$

$$\text{(Ia)}\qquad \begin{aligned} \frac{\partial H_x}{\partial Z} - a\frac{\partial H_z}{\partial X} &= \frac{1}{c}\frac{\partial E_y}{\partial t} + \frac{u}{c}\frac{\partial E_y}{\partial X} \\ a\frac{\partial H_y}{\partial X} - \frac{\partial H_x}{\partial Y} &= \frac{1}{c}\frac{\partial E_z}{\partial t} + \frac{u}{c}\frac{\partial E_z}{\partial X} \end{aligned}$$

$$\text{(IIa)}\qquad \begin{aligned} \frac{\partial E_z}{\partial Y} - \frac{\partial E_y}{\partial Z} &= -\frac{1}{c}\frac{\partial H_x}{\partial t} - \frac{u}{c}\frac{\partial H_x}{\partial X} \\ \frac{\partial E_x}{\partial Z} - a\frac{\partial E_z}{\partial X} &= -\frac{1}{c}\frac{\partial H_y}{\partial t} - \frac{u}{c}\frac{\partial H_y}{\partial X} \\ a\frac{\partial E_y}{\partial X} - \frac{\partial E_x}{\partial Y} &= -\frac{1}{c}\frac{\partial H_z}{\partial t} - \frac{u}{c}\frac{\partial H_z}{\partial X}. \end{aligned}$$

Abychom našli tvar těchto rovnic vůči *absolutnímu* systému, musíme provésti druhou *Galileiho* transformaci, která odpovídá přechodu od systému pohybujícího se rovnoměrnou rychlostí v k systému setrvávajícímu v klidu tímtéž způsobem jako před chvílí; obdržíme

$$\text{(Ib)}\qquad \begin{aligned} \frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z} &= \frac{1}{c}\frac{\partial E_x}{\partial t} + \frac{v+u}{c}\cdot\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\varrho v x}{c} \\ \frac{\partial H_x}{\partial z} - a\frac{\partial H_z}{\partial x} &= \frac{1}{c}\frac{\partial E_y}{\partial t} + \frac{v+u}{c}\cdot\frac{\partial E_y}{\partial x} \\ a\frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} &= \frac{1}{c}\frac{\partial E_z}{\partial t} + \frac{v+u}{c}\cdot\frac{\partial E_z}{\partial x} \end{aligned}$$

$$\text{(IIb)}\qquad \begin{aligned} \frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} &= -\frac{1}{c}\frac{\partial H_x}{\partial t} - \frac{v+u}{c}\frac{\partial H_x}{\partial x} \\ \frac{\partial E_x}{\partial z} - a\frac{\partial E_z}{\partial x} &= -\frac{1}{c}\frac{\partial H_y}{\partial t} - \frac{v+u}{c}\frac{\partial H_y}{\partial x} \\ a\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} &= -\frac{1}{c}\frac{\partial H_z}{\partial t} - \frac{v+u}{c}\frac{\partial H_z}{\partial x} \end{aligned}$$

Není bez důležitosti poznamenati k tomu toto:

V těchto rovnicích nelze považovati c za *absolutní* konstantu, nýbrž za funkci rychlosti v, definovanou vztahem (2).

Poněvadž uvažujeme pouze systémy pohybující se rovnoměrně, pro něž $v = \text{const}$, nabývá také c určité konstantní hodnoty.

Co se týče v, to jest *vždy absolutní* rychlost našeho systému.

§ 2. V předešlém paragrafu jsme obdrželi specielní tvar elektromagnetických rovnic, kterého musí nabýti obecné rovnice polní vyhovující principu *Pašského* pro speciální případ $v = \text{Const}$.

Tvar obecných rovnic nebyl nijak našimi výsledky udán.

Neboť, ačkoli problém, nalézti zvláštní případ z případu obecného, má určité řešení, obrácený problém nemůže býti řešen jediným určitým způsobem.

Ponechávajíce tento problém úvahám pozdějším pokusíme se zodpověděti tuto otázku: jakého druhu musí býti výraz pro hustotu energie v poli a pro tok energie, aby naše rovnice byly v souhlasu se zákonem zachování energie. Užijeme-li těchto pomocných vzorců v §u 4, budeme moci studovati problém elektromagnetiché hmoty a srovnáním s experimentálními výsledky poukázati na oprávnění naší theorie na existenci.

Nyní zavedeme tyto předpoklady.

Namísto třetí a čtvrté *Maxwellovy* rovnice

$$\operatorname{div} E = \varrho$$

a

$$\operatorname{div} H = 0$$

položíme ve shodě s našimi předešlými úvahami

$$a\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = \varrho$$

a

$$a\frac{\partial H_x}{\partial x} + \frac{\partial H_y}{\partial y} + \frac{\partial H_z}{\partial z} = 0.$$

Pro sílu působící na jednotku náboje mohli bychom vzíti zákon, jaký by nám bylo libo, poněvadž to nepůsobí nijak rušivě na rychlost šíření. V této práci učiníme *prozatímně nejjednodušší* zobecnění a zvolíme za sílu výraz

(4) $$f = E + \frac{1}{c}[v \,.\, H],$$

kdež oproti klassické theorii budeme předpokládati, že c jest funkcí v danou vztahem (2).

Hledejme nyní hodnotu práce vykonané elektromagnetickými silami v naší soustavě za jednotku času. Poněvadž vektorový součin

$$[v \,.\, H]$$

jest kolmý k v, třeba bráti ohled pouze na prvý člen pravé strany rovnice (4). Tedy úhrnná hodnota práce v našem systému za jednotku času bude

(5) $$A\iiint (\varrho v \,.\, E)\, d\tau,$$

kde $d\tau$ značí element objemu a integrace jest vztažena na celou uvažovanou soustavu.

Dosadíme-li za ϱv hodnotu, kterou obdržíme z (1*b*) sečtením příslušných členů všech těch rovnic kladouce kromě toho

$$u + v = \Psi,$$

najdeme

$$A=\iiint\left\{c\left[E_x\left(\frac{\partial H_z}{\partial y}-\frac{\partial H_y}{\partial z}\right)+E_y\left(\frac{\partial H_x}{\partial z}-a\frac{\partial H_z}{\partial x}\right)+E_z\left(a\frac{\partial H_y}{\partial x}-\frac{\partial H_x}{\partial y}\right)\right]\right.$$

$$\left.-\Psi E\frac{\partial E}{\partial x}-E\frac{\partial E}{\partial t}\right\}d\tau.$$

Shrneme-li všechny členy obsahující derivace dle x, y, z a integrujeme-li per partes, obdržíme

$$\iint c\left\{dy\,dz\left(E_zH_y-E_yH_z-\frac{\Psi}{ca}E^2\right)a+dx\,dz\left(E_xH_z-E_zH_x\right)+\right.$$

$$\left.+dx\,dy\left(E_yH_x-E_xH_y\right)\right\}$$

$$-\iiint\left\{c\left[a\,H_y\frac{\partial E_z}{\partial x}-a\,H_z\frac{\partial E_y}{\partial x}+H_z\frac{\partial E_x}{\partial y}-H_x\frac{\partial E_z}{\partial y}+H_x\frac{\partial E_y}{\partial z}\right.\right.$$

$$\left.\left.-H_y\frac{\partial E_x}{\partial z}-\frac{\Psi}{c}E\frac{\partial E_z}{\partial x}\right]+E\frac{\partial E}{\partial t}\right\}d\tau.$$

Objemový integrál tohoto výraz lze psáti ve tvaru

$$\iiint\left\{c\left[H_x\left(\frac{\partial E_y}{\partial z}-\frac{\partial E_z}{\partial y}\right)+H_y\left(a\frac{\partial E_z}{\partial x}-\frac{\partial E_x}{\partial z}\right)+H_z\left(\frac{\partial E_x}{\partial y}-a\frac{\partial E_y}{\partial x}\right)\right.\right.$$

$$\left.\left.-\frac{\Psi}{c}E\frac{\partial E}{\partial x}\right]+E\frac{\partial E}{\partial t}\right\}d\tau,$$

anebo vzhledem ke (IIb) a k tomu, že

$$H_x\frac{\partial H_x}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{H^2}{2}\right)$$

také takto:

$$\iiint\left\{\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{2}H^2\right)+\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{2}E^2\right)\right\}d\tau-\iiint c\left\{\frac{1}{2}\frac{\Psi}{c}\frac{\partial}{\partial x}E^2-\frac{1}{2}\frac{\Psi}{c}\frac{\partial}{\partial x}H^2\right\}d\tau.$$

Druhý integrál tohoto výrazu lze psáti ve tvaru

$$\iint c\,dy\,dz\left\{\frac{1}{2}\frac{\Psi}{c}E^2-\frac{1}{2}\frac{\Psi}{c}H^2\right\}.$$

Shrnutím všech našich výsledků obdržíme

$$A=-\iint c\left\{dy\,dz\left(a\,E_yH_z-a\,E_zH_y+\frac{1}{2}\frac{\Psi}{c}\left[E^2+H^2\right]\right)+\right.$$

$$\left.+dx\,dz\left(E_zH_x-E_xH_z\right)+dx\,dy\left(E_xH_y-E_yH_x\right)\right\}$$

$$-\frac{\partial}{\partial t}\iiint\left\{\frac{1}{2}E^2+\frac{1}{2}H^2\right\}d\tau.$$

Jestliže označíme písmenem $\mathfrak{U}$ vektor, jehož složky jsou:

$$\mathfrak{U}_x = c\left\{a\,E_y H_x - a\,E_x H_y + \frac{1}{2}\frac{\psi}{c}\left[E^2 + H^2\right]\right\}$$

(6) $$\mathfrak{U}_y = c\left\{E_z H_x - E_x H_z\right\}$$

$$\mathfrak{U}_z = c\left\{E_x H_y - E_y H_x\right\}$$

a položíme

(7) $$W = \tfrac{1}{2}E^2 + \tfrac{1}{2}H^2,$$

můžeme psáti

(7′) $$A \quad \iint \mathfrak{U}_n\,ds + \frac{\partial}{\partial t}\iiint W\,d\tau = 0,$$

kde *ds* jest element plošný. Ze (*1′*) vidíme, že *musíme* pokládati *W* za hustotu energie v poli ve *shodě* s klassickou theorií a $\mathfrak{U}$ za tok energie (jenž se tu liší od *Poyntingova* výrazu), chceme-li vyhověti zákonu zachování energie.

§ 3. Nyní odvodíme vzorce pro elektromagnetický impuls a *Maxwellova* napětí v naší theorii. Cestu k tomu ukazuje klassická theorie *Maxwell-Lorentzova*. Jako tam obdržíme pro úhrnnou sílu působící v naší soustavě vzorec

(8) $$F = \iiint\left\{\varrho\left(E + \frac{1}{c}\,[v\,.\,H]\right)\right\}d\tau,$$

kde trojnásobný integrál se vztahuje k celé soustavě.

Položme nyní

(9) $$D(E) = a\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = \varrho$$

a označme symbolem $R(E)$ vektor, jehož složky jsou dány levými stranami rovnic (I).

Pak najdeme

(10) $$\varrho v = c\,R(H) - \frac{\partial E}{\partial t} - \psi\frac{\partial E}{\partial t}.$$

Dosadíme-li tuto hodnotu do (8), obdržíme

$$F = \iiint\left\{D(E)\,E + \frac{1}{c}\left[c\,R(H)\,H\right] - \frac{1}{c}\left[\frac{\partial E}{\partial t}.H\right] - \frac{1}{c}\,\psi\left[\frac{\partial E}{\partial t}\,H\right]\right\}d\tau.$$

Uvážíme-li, že

$$\left[\frac{\partial E}{\partial t}\,H\right] = \frac{\partial}{\partial t}\left[E.H\right] - \left[E\cdot\frac{\partial H}{\partial t}\right] = \frac{\partial}{\partial t}\left[E.H\right] + c\left[E.R(E)\right] +$$
$$+ \psi\left[E\cdot\frac{\partial H}{\partial x}\right]$$

a $$[E . R(E)] = -[R(E) \cdot E],$$

a také $$D(H) = 0,$$

tu obdržíme

$$(11)\begin{cases} F = -\iiint \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}[E . H]\,d\tau + \iiint \Big\{D(E) . E + [R(E) E]\Big\}\,d\tau + \\ + \iiint \Big\{D(H) . H + [R(H) . H]\Big\}\,d\tau - \iiint \frac{1}{c}\,\Psi\left(\left[\frac{\partial E}{\partial x} \cdot H\right] + \left[E \cdot \frac{\partial H}{\partial x}\right]\right)d\tau \end{cases}$$

Jak snadno patrno, poslední integrál tohoto výrazu jest

$$-\iiint \frac{1}{c}\,\Psi \frac{\partial}{\partial x}\Big[E . H\Big] = -\iint \Big\{\frac{1}{c}\,\Psi\Big[E . H\Big]\Big\}\,l\,ds,$$

kde l značí cosinus úhlu, který svírá normála k ds s osou x.

Uvažujme nyní x-ovou složku třetího členu síly F z rovnice (11). Označme ji X_H. Pak bude

$$X_H = \iiint \Big\{\left(a\frac{\partial H_x}{\partial x} + \frac{\partial H_y}{\partial y} + \frac{\partial H_z}{\partial z}\right) H_x + H_z\left(\frac{\partial H_x}{\partial z} - a\frac{\partial H_z}{\partial x}\right) - H_y\left(a\frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y}\right)\Big\}\,d\tau$$

$$= \iiint \Big\{a H_x \frac{\partial H_x}{\partial x} - a H_y \frac{\partial H_y}{\partial x} - a H_z \frac{\partial H_z}{\partial x} - H_x \frac{\partial H_y}{\partial y} + H_y \frac{\partial H_x}{\partial y} + H_x \frac{\partial H_z}{\partial z} + H_x \frac{\partial H_x}{\partial z}\Big\}\,d\tau$$

$$= \iiint \Big\{\frac{\partial}{\partial x}\frac{1}{2}\left(a H_x^2 - a H_y^2 - a H_z^2\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(H_x H_y\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(H_x H_z\right)\Big\}\,d\tau$$

$$= \iint ds\,\Big\{l \,.\, \frac{1}{2}\left(a H_x^2 - a H_y^2 - a H_z^2\right) + m H_x H_y + n H_x H_z\Big\},$$

kde l, m, n jsou směrové kosiny normály k elementu ds.

Podobné výrazy platí pro složku y-ovou a z-ovou síly závisející pouze na H a způsobem zcela analogickým pro složky síly závisející pouze na E a na $[EH]$.

Jestliže položíme

$$(12)\begin{cases} p_{xx} = \frac{1}{2}\left\{a\,Ex^2 - a\,E_y{}^2 - a\,E_z{}^2 + a\,Hx^2 - a\,H_y{}^2 - H_z{}^2 - 2\frac{\Psi}{c}[E\,.\,H]_x\right\} \\ p_{yy} = \frac{1}{2}\left\{E_y{}^2 - E_z{}^2 - Ex^2 + H_y{}^2 - H_z{}^2 - Hx^2\right\} \\ p_{zz} = \frac{1}{2}\left\{E_z{}^2 - Ex^2 - E_y{}^2 + H_z{}^2 - Hx^2 - H_y{}^2\right\} \\ p_{xy} = a\,(Ex\,E_y + Hx\,H_y) - \frac{\Psi}{c}[E\,.\,H]_y; \\ p_{yx} = Ex\,Ey - Hx\,Hy;\; pxz = a\,(Ex\,Ez + Hx\,Hz) - \frac{\Psi}{c}[E\,H]z \\ p_{zy} = p_{yz} = E_y\,E_z - H_y\,H_z;\quad pzx = Ex\,Ez + Hx\,Hz; \end{cases}$$

pak složky posledních tří členů můžeme psáti v takovémto tvaru berouce na př. x-ovou složku

$$Fx = \iint (lpxx + mpyx + npzx)\,ds.$$

Poslední tři členy se tudíž redukují na plošné integrály a odpovídají patrně *Maxwellovým* napětím klassické theorie.

Dodatečný člen daný výrazem

$$\frac{\partial}{\partial t}\iiint \frac{1}{c}\,[E\,.\,H]\;d\tau$$

odpovídá stejně jako v klassické theorii síle příslušné časové změně impulsu pole, jehož hustota tudíž jest dána výrazem

$$g = \frac{1}{c}\,[E\,.\,H]. \tag{13}$$

Jest patrno, že naše theorie dává týž sice výraz pro impuls pole jako klassická theorie, avšak obecnější výrazy pro napětí, které se redukují na *Maxwellovy* vzorce pro případ

$$v = 0.$$

Podmínky symmetrie tensoru napětí nejsou zde také tytéž. Tato symmetrie platí zde pouze pro složky kolmé ke směru pohybu, t. j. pro složky neobsahující indexu x.

§ 4. Když jsme již odvodili výsledky předešlého paragrafu, můžeme přikročiti k detailnějšímu studiu, jaké vyhlídky má naše theorie na přímé porovnání s pokusem. Míním tu otázku elektromagnetické hmoty.

Uvažujme nyní rovnice (Ia) a (IIa), které se vztahují k *základnímu systému* pohybujícímu se s uvažovanou elektromagnetickou soustavou. Ze stacionárnosti procesu rovnoměrného pohybu plyne patrně, že pole vzbuzené touto soustavou jest unášeno touto elektromagnetickou soustavou, jako kdyby bylo s touto soustavou nerozlučně spojeno.

V tomto případě všechny derivace dle času t zmizí; a tedy naše rovnice lze psáti ve tvaru:

$$
(14)\quad \left\{\begin{aligned}
&\frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z} = \frac{u}{c}\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\varrho v}{c}\\
&\frac{\partial H_x}{\partial z} - a\frac{\partial H_z}{\partial x} = \frac{u}{c}\frac{\partial E_y}{\partial x}\\
&a\frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} = \frac{u}{c}\frac{\partial E_z}{\partial x}
\end{aligned}\right.
$$

$$
(15)\quad \left\{\begin{aligned}
&\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} = -\frac{u}{c}\frac{\partial H_x}{\partial x}\\
&\frac{\partial E_x}{\partial z} - a\frac{\partial E_z}{\partial x} = -\frac{u}{c}\frac{\partial H_y}{\partial x}\\
&a\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} = -\frac{u}{c}\frac{\partial H_z}{\partial x}
\end{aligned}\right.
$$

Zaveďme sem nyní nové proměnné

$$x' = \frac{x}{a}\ ;\ y' = y\ ;\ z' = z.$$

Tento nový systém proměnných označme S'. Jestliže vzpomeneme, že

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{1}{a}\frac{\partial}{\partial x'},$$

budou naše rovnice vůči S' míti tento tvar:

$$
(16)\quad \left\{\begin{aligned}
&\frac{\partial H_z}{\partial y'} - \frac{\partial H_y}{\partial z'} = \frac{u}{ac}\frac{\partial E_x}{\partial x'} + \frac{\varrho v}{c}\\
&\frac{\partial H_x}{\partial z'} - \frac{\partial H_z}{\partial x'} = \frac{u}{ac}\frac{\partial E_y}{\partial x'}\\
&\frac{\partial H_y}{\partial x'} - \frac{\partial H_x}{\partial y'} = \frac{u}{ac}\frac{\partial E_z}{\partial x'}
\end{aligned}\right.
$$

$$
(17)\quad \left\{\begin{aligned}
&\frac{\partial E_z}{\partial y'} - \frac{\partial E_y}{\partial z'} = -\frac{u}{ac}\frac{\partial H_x}{\partial x'}\\
&\frac{\partial E_x}{\partial z'} - \frac{\partial E_z}{\partial x'} = -\frac{u}{ac}\frac{\partial H_y}{\partial x'}\\
&\frac{\partial E_y}{\partial x'} - \frac{\partial E_x}{\partial y'} = -\frac{u}{ac}\frac{\partial H_z}{\partial x'}
\end{aligned}\right.
$$

Zavedeme-li nyní

$$\varrho' = \frac{av}{u}\varrho, \tag{18}$$

uvidíme, že naše rovnice nabyly tvaru klassických rovnic vztahujících se k osám pohybujícím se spolu se zdrojem a to rychlostí

$$\frac{u}{a} = w. \tag{19}$$

Klassická theorie poskytuje nám tudíž methodu, kterou lze takové rovnice integrovati. Jak známo,*) elektrický a magnetický vektor obdržíme v tomto případě ze vztahů

$$E = \frac{w}{c}\frac{\partial U}{\partial x'} - \operatorname{grad} \Phi,$$

$$H = \operatorname{curl} U,$$

kde elektrodynamické potenciály U a Φ lze obdržeti z elektrostatického potenciálu Φ_1 nové elektrické soustavy v klidu S_1, kterou obdržíme z S' dilatací všech délek systému S' rovnoběžných ke směru pohybu v poměru

$$\frac{1}{\sqrt{1-\gamma^2}},$$

kde

$$\gamma = \frac{w}{c} = \frac{u}{ac} = k. \tag{20}$$

Avšak vzhledem ke (2) a (3) jest

$$\frac{1}{\sqrt{1-\gamma^2}} = a.$$

Souvislost mezi Φ a Φ_1 jest takováto:

$$\Phi_1 = \sqrt{1-\gamma^2}\,\Phi = \frac{1}{a}\Phi. \tag{21}$$

Tudíž, jestliže naše pohybující se soustava jest elektron tvaru kulového, tu příslušný k němu elektron ve fiktivním systému S' bude míti tvar zkráceného rotačního ellipsoidu a ve druhém fiktivním systému S_1 opět tvar koule.

Z toho všeho, co bylo výše řečeno, plyne toto:

Jestliže chceme vypočítati pole kulovitého elektronu pohybujícího se rovnoměrně a přímočaře, potřebujeme vypočítati elektrostatický potenciál téhož elektronu setrvávajícího v klidu a pomocí vztahu (18) přejíti od systému S_1 k *systému základnímu*. Tímto způsobem najdeme výraz pro úhrnný impuls v poli pro systém S_1

*) *Richardson:* Electron theory of matter, p. 218. [Cambridge University Press] 1914.

$$(22)\qquad \begin{cases} G_{1x} = \dfrac{e'^2 \gamma}{6\pi c R \sqrt{1-\gamma^2}} \\ G_{1y} = G_{1z} = 0, \qquad (R = \text{poloměr elektronu}). \end{cases}$$

Při přechodu od S_1 k S' a potom k *základnímu systému* deformace nemá za následek změnu hustoty elektřiny; avšak, poněvadž

$$\tau\varrho = e; \quad \tau'\varrho' = e'; \quad a\tau' = \tau,$$

kd τ jest objem, který zaujímá náboj, musíme položiti

$$e' = e\,\frac{v}{u}.$$

Tedy obdržíme

$$(23)\qquad G_x = \frac{e^2 \dfrac{v^2}{u^2}\gamma}{6\pi c R \sqrt{1-\gamma^2}}, \quad G_y = G_z = 0.$$

Tímtéž způsobem jako v klassické theorii zavedeme výrazy pro podélnou a příčnou hmotu

$$(24)\qquad m_l = \frac{\partial G_x}{\partial \dot{x}}, \quad m_t = \frac{G}{\dot{x}} \qquad (25)$$

Počítajíce tyto výrazy, nesmíme zapomenouti, že c není obsolutní konstantou; tím obdržíme poněkud složitější vzorce. Obdržíme tu

$$(26)\qquad m_l = \frac{\partial G}{\partial \gamma}\,\varphi(v) = \frac{\partial G}{\partial k}\,\varphi(v),$$

kde

$$(27)\qquad \varphi(v) = \frac{\partial \gamma}{\partial v} = \frac{\partial k}{\partial v}$$

a

$$(28)\qquad m_t = \frac{1}{c}\,\frac{G}{\gamma}\,\frac{u}{av} = \frac{1}{c}\,\frac{G}{k}\,\frac{u}{av}.$$

Dosadíme-li za G hodnotu (23), obdržíme velmi složité vzorce závisející na σ, ψ a $\varphi(v)$. Měníme-li tvar těchto funkcí, obdržíme rozličné vzorce pro elektromagnetickou hmotu.

Aniž se chceme pouštěti zde do podrobností, obraťme svoji pozornost na tento zvláštní příklad, jenž poslouží jako illustrace k předešlému textu.

Učiňme předpoklad, že ψ a σ jsou dány kladnými*) kořeny rovnic

$$(29)\qquad \begin{cases} v = u = \sqrt{\psi(\sigma+\psi)} \\ c = \sqrt{\sigma(\sigma+\psi)} = \text{Const.} \end{cases}$$

*) Záporné kořeny se nesrovnávají s podmínkou $\psi(0) = 0$.

V tomto případě (23) se redukuje na tvar

$$G_x = \frac{e^2 k}{6\pi R c \sqrt{1-k^2}}. \tag{23a}$$

Při diskussi těchto vzorců můžeme netoliko c, nýbrž i k považovati za konstanty následkem „kvasistacionárnosti“ uvažovaného processu.

Tak obdržíme pro elektromagnetické hmoty tyto výrazy:

$$m_l = \frac{m_0}{(1-k^2)^{\frac{3}{2}}}, \quad m_t = \frac{m_0}{(1-k^2)^{\frac{1}{2}}}, \quad m_0 = \frac{e^2}{6\pi R c^2}.$$

Obdrželi jsme touto cestou *Lorentz-Einsteinovy* vzorce s tím toliko rozdílem, že místo

$$\beta = \frac{v}{c}$$

máme

$$k = \gamma = \frac{v}{ac}.$$

Avšak poněvadž a definované vztahem (29) jest téže řádové velikosti jako v/c, jest a vždy veličina velmi málo rozdílná od jednotky. V případě $v = c$ liší se od ní pouze na desátém desetinném místě. Tedy v mezích pozorovacích chyb naše vzorce jsou totožné s *Lorentzovými.*

Ponechávajíce si otázku, v jakém poměru stojí k sobě theorie relativnosti a naše theorie, až ke konci tohoto článku, můžeme pronésti již zde toto důležité tvrzení:

*Princip **Pašského** nevede ke sporu s pokusem, applikujeme-li jej na zjevy elektromagnetické* a dále ***Buchererův*** pokus, považujeme-li jej i za absolutně přesný se stanoviska experimentálního, nemůže býti pokládán za důkaz theorie relativnosti.

Nutno připojiti důležitou poznámku.

Poněvadž všechny úvahy o elektromagnetické hmotě závisejí značně na předpokladu, který jsme učinili o síle působící na jednotku náboje, nesmíme mysliti, že právě obdržené výsledky jsou charakteristické pro základní předpoklad naší theorie, t. j. pro princip *Pašského.* Bylo to spíše míněno jako illustrace dokazující, že tento princip jest schopen applikace na theorii elektromagnetického pole. *Podstatný bod* naší theorie jest *methoda odvození pole z rovnoměrného pohybu náboje.*

My nalézáme pole nabitého systému pohybujícího se rovnoměrně a přímočaře z pole *zcela podobného* systému trvajícího v klidu, kdežto klassická theorie je odvozuje ze systému nepatrně deformovaného, trvajícího v klidu; tudíž, abychom obdrželi analogický výsledek, jako v klassické theorii, nepotřebujeme hypothesy o kontrakci pohybujících se těles.

Z předešlého jest zřejmo, že vzorec (4) jest považovati za prozatímní předpoklad. Proti němu bylo by možno učiniti řadu námitek, ale podobné studium této stránky tohoto problému není naším úkolem.

§ 5. Jakožto dodatek k tomu, co bylo zde vyloženo, zmíníme se ještě o otázce otáčecího momentu v našem elektromagnetickém systému.

Úhrnný otáčecí moment jest

$$\mathfrak{N} = \iiint [\mathfrak{r} \, . \, \mathfrak{f}] \, d\tau,$$

kde $\mathfrak{f}$ značí sílu působící na jednotku objemu a $\mathfrak{r}$ jest průvodič uvedený z daného pevného bodu k uvažované jednotce objemu.

Dle úvah z § 3. můžeme $\mathfrak{f}$ rozložiti v tyto složky*):

$$\mathfrak{f} = \mathfrak{div}\, p' - \frac{\partial g}{\partial t} - w \frac{\partial g}{\partial x}, \tag{31}$$

kde p' jest tensor o složkách

$$p'_{xx} = \frac{1}{2} \left\{ aE_x^2 - aE_y^2 - aE_z^2 + aH_x^2 - aH_y^2 - aH_z^2 \right\}$$

$$p'_{yy} = \frac{1}{2} \left\{ E_y^2 - E_x^2 - E_z^2 + H_y^2 - H_x^2 - H_z^2 \right\}$$

$$p'_{zz} = \frac{1}{2} \left\{ E_z^2 - E_y^2 - E_x^2 + H_z^2 - H_y^2 - H_x^2 \right\}$$

$$p'_{xy} = a\,(E_x E_y + H_x H_y) = ap'_{yx}$$

$$p'_{zy} = p'_{yz} = E_y E_z + H_y H_z$$

$$p'_{xz} = a\,(E_x E_z + H_x H_z) = ap'_{zx}$$

a

$$g = \frac{1}{c} [E \, . \, H]$$

jest impuls jednotky objemu.

Tudíž úhrnný otáčecí moment bude

$$\mathfrak{N} = \iiint [\mathfrak{r} \, . \, \mathfrak{div}\, p'] \, d\tau - \frac{\partial}{\partial t} \iiint [\mathfrak{r} \, . \, g] \, d\tau - w \iiint \left[\mathfrak{r} \, . \, \frac{\partial g}{\partial x}\right] d\tau =$$

$$= \mathfrak{N}_1 + \mathfrak{N}_2 + \mathfrak{N}_3 .$$

Prvý integrál $\mathfrak{N}_1$ lze transformovati takto:**)

$$\mathfrak{N}_1 = \iiint [\mathfrak{r} \, \mathfrak{div}\, p'] \, d\tau = \iint [\mathfrak{r} \, . \, \mathfrak{p}'_n] \, dS.$$

Z okolnosti, že p' jest kvadratickou formou v E a H a že obě dvě mizí v řádu R^{-2}, kde R jest poloměr koule, k níž jest vztažen onen

*) *Laue:* Das Relativitätsprinzip, p. 85. (Vieweg & Sohn, 1911).
**) Loc. cit. p. 87.

dvojnásobný integrál, plyne, že tento integrál konverguje k nule, když R vzrůstá do nekonečna.

Integrál $\mathfrak{N}_3$ lze vypočísti integrováním po částech (per partes) takto:

(32)
$$\mathfrak{N}_3 = -\psi\iiint\left[\mathfrak{r}\,\frac{\partial g}{\partial x}\right]d\tau = -\psi\iint[\mathfrak{r}\,g]\,dS + \psi\iiint\left[\frac{\partial \mathfrak{r}}{\partial x}\,g\right]d\tau.$$

Prvý člen na pravé straně jest roven nule z důvodu výše zmíněného. Tedy obdržíme

$$\mathfrak{N}_3 = \psi\iiint\left[\frac{\partial \mathfrak{r}}{\partial x}\,g\right]d\tau = \left[\psi\,\mathfrak{j}\iiint g\,d\tau\right] = \left[\psi\,G\right],$$

kde $\mathfrak{j}$ jest x-ová složka jednotkového vektoru, t. j.

$$\frac{\partial \mathfrak{r}}{\partial x} = \mathfrak{j}\,.$$

Integrál $\mathfrak{N}_2$ může býti dle *Laue**) transformován takto:

$$\mathfrak{N}_2 = \frac{d}{dt}\iiint[\mathfrak{r}\,.\,g]\,d\tau = -[r\,.\,G]. \tag{33}$$

Úhrnný otáčecí moment jest tudíž roven

$$\mathfrak{N} = \mathfrak{N}_2 + \mathfrak{N}_3 = [\psi\,\mathfrak{j}\,.\,G] - [r\,.\,G] = [(\psi\,\mathfrak{j} - r)\,.\,G]. \tag{34}$$

Vidíme tudíž, že obecně otáčecí moment v poli nezmizí; zvláštní případ

$$\psi = v$$

anebo

$$\psi^2 + \sigma\psi = 0$$

jest vyloučen jakožto fysikálně nemožný.

Z této nesnáze lze se vyprostiti dvojím způsobem:

1. Theorie relativnosti s hlediska elektrodynamiky vzduchoprázdného prostoru nevykládá výsledky pokusu *Trouton-Noble* a jak praví *Laue*, jest třeba theorii doplniti přihlédnutím k mechanice elasticky napiatých těles.**)

Analogické hledisko můžeme zaujmouti i v naší theorii.

2. Poněvadž výsledky §u 5. také značně závisejí na předpokladu o tvaru pomleromotorické síly, můžeme náležitou změnou tohoto předpokladu docíliti toho, že otáčecí moment zmizí.

Uvažujme na konec vzájemný vztah mezi *Lorentz-Einsteinovou* a naší theorií.

Za tím účelem uvažujme zvláštní případ §u 4., jenž vede ke (29).

*) Loc. cit. p. 97.
**) Loc. cit. p. 99.

V tomto případě systém S definovaný v §u 1. jest v *absolutním klidu.*

Abychom obdrželi proměnnost rychlosti šíření světla v různých směřech, vyšli jsme z *počátečního absolutního systému*, k němuž se vztahovaly klassické rovnice a který jsme podrobili zkrácení (kontrakci) podél osy x.

Avšak ta deformace byla jen *formální, čistě mathematická*; této deformaci nepřipisujeme reálnost, nýbrž uvažujeme ji pouze jako nutnou mathematickou transformaci.

Podle klassických elektromagnetických rovnic pole každého systému v rovnoměrném pohybu jest určeno z pole odpovídajícího *deformovanému* systému v klidu; aby *Lorentz* obdržel výsledky požadované pokusem, musil elektron podrobiti opačné deformaci, t. j. učiniti předpoklad, že pohybující se elektron jest zkrácen ve směru pohybu, jak to vyžaduje *Einsteinova* theorie relativnosti (považuje tuto deformaci za reálnou).

Místo, abychom stlačili samotný elektron, smáčkneme *formálně* náš prostor a fysikální interpretací toho bude změna rychlosti světelné. Tedy ačkoli s fysikálního hlediska tato dvě stanoviska jsou úplně rozdílná, s mathematického hlediska vedou přece k týmž výsledkům, neboť věta:

„*Jednotka délky se zkrátila*“

jest formálně ekvivalentní větě:

„*Rychlost šíření světla vzrostla.*“

Takto obdržíme pro náš tuhý elektron, neschopný deformace, tytéž vzorce, jako *Lorentz* pro svůj deformace schopný.

S mathematického hlediska jest to do jisté míry věc úmluvy ohledně délkové jednotky, které nutno užívati v pohybujícím se systému.

Ke konci pak pokládám za milou povinnost vysloviti vřelý dík p. docentu dru. V. Trkalovi za překlad tohoto pojednání do češtiny i za ochotné prohlédnutí korrektur.

Závislost refrakce plynů na tlaku
(s novými výsledky pro kyslík).

Napsal Ph. Dr. *Jaroslav Šafránek.*

Studium lomu světelných paprsků v plynech je důležito pro svůj teoretický význam. Toto studium děje se ve třech směrech. Hledá se závislost lomu na tlaku, na temperatuře a posléze na vlnové délce. V dalším chceme referovati o závislosti refrakce na tlaku, zejména na tlaku menším jedné atmosfery.