Francouzské výtahy článků ročníku LI.

Časopis pro pěstování matematiky a fysiky, Vol. 51 (1922), No. 4, 321--339

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/109013

Francouzské výtahy článků ročníku LI.
Extraits des articles du tome LI.

L'intégrale de Cauchy et le problème de Dirichlet dans le plan.

Par *M. Kössler*.

Soit S un domaine d'un seul tenant limité par des arcs analytiques. Supposons que les coordonnées x et y d'un point arbitraire de la courbe C qui limite ce domaine soient des fonctions analytiques d'un paramètre:

$$x + iy = t(\tau);$$

la foction $t(\tau)$ est supposée holomorphe dans le voisinage de toute valeur complexe $\tau = e^{i\varphi}$.

Une fonction $F(s)$, holomorphe dans S, peut être déterminée à l'aide d'une intégrale déduite de l'intégrale de Cauchy

$$F(s) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_C \frac{H(t)\,dt}{t-s},$$

les valeurs de la fonction $H(t)$ sur C étant, bien entendu, réelles. La fonction $H(t(\tau)) = 2h(\tau)$ est déterminée par l'équation intégrale de Fredholm (laquelle on peut déduire aussi de l'intégrale de Cauchy)

$$u(\psi) = h(e^{i\psi}) + \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi} d\varphi\, h(e^{i\varphi})\, R\left[\frac{t'(e^{i\varphi})\, e^{i\varphi}}{t(e^{i\varphi}) - t(e^{i\psi})}\right],$$

$u(\psi)$ désignant une fonction continue, qui réprésente les valeurs de la partie réelle de $F(s)$ sur la courbe C.

Étant donée la fonction $u(\psi)$, on détermine $h(e^{i\varphi})$ et on calcule finalement la fonction

$$F(s) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{\varphi=0}^{2\pi} \frac{h(e^{i\varphi})\, e^{i\varphi}\, t'(e^{i\varphi})\, d\varphi}{t(e^{i\varphi}) - s}.$$

Sur la réduction d'un faisceau de formes bilinéaires et d'un système de relations entre les périodes de fonctions Abéliennes singulières non dégénérées à trois variables.

Par *V. Hruška*.

Il s'agit de démontrer, dans le cas où toutes les fonctions abéliennes singulières, dont les périodes satisfont au système de relations (57), ne dégénèrent pas, qu'on peut déterminer une transformation linéaire des périodes non singulière telle que les périodes transformées satisfassent au système de relations (62). En particulier, dans ce système de relations manquent les termes quadratiques et les termes absolus.

Je démontre, d'abord, dans la première partie, un lemme sur les systèmes de formes cubiques n-aires à coefficients entiers et rationnels. Soit donné un système (S) de telles formes au nombre $m > 4$ et soit D le p. g. c. d. de leurs coëfficients. Si les congruences (K) ne sont pas toutes satisfaites et si l'on peut choisir deux des n variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$, par ex. x_1, x_2, de façon qu'il y ait parmi les m formes cubiques binaires $f_\alpha(x_1, x_2, o, \ldots, o)$, $(\alpha = 1, 2, \ldots, m)$ eu moins 4 telles que le déterminant de ses coëfficients ne soit pas nul, on peut choisir, pour les variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$ des nombres entiers et rationnels, de manière que les m nombres $f_\alpha(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $(\alpha = 1, 2, \ldots, m)$ aient D pour leur p. g. c. d.

Dans la deuxième partie je discute la transformation du faisceau de formes bilinéaires $A - \lambda E$ par des transformations qui ne changent pas la forme E. La forme gauche A est supposée à coëfficients entiers et rationnels. On peut introduire, au lieu de $\lambda = \omega + \lambda_1$, un nouveau paramètre λ_1 de façon que, en désignant par $e_1, e_1, e_2, e_2, e_3, e_3$, $(e_1 \leqq e_2 \leqq e_3)$ les diviseurs élémentaires de la forme $A^{(1)} = A - \omega E$, les divisieurs élémentaires de la matrice $(\mathfrak{M})$ (formule (16)) soient $1, e_1, e_1 e_2$.[1]) ω est un nombre entier et rationnel. Ensuite, on peut trouver une transformation cogrédiente, à la matrice C, ne changeant pas la forme E, de façon que, cette transformation accomplie, le p. g. c. d. des déterminants du tableau M_1 (art. 8) soit précisément $e_1^2 e_2$. La marche du raisonnement est la suivante: les déterminants du tableau (29) (où K_r et a_i sont donnés par les formules (27) et (28)) ont le même p. g. c. d. que ceux du tableau M_1. Mais les déterminants du tableau (29) sont des formes cubiques sextaires aux variables c_{i1} $(i = 1, 2, \ldots, 6)$ et on peut parvenir, par une suite de transformations préalables de la forme A, ne changeant pas la forme E, à ce que ces formes cubiques satisfassent aux conditions du lemme (art. 7). On en conclut que l'on peut choisir c_{i1} $(i = 1, 2, \ldots, 6)$ de façon que le p. g. c. d. des déterminants de M_1 soit exactement $e_1^2 e_2$.

En supposant que le polynôme $P(\lambda) = K + L\lambda + M\lambda^2 + \lambda^3$ (formule (10) et art. 9.) n'ait pas de racine rationnelle, on peut trouver une substitution S (art. 9., fin) dans laquelle tous les éléments de la première colonne sont divisibles par $e_1 e_3$, ceux de

[1]) Pour la notation, voir mes travaux: „Sur les relations entre les périodes . . ." (1918) et „Sur les racines rationelles du polynôme . . ." (1920), publiés au „Bulletin international de l'Académie des sciences de Bohême."

la deuxième par e_1, ceux de la quatrième par e_1 e_2, ceux de la cinquième par e_1, et telle que les coëfficients des formes transformées E et A soient donnés par (41), (41'), (43) et (50)[2]). Alors la transformation T, dont les éléments sont (51), transforme E en la forme indiquée au tableau (53) et A en celle indiquée au tableau (52). Si l'on désigne par T_1 la transformation au tableau (54), on trouve que la transformation $C - TT_1$ (56) ne change pas la forme E et transforme la forme A en la forme A du tableau (55).

Comme la transformation des relations singulières (57) par des transformations non singuliêres et linéaires de périodes est complètement analogue à celle du faisceau des formes bilinéaires $A - \lambda E$ par des transformations cogrédientes ne changeant pas E, on peut aisément prouver le théorème énoncé au commencement.

Réduction du problème des axes du cône à un problème quadratique.

Par *J. Žďárek.*

On résout ce problème en déterminant les points d'intersection et les tangentes communes de deux coniques, ce qui se réduit, en certains cas, à une construction quadratique.

Le cône soit déterminé par sa conique de base H dans le plan ϱ, par la projection orthogonale v_1 de son sommet sur ϱ et par sa hauteur h. Les axes du cône coupent ϱ aux points x, y, z; ces points sont situés sur l'hyperbole d'Apollonius K appartenant au point v_1 par rapport à H. Le triangle xyz est autopolaire a) par rapport à H, b) par rapport au cercle imaginaire R au centre v_1 et de rayon $h\sqrt{-1}$. Si donc on construit les deux coniques Π et P réciproques à l'hyperbole K par rapport à H et à R, xyz est le triangle formé par les tangentes communes des coniques Π, P, qui sont, toutes les deux, des paraboles

Si l'on fait varier la hauteur h du cône, Π ne change point; la seconde parabole P varie de manière que toutes les P aient la même directrice et que leurs foyers parcourent une droite. Parmi ces paraboles on trouvera celle P' dont les tangentes, mentionées toute à l'heure, peuvent être obtenues par une construction quadratique. Les sommets de tous les cônes de révolution passant par Π sont situés sur une parabole ${}^1\Pi$ et le lieu des sommets analogues pour toutes les paraboles P est un cône symétrique par rapport à ϱ. Par chacun des deux points d'intersection de ce cône avec ${}^1\Pi$ est déterminée une parabole P' de sorte qu'on obtient

[2]) La méthode à suivre pour trouver cette transformation est due à O. Nicoletti: „Sulla riduzione a forma canonica...“ Annali di matematica ser. III., t. XIV. (1908), p. 265—325.

deux cônes de révolution au même sommet et dont les bases sont II, P'; les traces des plans tangents communs de ces deux cônes forment le triangle cherché xyz. Inversement, si l'on connaît la parabole P', on peut déterminer la hauteur du cône pour lequel le problème des axes est quadratique. Si donc H est la base du cône, il existe une surface telle que les axes d'un cône dont le sommet est un point de cette surface s'obtiennent par une construction quadratique.

Sur le bicorne.

Par *V. Mašek.*

Considérons un conoïde du 5e ordre, lieu des sommets des ∞^2 hyperboloïdes paraboliques passant par deux droites perpendiculaires a, b qui ne sont pas situées dans le même plan. Le plan de symétrie de la plus courte distance des deux droites a, b coupe le conoïde en deux droites perpendiculaires g, g'. Les faisceaux de plans aux axes g, g' coupent le conoïde en des courbes dont les projections sur un plan perpendiculaire à l'axe ϱ des droites a, b sont des bicornes.

On déduit de la construction des sections de la surface avec les plans considérés plusieurs constructions de points et de tangentes du bicorne. Je me bornerai à mentionner la suivante: Choisissons une cissoïde de Dioclès (v. fig. 2) dont l'asymptote est $h'_{1,2}$ et B_1 le point de rebroussement. Soit A_1 le pied de la perpendiculaire abaissée de B_1 sur $h'_{1,2}$, et désignons par A_2 le centre du segment $B_1 A_1$. Construisons une circonférence l passant par les points A_1, A_2, telle que l'angle au centre qui intercepte la corde $A_1 A_2$ soit droit. La droite joignant un point P_1 de la cissoïde de Dioclès au point A_1 coupe la circonférence l en un point N. La droite p_1 menée par le point P_1 et parallèle à l'asymptote $h'_{1,2}$ coupe la droite $A_2 N$ en un point X_2 du bicorne. Enfin, la propriété suivante du bicorne est démontrée: Les droites joignant les points d'intersection X_2, Y_2 (v. fig. 2) du bicorne avec une droite parallèle à l'axe de symétrie x du bicorne, et passant par le point o_2 (point d'intersection de l'axe x avec le bicorne) font avec les tangentes de rebroussement de la courbe des angles égaux.

Sur les spectres acoustiques.

Par *B. Hostinský.*

Un corps élastique déterminé (par exemple, une corde ou une plaque élastique) admet une série de sons propres dont les fréquences seront désignées par n_1, n_2, . . . L'ensemble de ces nombres constitue le spectre acoustique du corps. Posons

$$\lambda_k - 2 \pi n_k^2.$$

On sait que, dans le cas d'une membrane, les nombres $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$ représentent les valeurs minima que prend une certaine intégrale double (I). À chaque valeur λ_k correspond une fonction fondamentale φ_k (x, y) qui donne l'amplitude du son correspondant.

La méthode classique de recherche des valeurs λ_k et des fonctions φ_k peut être modifiée d'une telle manière que λ_k se présente comme valeur minimum dans un problème résoluble au moins théoriquement, sans qu'on connaisse les fonctions $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_{k-1}$. En désignant par p l'aire de la membrane et par n le nombre des λ_k qui sont plus petites ou égales à λ_n, on a $\lim\limits_{n=\infty} \frac{n}{p\lambda_n} = \frac{1}{4\pi}$ quelle que soit d'ailleurs la forme du contour de la membrane (H. A. Lorentz).

Différentes lois asymptotiques de cette espèce ont été étudiées par MM. Weyl et Courant; elles ont un rapport avec la théorie des chaleurs spécifiques. Cette théorie, due à M. Debye, est particulièrement intéressante par ce qu'elle démontre l'utilité des méthodes classiques, fondées sur les équations aux dérivées partielles, c'est à dire, sur l'hypothèse de la continuité de la matière, même dans des cas où l'on tient compte de la structure discontinue de la matière.

Application des tubes à vide à trois électrodes aux expériences avec l'arc parlant et avec le condensateur parlant.

Par *A. Žáček*.

Quand on voulait présenter des expériences avec l'arc parlant ou avec le condensateur parlant à un auditoire plus grand, c'est à dire, quand il fallait obtenir des effets plus frappants, on employait jusqu'à présent des microphones spéciaux à courant fort, et même plusieurs microphones de cette sorte joints en parallèle. L'auteur fait voir qu'on peut atteindre une réproduction, du mot parlé aussi bien que du chant, très intense, claire et nette, par un seul microphone à courant faible, si l'on renforce le courant du microphone par un tube à vide à trois électrodes. L'auteur donne le plan des arrangements les plus favorables pour ce but.

La fonction de Bolzano.

Par *M. Jašek*.

Bernard Bolzano, depuis que H. Hankel et H. A. Schwarz on constaté sa priorité sur Cauchy et Weierstrass dans quelques questions, est considéré comme le premier fondateur de l'Analyse mathématique moderne. Trois ou quatre menus traités, tous écrits pendant la première période de son activité scientifique, lui ont valu cet estime; un seul ne se rattache pas a cette période: „Paradoxien des Unendlichen" (Les paradoxes de l'infini), esquisses publiées par ses élèves sans présenter l'exactitude désirable.

Le sort n'a pas permis à Bolzano de publier ses principaux ouvrages mathématiques qui sont restés inédits. Mais ceux-ci comprennent des découvertes par lesquelles le savant a devancé son époque de plus d'un demi-siècle. La meilleure preuve en est fournie par le manuscrit „Functionenlehre" (Théorie des fonctions) sur lequel l'auteur de cet article est en train de publier un rapport historique plus large. L'article actuel qui est basé sur son mémoire publié dans le „Věstnik král. Č. spol. nauk" (Mémoires de la Société royale des sciences de Bohême à Prague) 1920 21 sous le titre „Aus dem handschriftlichen Nachlass B. B.", ne traite que d'une partie de ce manuscrit qui a pour objet la dérivabilité des fonctions continues et qui donne — plus de trente ans avant Weierstrass - l'exemple d'une fonction continue qui n'a de dérivée pour aucune valeur d'un intervalle. (Voir l'article en question section 4 et les suivantes.)

Nouvelle méthode pour décomposer les polynômes réductibles à une variable.

Par *Z. Chládek.*

En simplifiant les deux méthodes qu'on emploie actuellement pour décomposer les polynômes réductibles, soit la méthode de Kronecker-Runge et celle de Mandel, et en les combinant, on parvient à une méthode nouvelle, par laquelle on atteint le même but plus rapidement.

Soit $F(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \ldots + c_n x^n,\ c_n > 0,$

le polynôme donné à coëfficients entiers, dont on se propose d'étudier la réductibilité. Puisque $F(x) \equiv c_0 \ (mod\ x)$, ce qui doit avoir lieu aussi pour tout diviseur du polynôme, il y a toujours, pour un entier r, au moins une décomposition

$$F(r) - \varphi(r) \,.\, \psi(r), \text{ où } \varphi(r) \equiv \gamma_1,\ \psi(r) \equiv \gamma_2 \ (mod\ r),\ c_0 = \gamma_1 \gamma_2,$$

autrement la décomposition du polynôme ne serait pas possible. Les deux décompositions $F(r) = 1 \,.\, F(r)$, $c_0 = 1 \,.\, c_0$ sont toujours possibles et se correspondent mutuellement. On peut exclure la première en choisissant $r > \varrho$, ϱ désignant la limite supérieure des racines de l'quation $F(r) = 0$. Si, alors, le nombre entier $F(r)$, pour $r > \varrho$, ne possède pas de diviseurs essentiels congruents *mod* r aux diviseurs du terme absolu c_0 (y compris l'unité et c_0), $F(r)$ est, de rigueur, irréductible.

La décomposition du terme absolu ne sera pas encore, en général, déterminée d'une manière unique. C'est pourqui on choisira un second module $s > r$. Des décompositions qu'on obtient alors pour le terme absolu, au moins une doit coïncider avec une décomposition pour le module r, pourvu que $F(x)$ soit réductible. Si le nombre de décompositions coïncidantes est plus grand, remarquons que $F(x)$ et tous les diviseurs sont des fonctions positives et croissantes dans $(0, \infty)$; si donc les décompositions $\varphi(r) \cdot \psi(r)$ et $\varphi(s) \cdot \psi(s)$, où $\varphi(s) \equiv \gamma_1$, $\psi(s) \equiv \gamma_3$ (mod s) doivent se correspondre, il faut que soit $\varphi(s) > \varphi(r)$, $\psi(s) > \psi(r)$

On continue d'appliquer cette méthode jusqu'à ce qu'on ait obtenu une décomposition univoque $c_0 = a_0 \cdot b_0$. On a, alors,

$$c_1 = a_0\, b_1 + b_0\, a_1,\ a_1 \equiv \frac{\varphi(s) - a_0}{s} \equiv \alpha_1 s + \mathfrak{z}_{a,1},\ ab_1 \equiv \frac{\psi(s) - b_0}{s} \equiv$$

$\equiv \beta_1 s + \mathfrak{z}_{b,1}$. Pour α_1, β_1 on a l'équation diophantique:

$$a_0\, \beta_1 + b_0\, \alpha_1 = \frac{c_1 - (a_0\, \mathfrak{z}_{b,1} + b_0\, \mathfrak{z}_{a,1})}{s}$$

Les nombres α_1, β_1 sons petits, et plus le module s est grand, plus il sont petits; prenons les racines les plus petites en valeur absolue et calculons a_1, b_1. Déterminons encore les restes $\mathfrak{z}_{a,2}$ $\mathfrak{z}_{b,2}$; pour α_2, β_2 on obtiendra l'équation

$$a_0\, \beta_2 + b_0\, \alpha_2 = \frac{c_2 - a_1\, b_1 - (a_0\, \mathfrak{z}_{b,2} + b_0\, \mathfrak{z}_{a,2})}{s}.$$

On continuera ainsi; si l'on ne parvient pas de cette manière à des polynomes qui multipliés donnent le produit $F(x)$, ce polynôme est, a coup sûr, irréductible.

Sur la quantification des mouvements conditionnellement périodiques, et application au modèle de l'atome de Rutherford-Bohr.

Par *V. Trkal.*

Donnons d'abord quelques explications au sujet des notations et des dénominations qui sont employées dans ce mémoire.

Supposons qu'un système mécanique comporte s degrés de liberté. La fonction de Lagrange (le potentiel cinétique) L du systéme est supposée ne dépendre que des coordonnées générales $q_1, q_2, \ldots, q_s$ et des vitesses générales $\dot{q}_1, \dot{q}_2, \ldots, \dot{q}_s$ (de Lagrange); nous supposons donc que le temps t ne peut pas y figurer explicitement.

Partons de l'équation (1) [p. 103]; en tenant compte de l'équation de Lagrange (2), nous en déduirons l'intégrale de l'énergie totale (4). En tenant compte de (5), (6) et (7), nous trouverons l'équation (8). Nous allons actuellement faire un changement de variables en posant (9); l'équation (8) s'écrira donc dans la forme (10). Dans un cas très général, où le mouvement est „conditionnellement périodique", on trouvera la relation (12), dans laquelle $T^{\times}$, T_r $[r=1, 2, \ldots, s]$ désignent les périodes des expressions L, p_r q_r respectivement. En tenant compte de (13), (14), (15) et (16), on trouve l'équation (17) pour l'énergie totale W, où $\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_s$ désignent les fréquences du mouvement conditionnellement périodique, $I_1, I_2, \ldots, I_s$ les intégrales „d'extension en phase" et L „la valeur moyenne" de la fonction de Lagrange L.

On peut, dès lors, si l'on veut, considérer l'énergie totale $W = W(I_1, I_2, \ldots, I_s)$ comme une fonction composée, $I_1, I_2, \ldots, I_s$ étant des fonctions des paramètres géométriques ou cinématiques $a, \varepsilon, \ldots$ tels que, p. ex., le grand demi-are a, l'excentricité ε de l'ellipse Képlérienne dans le mouvement de l'électron autour du noyau, etc. On aura donc les relations (18), (19).

Mais la théorie des quanta attribue des valeurs particulières aux intégrales d'extension en phase (condition de Sommerfeld) (20), où h est la constante de Planck. La forme remarquable sous laquelle se présentent les équations (18) de ce problème dans ce cas donne lieu au théorème suivant:

La quantification de l'énergie totale des mouvements conditionnellement périodiques considérés est donnée par la condition (24), ou n_r sont des nombres entiers positifs; (il faut et il suffit de prendre les dérivées partielles de la fonction $\sum_{r-1}^{s} n_r h \nu_r - L$ par rapport à tous les paramètres géométriques ou cinématiques $a, \varepsilon, \ldots$)

Appliquons les règles qui précèdent au mouvement: 1° d'un vibrateur linéaire de Planck; 2° d'un „rotateur" assujeti à tourner autour d'un axe fixe; 3° de l'électron autour du noyau dans une orbite circulaire (atome de Rutherford-Bohr); 4° de l'électron autour du noyau dans une orbite elliptique (atome de R.-B); 5° de l'électron autour du noyau dans une orbite circulaire dans la théorie de la relativité restreinte (atome de R.-B.); et 6° de l'électron autour du noyau dans une orbite elliptique dans la théorie de la relativité restreinte (atome de R.-B.). Nous retrouvons pour l'énergie totale quantifiée des expressions qui sont identiques aux résultats de travaux récents. (Les notations employées dans ces exemples sont celles de Sommerfeld dans son ouvrage „Atombau und Spektrallinien").

Contribution à la graduation de l'ondomètre.

Par *A. Žáček.*

On peut calibrer les ondomètres d'une manière très précise en faisant usage des oscillations harmoniques d'ordres supérieurs de générateurs dont la fréquence propre peut être déterminée avec une précision suffisante. La seule difficulté consiste dans la détermination de l'ordre de la vibration harmonique en question. L'auteur déduit, en partant de la formule de Thomson, pour ce nombre une formule ne contenant que les capacités. Il suffit, pour déterminer l'ordre et pour calibrer l'ondomètre d'une manière précise, de connaître des valeurs approchées de ces capacités.

Démonstration expérimentale des oscillations électriques d'une bobine d'induction.

Par *A. Žáček.*

L'auteur indique deux méthodes pour démontrer expérimentalement des oscillations électriques lentes. La première est une modification de la méthode de Feddersen: elle emploie, comme celle-ci, un miroir tournant d'analyse, mais qui est – c'est en quoi elle diffère de celle de F. — incliné de 45° à l'axe de rotation, axe perpendiculaire à la droite menée par l'éclateur. On fait, au moyen d'une lentille, une image nette sur la face intérieure d'un écran en forme d'un tronc de cône de révolution. Une seconde méthode, baucoup plus jolie et plus simple, analyse l'étincelle à l'aide d'un éclateur tournant. Il est porté par un disque en bois, monté sur l'axe d'un petit électro-moteur. Lorsqu'une décharge oscillatoire se produit, on obtient toute une série de petites étincelles disposées sur une circonférence.

Sur une conique imaginaire de la troisième espèce.

Par † *V. Jarolímek.*

Une conique de cette espèce a, en général, les axes et le centre immaginaires, mais deux ou quatre points réels et, de même, deux ou quatre tangentes réelles. Mais il se peut aussi qu'un des axes soit réel; supposons que ce soit l'axe X. Soit donné cet axe, deux points réels a, b et une tangente réelle T. La conique déterminée par ces données passe par les points a_1, b_1 symétriques des points a, b par rapport à l'axe X. Mais pour que la conique soit imaginaire, il faut que la tangente T sépare le point a des points a_1, b, b_1. Une seconde tangente T_1 est la droite symétrique de la tangente T; la conique aura, en outre, deux tangentes réelles U, U_1 qu'on construit de la manière suivante: Les droites $\overline{ab}$ $\overline{a_1 b}$ coupent l'axe X en deux points p, q qui sont des pôles conjugués de la conique; $qP \perp X$ est la polaire du point p, $pQ \perp X$ est la polaire du point q. La conique se correspond à elle-meme dans l'involution perspective ayant le centre p et l'axe P; donc, on obtient la troisième tangente U en déterminant la droite homologue à la tangente T dans le système (pP): le point $(pT) \equiv m$ est double; de point homologue β du point $(T, \overline{aa_1}) \equiv \alpha$ est le point d'intersection de la droite $\overline{p\alpha}$ avec la corde bb_1 conjuguée à la corde $\overline{aa_1}$; enfin $m\beta \equiv U$. La quatrième tangente U_1 est symétrique de la tangente U par rapport à l'axe X. Une construction réciproque résout la question: Soit donnée une conique imaginaire par un axe réel X, deux tangentes réelles T, U et un point réel a; construire ses deux autres tangentes réelles et trois points réels.

L'expression analytique du mouvement dans l'espace.

Par *J. Vojtěch.*

L'auteur déduit d'abord, en partant des équations de la symétrie par rapport à un plan général, des équations donnant la transformation de l'espace ordinaire par une rotation de grandeur donnée autour d'un axe donné passant par l'origine du système de coordonnées rectangulaires, cette rotation étant exprimée comme le produit de deux symétries par rapport à deux plans passant par l'axe de rotation et dont l'angle est égal à la moitié de l'angle de rotation. L'équation de transformation est:

$$X' = \left(2\cos^2\alpha \sin^2\frac{\omega}{2} + \cos\omega\right) X + \left(2\cos\alpha\cos\beta\sin^2\frac{\omega}{2}\right.$$

$$\left. \cos\gamma\sin\omega\right) Y + \left(2\cos\alpha\cos\gamma\sin^2\frac{\omega}{2} + \cos\beta\sin\omega\right) Z$$

et des équations analogues pour Y', Z', où $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ sont les cosinus directeurs le l'axe et ω l'angle de la rotation. Posons

$$\cos\frac{\omega}{2} = T,\ \cos\alpha\sin\frac{\omega}{2} = A_{23},\ \cos\beta\sin\frac{\omega}{2} = A_{31},\ \cos\gamma\sin\frac{\omega}{2} = A_{12};$$

l'équation se réduit à la forme

$$X' = (T^2 - A^2_{12} + A^2_{23} - A^2_{31})\, X + 2\,(A_{13}\, A_{32} - A_{12}\, T)\, Y +$$
$$+ 2\,(A_{12}\, A_{23} - A_{13}\, T)\, Z,$$

et ainsi de suite pour Y', Z'.

La rotation de l'espace autour d'une droite passant par l'origine est déterminée par trois constantes. Prenons pour ces constantes les quantités cos $\alpha : \cos \beta : \cos \gamma$ et cos ω; on peut les calculer par les formules

$$\cos \omega = \frac{1}{2}(c_{11} + c_{22} + c_{33} - 1), \quad \cos^2 \alpha = \frac{c_{11} - c_{22} \quad c_{33} + 1}{3 \quad c_{11} \quad c_{22} - c_{33}},$$

c_{hk} $(h, k = 1, 2, 3)$ étant les neuf coëfficients de la transformation linéaire générale entre le point (X, Y, Z) et le point (X', Y', Z'); et des formules analogues pour $\cos^2 \beta$ et $\cos^2 \gamma$. On a de plus

$$T = \frac{1}{2}\sqrt{c_{11} + c_{22} + c_{33} + 1}, \quad A_{23} = \frac{1}{2}\sqrt{c_{11} - c_{22} - c_{33} + 1}$$

et ainsi de suite pour A_{31}, A_{12}.

En partant des équations pour la rotation déterminée par les constantes T, A_{hk}, on obtient facilement les équations pour le produit de deux rotations de même genre, et données, respectivement, par les constante T_a et A_{hk}, T_b et B_{hk}; les constantes T_c, C_{hk} de la rotation résultante sont dones par les formules

$$+ \; T_c = T_a T_b - (A_{23} B_{23} + A_{31} B_{31} + A_{12} B_{12})$$
$$+ \; C_{23} \quad T_a B_{23} + T_b A_{23} + A_{12} B_{31} - B_{12} A_{31}$$

et des formules analogues pour C_{31} et C_{12}. On peut en déduire simplement des relations exprimant les valeurs de cos α, cos β, cos γ et cos $\frac{\omega}{2}$ pour la rotation résultante par les paramètres analogues des deux rotations dont elle est composée.

Si l'axe de rotation est une droite générale aux cosinus directeurs cos α, cos β, cos γ et ayant de l'origine une distance n, dont la direction est (cos α', cos β', cos γ'), des termes accessoires se présentent dans les relations établies ci-dessus; ainsi, pour X', ce terme est

$$+ n \left(2 \cos \alpha' \sin^2 \frac{\omega}{2} + \cos \alpha'' \sin \omega\right),$$

(cos α'', cos β'', cos γ'') étant la direction prependiculaire aux deux directions données.

On obtient les équations de la symétrie par rapport à une droite générale comme un cas particulier des équations valables pour la rotation. Enfin, l'auteur déduit les équations donnant le produit de deux symétries de ce genre; les équations de ce mouvement hélicoïdal général, composé d'une rotation de l'angle ω et d'une translation de longueur v, et dont l'axe est une droite de la direction (cos α, cos β, cos γ) et ayant de l'origine la distance n de direction (cos α', cos β', cos γ'), [(cos α'', cos β'', cos γ'') désignant la perpendiculaire commune de ces deux directions], contiennent, à côte des expressions figurant dans les équations ci-dessus, encore des termes, qui sont, par ex. pour X'.:

$$+ n\left(2\cos\alpha'\sin^2\frac{\omega}{2} + \cos\alpha''\sin\omega\right) + 2\,\nu\cos\alpha$$

et des expressions analogues pour Y', Z'.

Sur les courbes du 4e ordre, de la 8e classe et du genre un; et sur les courbes réciproques.

Par *F. Kadeřávek.*

L'auteur traite des courbes spéciales du 4e ordre, obtenues par le procédé suivant: Étant données deux coniques ${}^1A$, ${}^2A$ et un point fixe s, on mène par ce point un rayon P sur lequel on détermine un point a de manière que $({}^1a, {}^2a, s, a) = -1$, ${}^1a$, ${}^2a$ étant les points d'intersection des courbes ${}^1A$, ${}^2A$ avec le rayon P. La courbe traitée est le lieu des points a. L'auteur construit non seulement les tangentes ordinaires, mais aussi les points et les tangentes multiples de la courbe. Le cas considéré n'est qu'un cas spécial du procédé général que voici: Étant données quatre courbes quelconques A, B, C, D, situées dans le même plan, on peut en dériver une autre courbe dont les points situés sur les tangentes P de la courbe D ont, avec les points d'intersection a, b, c de la même tangente P avec les courbes A, B, C, un rapport anharmonique x donné.

Sur les équations différentielles linéaires ordinaires du 2e ordre possédant une série de transformations limitée des deux cotés.

Par *F. Rádl.*

L'auteur étend l'application des recherches de G. Darboux sur l'équation de Laplace

$$\frac{\partial^2 z}{\partial z\,\partial y} + a\frac{\partial z}{\partial x} + b\frac{\partial z}{\partial y} + cz = O$$

à l'équation différentielle ordinaire du 2e ordre

$$f(y) = y'' + py' + qy - 0,$$

que l'on peut écrire sous la forme de deux systèmes

$$y'_1 + hy = 0,\ \ y_1 = y' + py;\ \ Y' + pY + ky = 0,\ \ Y = y'$$

qui définissent les „invariants“ h, k et dont le premier donne la suite d'équations transformées

$$\ldots, f_{-j}, \ldots, f_{-1}, f, f_1, \ldots, f_i, \ldots$$

Si l'on suppose, pour l'équation f_i, $h_i = 0$, on obtient pour k_{i-p}.

$$k_{i-p} = h_{i-p-1} = \frac{d^2 k}{dx^2} H_p, \quad H_p = \begin{vmatrix} A & A' & \ldots & A^p \\ A' & A'' & \ldots & A^{p+1} \\ \ldots & & \ldots & \ldots \\ \ldots & & \ldots & \ldots \\ A^p & A^{p+1} & \ldots & A^{2p} \end{vmatrix}, \quad A = e^{\int p\,dx}$$

La condition $k_{-j} = 0$ ou $H_{i+j+1} = 0$ donne les équations f qui possédent une série limitée par les équations f_i, f_{-j}, donc dans les deux sens; toutes ces équations sont intégrables par des quadratures.

Contribution expérimentale au problème du mouvement turbulent d'un fluide.

Par *J. Velíšek.*

W. Sorkau, en poursuivant les travaux de Bose sur le mouvement turbulent des fluides, a remarqué dans les expériences que, si l'on continue d'augmenter la vitesse du fluide passant par un tube capillaire, le mouvement turbulent de Hagen (turbulence I) se transforme en une autre forme de mouvement turbulent de caractère instable, qu'il a surnommé turbulence II. Dans le travail actuel, l'auteur a étudié le passage de la turbulence de Hagen à la turbulence suivante et a fait voir expérimentalement que la turbulence II de Sorkau n'existe pas, et que le passage du mouvement de Hagen à la turbulence III de Sorkau se produit sans aucune discontinuité. Il a, de plus, étudié l'influence de la température sur le phénomène observé et donné les équations par lesquelles ces deux genres de mouvement peuvent être exprimés. Les mesures ont été faites pour le tétrachlorure de carbone (CCl_4); ces mesures seront pursuivies.

Sur la fonction de Bolzano.

Par *V. Jarník.*

Dans cet article, je fais l'étude des nombres dérivés d'une fonction continue, définie par Bolzano.*) En premier lieu, je dé-

*) Pour l'historique de la question, je renvoie le lecteur à l'article de M. Jašek: „Funkce Bolzanova", p. 69—76 de ce tome; pour ce qni concerne la continuité et la question de dérivabilité, voir l'article de M. Rychlík: „Über die Funktion von Bolzano," qui paraîtra prochainement dans le „Vestník král. české společnosti nauk" (Mémoires de la société royale des sciences de Bohême).

montre que la fonction de Bolzano, définie dans l'intervalle fermé [0, 1], n'a pas de dérivée finie ni infinie en aucun point intérieur à cet intervalle. Aux extrêmes relatifs de la fonction il y a une dérivée infinie de droite et une dérivée infinie de gauche; et ces points sont les seuls qui jouissent de cette propriété. Je démontre ensuite qu'une dérivée finie de gauche ou de droite ne peut exister en aucun point. En étudiant les quatre nombres dérivés, je trouve un ensemble dénombrable de points, où tous ces nombres sont finis, et un esemble qui a la puissante du continu, où ces nombres sont res. $\Lambda_x = +\infty$, $\lambda_x = -\infty$, $\Lambda'_x = +\infty$, $\lambda'_x = -\infty$. Enfin, je fais observer que l'on peut trouver une expression analytique de cette fonction qui découle naturellement des considérations précédentes.

Sur des ensembles ordonnés intransitivement.

Par *K. Dusl.*

Quoique la loi d'arrangement des termes d'un ensemble doive être asymétrique et transitive, il est possible de construire des ensembles composés de deux ou plusieurs ensembles partiels dont les termes sont ordonnés suivant la règle

$$a R b$$

asymétrique, mais intransitive et même nontransitive. L'auteur en donne un exemple pour un esemble bien ordonné des nombres rationnels de l'intervalle (0, 1).

Les abaques à plusieurs plans superposés.

Par *V. Havlík.*

J'ai essayé d'obtenir, dans la théorie des abaques à plusieurs plans superposés, des résultats de valeur pratique. Je ne présente que deux types les plus avantageux pour la pratique, dont les équations typiques (4), (5), (6), (7), (8) peuvent être appliquées très fréquemment à des problèmes pratiques. Un exemple particulier est fourni par une règle à calcul pour l'équation de Kepler (voir fig. 3.)

Multiplication et division babyloniennes.

Par *Q. Vetter.*

L'article présent est basé sur les matériaux publiés dans „The Babylonian Expedition of the University of Pennsylvania", Philadelphia t. XX, 1re partie, ser. A, de V. H. Hilprecht. Hilprecht considère les tables de multiplication babyloniennes comme préparation pour les calculs des astrologues et magiciens, mais cette explication semble trop artificiel à l'auteur. L'art de calculer devait précéder la mystique des nombres. L'article présent essaie de prouver la vraisemblance de cette hypothèse.

La simple expérience montra aux Babyloniens que pour obtenir une table de multiplication, il suffisait de calculer les produits des 10 ou 20 multiplicateurs et de n'y inscrire que les produits du nombre donné et des multiplicateurs 30, 40 et 50 Pour les multiplicateurs de 60 et pour ses multiples il suffisait de multiplier simplement comme par des unités en élevant le produit d'un rang sexagésimal, ce qui était d'autant plus naturel dans l'écriture cunéiforme où il fallait deviner ce rang d'après le contexte. On reconnut alors, ce qui pourrait être considéré comme deuxième étape dans la simplification des tables, qu'il n'était point nécessaire de calculer et surtout de conserver un nombre de tablettes qui suffirait pour contenir les tables de multiplication de tous les grands nombres, dans l'étendue ou les Babyloniens s'en servaient, mais qu'on pouvait décomposer même le multiplicande en addendes. On choisissait des addendes aussi commodes que possibles, c'est à dire les diviseurs des prémières puissances de 60. Dans les tables de multiplication de ces diviseurs des groupes de chiffres se répètent périodiquement dans le système séxagésimal à certaines places du rang. Pour les petits multiplicandes ces périodes sont évidemment composées de plusieurs membres. Dans la table de multiplicandes jointe à l'article on trouve dans la 2^{e} colonne leur décomposition en facteurs primaires, dans la 3^{e} leurs plus petits multiples dans la série des unités sexagésimales, dans la 4^{e} leur expression dans le système sexagésimal, dans la 5^{e} le nombre des membres se répétants périodiquement, dans la 6^{e} l'âge des tablettes d'après Hilprecht et dans la 7^{e} les remarques concernant les doublets et un avis sur la possilibité de considérer la table de multiplication d'un multiplicande donné comme table de multiplication d'un plus petit nombre d'unités supérieures.

Nous voyons que la plupart de ces multiplicandes à l'exception de ceux contenus dans les dernières tables de multiplication, sont des diviseurs du „sos", du „ner" et du „sar". Les diviseurs de 60^3 ne sont que cinq nombres, c. f. 432, 500, 750, 1000 et 1350, dont 500, 750 et 1000 sont des nombres arrondis et par là d'usage fréquent Il ne nous surprend pas non plus d'y trouver $1350 = 22^1/_2$ sos avec petites périodes. Il n'y a que 432 qui est artificiel, mais non seulement comme moyen de calcul mais aussi comme diviseur du nombre magique de Hilprecht 12,960.000. Ces diviseurs de 60^3, les nombres 1000 et 1350 exceptés, se trouvent sur des tablettes appartenant à une epoque plus récente, où l'art de calculer avait déjà atteint une certaine perfection. Il n'y a que quatre nombres qui sont diviseurs du nombre magique de Hilprecht 60^4, ce sont 810, 160 000, 162.000 et 180 000. Le prémier est douteux, car Hilprecht suppose seulement qu'il était. inscrit sur la partie perdue d'un fragment de tablette. Les nombres 162.000 et 180.000 sont équivalents aux nombres plus petits mais d'un rang sexagésimal plus élévé. L'hypothèse de Hilprecht n'est confirmée que par le nombre 160 000, qui se trouve sur une seule tablette, daté d'environ 2200 av. Chr., sur laquelle se rencontrent les trois grands nombres susnommés. Si celle-ci avait été déstinée à des buts magiques, il ne s'en suit pas, qu'il en eût été de même pour toutes les autres. L'article présent montre aussi, comment il serait possible de calculer 4797×837 à l'aide des tables de multiplication.

Hilprecht appuie encore son hypothèse par une table de division (p. 21 et 22), expliquée très vraisemblement comme moyen de calcul par A. Ungnad (Zeitschr. f. Assyriol. 1918 p. 156) On n'est pas encore parvenu à eclaircir le but, auquel était déstinée la table de division apportée par Hilprecht p. 27; elle n'est explicable ni par l'hypothèse de Hilprecht ni par l'interpretation qu'en donne Ungnad.

Sur le rapport des tensions des vapeurs au-dessus de la phase stable et métastable.

Par *V. Trkal.*

L'auteur déduit, pas des considérations de thermodynamique, la formule générale (17) (p_1 — tension de la vapeur au-dessus de la phase stable [métastable], p_2 tension de la vapeur audessus de la phase métastable [stable], m — poids moléculaire, R = constante absolue de l'équation des gaz parfaits, ϱ_ϑ = chaleur de transformation, T = température absolue, Θ = température de transformation, γ_ϑ = différenee entre les chaleurs spécifiques des deux modifications d'une substance au point de transformation).

Les approximations diverses (I — V) de cette formule donnent les formules (18), (19), (22), (40), (52); la formule la plus pratique parmi ces approximations est l'expression nouvelle (22).

La comparaison de la formule (22) avec les résultats expérimentaux confirment très bien la théorie. Grâce à l'équation (22), on peut calculer ϱ_ϑ et γ_ϑ pour les substances suivantes:

$C_6H_4 < {CO \atop CO} > N.H < {H \atop C_6H_5}$, $C_6H_4 < {CO \atop CO} > N.N < {CH_3 \atop C_6H_5}$ et Sn

(pthalylphenylhydrazide) (pthalylméthylhydrazide).

Sur la théorie du champ électromagnétique.

Par *N. Raševsky.*

Je me propose d'établir les équations du champ électromagnétique, analogues, du reste, à celles de Maxwell-Lorentz, mais donnant une distribution de vitesses de propagation d'accord avec le principe de Pachsky[1]), qui exige que l'hodographe de ces vitesses soit un ellipsoïde de révolution allongé, l'axe de rotation étant parallèle à la vitesse de translation de la source qui se trouve dans un de ses foyers. Nous ne considérons que le cas spécial d'un mouvement rectiligne uniforme. En rapportant un phénomène physique décrit par les équations de Maxwell-Lorentz à un systeme de coordonnées fictif immobile, dans lequel l'unité de longueur est raccourcie, le long de l'axe des x, dans un certain rapport, on obtient des équations donnant un hodographe éllipsoïdal avec la source au centre: formules I. et II. (l'axe des x est choisie parallèle à la vitesse de translation v). En rapportant ces équations à un second système fictif se déplaçant par rapport au premier d'une vitesse rélative (1), on obtient la forme des équations cherchées Ia. IIa. (1) est l'excentricité linéaire de l'ellipsoïde. Ces équations doivent être considérées comme étant rapportées à des axes se déplaçant avec la source. Une seconde substitution galiléenne nous donne la forme de ces équations par rapport aux axes mobiles (Ib, IIb). Par le procédé habituel on trouve les expressions pour le flux d'énergie (6), les tensions de Maxwell (12), la quantité de mouvement (13).

Le champ d'une charge en translation rectiligne uniforme rapporté aux axes liées à la charge ne contient pas de dérivées par rapport au temps, et les équations prennent la forme (14, 15). Par une substitution $x' = \frac{x}{a}$, $y' = y$, $z' = z$ on obtient (16, 17), que nous désignerons comme système fictif S'.

En écrivant (18), nos équations acquièrent la forme de celles de la théorie classique, rapportées à des axes se déplaçant avec la source de la vitesse (19). En calculant le champ d'un électron sphérique non déformable, on voit que, dans S', un électron déformé par contraction lui correspond. Puisqu'on doit, pour calculer le champ dans le système S', considérer un système auxiliaire allongé dans le rapport (20), il est facile de démontrer que le calcul du champ pour un électron sphérique s'effectue à l'aide d'un champ auxiliaire du même électron sphérique, mais immobile. Cela nous permet, en supposant que ψ[2]) est donné par (29), d'obtenir des formules analogues à celles de Lorentz pour la masse électromagnétique sans avoir recours à la contraction. Ces formules

[1]) N. Rachevsky, Phys. Rev., Nov. p. 369.
[2]) l. c.

ne sont pas précisément identiques à celles de Lorentz, mais elles donneraient, même au cas de la vitesse de la lumière, pour la masse un résultat différant seulement dans la dixième décimale. Donc, les expériences de Bucherer et d'autres ne peuvent pas être considérées comme preuve expérimentale du principe de la rélativité.

Sur la variation de la réfraction des gaz avec la pression.

Par *J. Šafránek.*

La variation de la réfraction des gaz avec la pression a été étudiée par MM. Mascart, Chappuis, Rivière, Gale, Carnazzi, Magri, Perreau etc., qui ont tous travaillé sous des pressions notablement plus élevées qu'une atmosphère. Cependant, la connaissance de la fonction $n - 1 = f(p)$ est aussi d'un intérêt aussi bien théorique que pratique. Une étude rigoureuse de cette fonction au-dessous d'une atmosphère a été faite par M. Posejpal pour l'air et l'anhydride carbonique et par l'auteur du travail actuel pour l'oxygène (à l'aide de l'arrangement expérimental de M. Posejpal). La méthode de M. Posejpal est une méthode interférentielle. On observe les franges d'interférence du réfractomètre interférentiel de Jamin au moyen d'un spectrophotomètre, ce qui permet d'atteindre une précision d'un centième de frange. Les pressions dp étaient mesurées, aussi bien que les pressions p, au moyen d'un manomètre spécial à mercure. — Il existe entre les grandeurs L, λ, s, n (L la longueur du parcours de la lumière de longueur d'onde λ dans un tube vide de l'appareil de Jamin, s le nombre de franges deplacées par l'introduction dans ce même tube d'un gaz de la pression p et d'indice de réfraction n) la relation: $n - 1 = \frac{\lambda}{L} s$. En différentiant l'équation par rapport à p, on obtient: $\frac{dn}{dp} = \frac{\lambda}{L} \frac{ds}{dp}$. En étudiant la variation de la réfraction ds/dp avec la pression, on arrive à la solution du problème de la variation de la réfraction des gaz avec la pression. L'auteur a mesuré le quotient ds/dp pour sept pressions décroissantes et chaque vàleur a été mesurée dix fois. Il a trouvé par exemple pour l'oxygène les valeurs suivantes: 0·30936, 0·30917, 0·30888, 0·30862, 0·30807, 0·30767, 0·30754 pour $p = 699·6, \ldots$ 89·5 *mm*. Les valeurs ds/dp forment une progression croissante avec p. En supposant une relation linéaire nous posons: $\frac{ds}{dp} = \alpha_1 + \beta_1 p$. Le calcul des paramètres a donné: $\alpha_1 = 0·30721 \pm \pm 0·00012$, $\beta_1 = 0·00000324 \pm 0·00000028$. En substituant dans la formule de Mascart $n - 1 = K \cdot p\,(1 + \beta p)$ on obtient: $K = 0·33925 \cdot 10^{-6} \pm 0·00013 \cdot 10^{-6}$, $\beta = 0·00000527 \pm 0·00000047$. La réfraction calculée est $10^6 (n - 1) = 274{\cdot}07 \pm 0{\cdot}25$. Pour l'air et l'anhydride carbonique M. Posejpal a trouvé des résultats analogues. Il a démontré que le paramètre β varie beaucoup avec la pression. La réfraction $n - 1$ croît au dessous d'une atmosphère beaucoup plus vite avec la pression que la densité absolue ϱ du gaz. Ni la constante de Lorenz-Lorentz ni celle de Newton-Gladstone n'est donc invariable dans cet intervalle de pression, au contraire, toutes les deux augmentent avec la pression. Il a montré dans ses travaux qu'on peut encadrer ces faits remarquables dans nos idées actuelles sur la constitution et sur les propriétés optiques de la matière.

VĚSTNÍK LITERÁRNÍ.

RECENSE KNIH.

The General Theory of Dirichlet's Series by G. H Hardy and M. Riesz; Cambridge Tracts in Mathematics and Mathematical Physics, No. 18. Cambridge University Press 1915. S. 78. Price 4 s. 6 d

Jádrem knížky jest theorie Dirichletových řad na základě Rieszovy methody sčítání dle „typických středů". Jejich definice obsažena jest v kap. IV.

Máme-li D. řadu $\sum a_n e^{-\lambda_n s}$ $(\lambda_1 < \lambda_2 < \ldots, \lim\limits_{n \to \infty} \lambda_n = \infty)$,

položme $c_n = a_n e^{-\lambda_n s}$, $l_n = e^{\lambda_n}$;

$$\overset{K}{C}_{\lambda}(\omega) = \sum_{\lambda_n < \omega} c_n (\omega - \lambda_n)^K, \quad \overset{K}{C}_{l}(w) = \sum_{l_n < w} c_n (w - l_n)^K \quad (K > o);$$

existuje-li

$$\lim_{\omega \to \infty} \frac{\overset{K}{C}_{\lambda}(\omega)}{\omega^K} = C_{\lambda, K} \tag{1}$$

resp.

$$\lim_{w \to \infty} \frac{\overset{K}{C}_{l}(w)}{w^K} = C_{l, K}, \tag{1'}$$

říkáme, že danou řadu lze sčítati dle typických středů řádu K prvního, resp. druhého druhu a přisuzujeme jí součet $C_{\lambda, K}$, resp. $C_{l, K}$.

Kap. V. jedná o vztazích mezi součty ruzných řádů a druhů; platí: z existence $C_{l,K}$ plyne existence $C_{l,K'}$ pro všechna $K' > K$ i existence $C_{\lambda,K}$; platí pak

$$C_{l,K'} = C_{l,K} = C_{\lambda,K}.$$

Podobně z existence $C_{\lambda, K}$ plyne existence $C_{\lambda,K'}$ $(K' > K)$ a jejich rovnost.

Tyto dvě kapitoly rozdělují ostatní obsah knihy na dvě části, zhruba paralelně probíhající. Po krátké kapitole úvodní obsahuje kap. II. klasické