Quido Vetter

Babylonské násobení a dělení

Časopis pro pěstování matematiky a fysiky, Vol. 51 (1922), No. 4, 271--278

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/109009

Babylonské násobení a dělení.

Napsal *Q. Vetter.*

Babylonské matematické hliněné destičky předkládají historikům matematiky zajímavý problém, k čemu sloužily destičky s násobilkou a s podíly? Podotýkám ihned, že pod krátkým a obvyklým rčením babylonské matematiky rozumíme matematiku národů v Mesopotamii v šerém dávnověku obývající, kteří ve své literatuře užívali soustavy sexagesimální, od dob nejstarších až po říši medskou. Číselná soustava babylonská nebyla vlastně docela čistá sexagesimální soustava, neboť její jednotky tvořily vedle 1 sos = 60, ner = 600 a sar = 3600 jakož i vyšší mocniny 60. (1 a mocniny 60 značeny klínem svislým, desítky těchto jednotek, tedy i ner, klínem úhlovým). Při tom kladeny číslice, vyjadřující počet jednotlivých mocnin 60, prostě vedle sebe. Čtenář musil ze souvislosti vyčísti, o kterou mocninu 60 běží. Destičky, jimiž se budu obírati, jsou psány tímto způsobem a nevyskytují se tam assyrské znaky pro 100 a 1000, které jsou nám důkazem, že i dekadická soustava byla Mesopotamcům známá a jistě užívaná. Nejvíce materiálu nás zajímajícího vykopala výprava pennsylvanské university v Nippuru, vedená známým assyriologem V. Hilprechtem. O tomto materiálu pojednal Hilprecht v 1. části XX. dílu serie A krásné své publikace: „The Babylonian Expedition of the University of Pennsylvania" (Philadelphia 1906) na str. 11 nn. Práce ta jest podkladem dalších mých vývodů.

Násobilková tabulka podle Hilprechta (str. 16. a 17.), přepsaná do dekadické soustavy, vypadá takto:

2	A—RA	1	2	A—RA	9	18	A—RA	17	34
	A—RA	2	4	A—RA	10	20	A—RA	18	36
	A—RA	3	6	A—RA	11	22	A—RA	19	38
	A—RA	4	8	A—RA	12	24	A—RA	20	40
	A—RA	5	10	A—RA	13	26	A—RA	30	60
	A—RA	6	12	A—RA	14	28	A—RA	40	80
	A—RA	7	14	A—RA	15	30	A—RA	50	100
	A—RA	8	16	A—RA	16	32			

Slovo A—RA, které se také někdy vynechalo, značí patrně naše „krát". Soupis násobilkových destiček do vydání Hilprechtova díla nalezených podává týž na str. 20. V přiložené tabulce uvádím výpočet násobenců, připojiv k nim ihned několik poznámek. Význam těchto poznámek objasňuje záhlaví sloupců až na periodu, jejíž výklad podám později.

Násobenec	Jeho rozklad na prvočinitele	Jeho nejmenší násobek v řadě babylon. jedn	Jeho vyjádření v babylon. jednotkách				Perioda v násobilce na místech				Podle Hilprechta pochází přibližně z doby kol r. př. Kr.	Poznámka.
			sar 3600	ner 600	sos. 60	jedn. 1	sar 3600	ner 600	sos 60	jedn. 1		
2	2	60				2				30	1350	
3	3	60				3				20		
4	2^2	60				4				15		
5	5	60				5				12		
6	2.3	60				6				10	1350	
8	2^3	600				8				15		
9	3^2	60^2				9				20	1350	
12	$2^2.3$	60				12			50	5		
18	2.3^2	60^2				18				10	1350	Z destičky.
24	$2^3.3$	600				24			25	5		
25	5^2	600				25			24	12		
30	2.3.5	60				30			20	2	1350	Jiná destička asi z r. 2200 obsahuje násobilky 45, 40, 30.
36	$2^2.3^2$	60^2				36			50	5	2200	
40	$2^3.5$	600				40			15	3		Viz 30.
45	$3^2.5$	60^2				45			40	4	2200	Tato násobilka jest na líci. Na rubu jest (podle Hilprechta) dělení 60^4 a násobilka 50. Viz také 30.
50	2.5^2	600				50			12	6	2200	Na líci. Na rubu dělení 60^4 (podle H.) a násobilka 50. Viz také 45. Třetí destička asi z r. 2200, rub její viz 960.
60	$2^2.3.5$	60			1	—			10			Vlastně násobilka 1 vyšší jednotky.
72	$2^3.3^2$	60^3			1	12			25	5		
90	$2.3^2.5$	60^3			1	30		40	20	2	1350	
100	$2^2.5^2$	600			1	40		30	6	3	1350	
120	$2^3.3.5$	600			2	—		30	5	—	1350	Vlastně násobilka 2 v. jedn. Tato destička obsahuje části násobilek 300, 180, 150, 144, 120.
144	$2^4.3^2$.	60^2			2	24			25	5		Viz 120.

150	$2.3.5^2$	600			2	30			4	2	1350	Také na jiné destičce neurčitelného stáří. Viz 120.
180	$2^2.3^2.5$	60^2			3	—		20	10	—		Vlastně násobilka 3 vyšších jednotek. Viz 120.
240	$2^4.3.5$	60^2			4	—		15	5	—		Vlastně násobilka 4 vyšších jednotek. Viz 120.
300	$2^2.3.5^2$	600			5	—		12	2	—		Vlastně násobilka 5 vyšších jednotek. Viz 120.
432	$2^4.3^3$	60^3			7	12		25	25	5	1350	2 exempláře. Mimo to dest. asi z r. 1350 obsahující na líci text nemat. na rubu části násobilky 1350, 1080, 1000, 900, 720, 600, 500, 480, 432.
450	$2.3^2.5^2$	60^2			7	30		8	4	2	1350	
480	$2^5.3.5$	60^3			8	—		15	5	—		Vlastně násobilka 8 vyšších jednotek. Viz 432.
500	$2^2.5^3$	60^3			8	20		36	6	3	1350	Tato dest. obsahuje násobilky 1080, 1000, 960, 900, 810 (?), 720, 600, 540, 500. Jiná destička viz 432.
540	$2^2.3^3.5$	60^3			9	—		20	10	—	1350	Vlastně násobilka 9 vyšších jednotek. Jiná destička viz 500.
600	$2^3.3.5^2$	600		1	—	—		6	—	—		Vlastně násobilka 10 vyšších jednotek. Viz 432 a 500.
720	$2^4.3^2.5$	60^2		1	2	—		5	5	—		Vlastně násobilka 12 vyšších jednotek. Viz 432 a 500.
750	$2.3.5^3$	60^3		1	2	30		24	4	2	1350	
810	$2.3^4.5$	60^4		1	3	30			40	20		Viz 500.
900	$2^2.3^2.5^2$	60^3		1	5	—		4	2	—		Vlastně násobilka 15 vyšších jednotek. Viz 432.
960	$2^6.3.5$	60^3		1	6	—		15	5	—	2200	Vlastně násobilka 16 vyšších jednotek. Líc viz 50, rub obsahuje části násobilky 1350, 1080, 960. Viz také 500.
1000	$2^3.5^3$	60^3		1	6	40		18	3	3	2200	Části násobilky 2160, 1500, 1000. Viz také 432 a 500.
1080	$2^3.3^3.5$	60^3		1	8	—		10	5	—		Vlastně násobilka 18 vyšších jednotek. Destička obsahuje části násobilek 2160, 1500 a 1000. Viz také 432, 500 a 960.
1350	$2.3^3.5^2$	60^3		2	2	30		8	4	2		Viz 432 a 960.
1500	$2^2.3.5^3$	60^3		2	5	—		12	2	—		Vlastně násobilka 25 vyšších jednotek. Viz 1000.
2160	$2^4.3^3.5$	60^3		3	6	—		5	5	—		Vlastně násobilka 36 vyšších jednotek. Viz 1000.
3000	$2^3.3.5^3$	60^3		5	0	—		6	—	—		Vlastně násobilka 50 vyšších jednotek.
160.000	$2^8.5^4$	60^4	44	2	6	40	27	9	3	3	2200	Líc nemat. Rub obsahuje nasobilky 180.000, 162.000 a 160.000.
162.000	$2^4.3^4.5^3$	60^4	45	—	—	—	4	—	—	—		Vlastně násobilka 45 vyšších jednotek. Viz 160.000.
180.000	$2^5.3^2.5^4$	60^4	50	—	—	—	6	—	—	—		Vlastně násobilka 50 vyšších jednotek. Viz 160.000.

Z tabulky vidíme, že destičky Hilprechtem uvedené pocházejí, pokud jejich stáří jest určeno, buď z doby kolem r. 2200 nebo 1350 př. Kr. Hilprecht se původně domníval, že tyto tabulky násobilkové jsou pouze početními pomůckami. Ještě ve své přednášce „Die Ausgrabungen der Universität von Pennsylvania im Bel-Tempel zu Nippur" (Lipsko 1903) praví na str. 60, že ve škole nippurské byla zrovna fenomenálním způsobem „dřena" násobilka, což právě usuzoval z našich destiček. Tento svůj původní názor však později změnil. Prohlédnuv pečlivě tyto destičky, uvédomil si, že násobenci jsou složeny jenom z činitelů 2, 3 a 5 a jejich mocnin, jak vidíme ve 2. sloupci naší tabulky. I vyslovil přesvědčení, že trosky nippurské nechovají jiných násobilkových tabulek než takto vytvořených. Důsledek ovšem této okolnosti jest, že násobenci jsou dělitelé mocnin 60. Hilprecht nalezl také tabulky podílů, jichž dělenec podle jeho výkladu jest 60^4, t. j. 12,960.000. I dokazuje duchaplným způsobem, že to jest pověstné Platonovo číslo o nejšťastnější době porodů. Hilprecht ukazuje, opíraje se o babylonské vlivy v nauce Pythagorově, z níž mnohé prvky přešly do teorií Platonových, že podle babylonského názoru číslo to řídilo život lidský, totiž že šťastné či nešťastné lidské osudy jsou závisly na tomto čísle nebo jeho dělitelích. Domnívá se tedy Hilprecht, že destičky naše jsou ukázkou, jak se studentstvo školy nippurské učilo přípravným počtům pro účely astrologické a hadačské.

Výklad ten se jistě bude mnohým zamlouvati tím spíše, že při znalosti velkého významu hadačství pro babylonské názory jest velmi svůdné, vše tomuto umění podřizovati. Pokud jde o Hilprechtův výklad významu čísla 12,960.000 v hadačství babylonském a jeho ztotožnění s číslem Platonovým, nepřísluší mi o věci pronésti úsudku. Proti názoru hadačsky přípravného významu našich destiček dalo by se však namítnouti, že byly-li i některé z nich podmíněny takovými účely, nemusí tak přece býti u všech. Destičky pocházejí jistě z různých děl, aneb jsou-li to cvičné sešity žákovské, jsou přece jen různé provenience. Vždyť jest vznik jich od sebe oddělen skoro tisíciletím. Výklad, že mohly také sloužiti za početní pomůcku, zdá se mi velmi pravděpodobným. Nežli se mohlo použíti matematických znalostí k účelům hadačským, musily zde tyto znalosti býti. Lze tedy říci, že matematika musila hadačství a číselnou mystiku předcházeti, byť ji i tyto v patách mohly sledovati.

Hilprecht klade při svém výkladu zvláštní důraz na okolnost, že všichni násobenci dosud nalezení jsou obsaženi v čísle 12,960.000. Skutečně jsou násobenci ti součin činitelů 2, 3 a 5 a jejich mocnin. Nejmenším násobkem ze řady jednotek sexagesimální soustavy jest 60^4 jen pro čísla 810, 160 000, 162.000 a 180.000. Z těchto násobilek jest násobilka 810 pochybná, neboť se vyskytá jen na jediné destičce a to jen podle dohadu Hilprechtova na části, která jest právě ulomena. 162.000 a 180.000 jsou rovny 45 a 50 sarům, jsou to tedy násobilky 45 a 50 vyšších jednotek. Zbývá nám tudíž jen násobilka 160.000, která by mohla svědčiti pro Hilprechtovo číslo. Tento jediný doklad se mi však nezdá býti dostatečným pro hypotésu, že účelem všech těchto násobilek bylo cvičení pro výpočet dělitelů 12,960.000 za cíli hadačskými. Všechna ta tři velká čísla, 160.000, 162.000 a 180.000 se nalézají na jediné destičce z doby kol r. 2.200 př. Kr. Je-li snad Hilprechtova hypotésa oprávněna pro tuto destičku, nemusí ještě platiti pro ostatní, ačkoli i tato destička mohla míti jiný účel. Pozorujeme-li ostatní násobilky, vidíme, že 60 jest dělitelno 2, 3, 4, 5, 6, 12, 30 a 60, kterážto poslední násobilka jest vlastně násobilkou 1, ovšem 1 sosu. K tomu přistupují ještě násobilky 120, 300 a 600 z dělitelů neru a 180, 240, 720 a 900 z dělitelů saru, což jsou vlastně násobilky 2, 5 a 10 a 3, 4 a 15, ovšem sosů. Z ostatních jsou děliteli jednoho neru násobenci 8, 24, 25. 40, 50, 100 a 150, děliteli saru násobenci 9, 18, 36, 45, 72, 90 a 450. K tomu zase přistupují dělitelé 60^3: 480, 540, 960, 1080, 1500, 2160 a 3000, jejichž násobilky jsou vlastně násobilkami 8, 9, 16, 18, 25, 36 a 50 sosů. Zbývají nám tudíž jen čísla 432, 500, 750, 1000 a 1350 jakožto násobenci, u nichž teprve se plně uplatňuje dělitelnost třetí mocniny 60, tedy jen pět čísel, z nichž 500, 750 a 1000 jsou čísla zaokrouhlená a jistě hodně běžná a často i ve staré době užívaná, takže se zdá býti přirozeno, že jejich násobilka byla cvičena nebo aspoň v tabulkách zanesena, aby se mohla při počítání užívati. Také číslo 1350, tedy 22 a $^1/_2$ sosu s malými periodami by nás nemusilo tolik překvapiti. Jenom 432 čili 7 sosů 12 zdá se býti velmi umělým, avšak nejen mezi násobenci jinak spíše zaokrouhlenými, nýbrž i mezi děliteli Hilprechtova čísla 12,960.000. Jest skutečně zvláštní, že se tato násobilka nalezla na třech Hilprechtem publikovaných destičkách. Přihlédneme-li výše naznačeným způsobem k babylonským násobilkám, vidíme, že se zde vyskytují hlavně násobenci, kteří jsou dělitelé sosu a saru, po případě neru a několik málo význačných děliteli 60^3, a to ještě mimo 1000 a 1350 na destičkách mladších, tedy z doby většího počtářského umění.

Jsou-li tyto násobilky pomůckou početní a nikoli hadačskou, musíme se tázati, proč voleny právě dělitelé mocnin 60. A tu bych upozornil na periody, jak jsem to nazval. Vypíšeme-li výsledky násobilky (na př. 450) v sexagesimální soustavě, vidíme, že prvých 8 výsledků jest:

	7 sosů	30	3 nery	7 sosů	30
1 ner	5 „		4 „	5 „	
2 „	2 „	30	5 „	2 „	30
3 „			1 sar		

Na místě jednotek se stále opakuje skupina 30, 0, tedy jest perioda dvojčlenná, na místě sosů jest čtyřčlenná perioda 7, 5, 2, 0 a na místě nerů jest osmičlenná perioda 0, 1, 2, 3, 3, 4, 5, 0. Pohlédneme-li na tabulku násobenců, vidíme že při malých číslech jsou ovšem periody vícečlenné, jak jinak nelze, avšak při větších číslech jsou periody většinou o málo členech, tedy zajisté vhodnější k zapamatování neb aspoň se s nimi pohodlněji pracuje. Uvážíme-li, že náš způsob násobení jest mnohem mladšího původu, že se teprve pomalu lidstvo probojovávalo k našemu pohodlnému písemnému počítání, jak nám je umožňuje náš způsob psaní čísel, a že staří snad nenásobili, nýbrž pomalu sčítali stejné sčítance, jak to činí děti a lidé, neznající násobilky, nebyl by snad tak nepravděpodobným tento výklad.

Jednoduchá zkušenost ukázala Babyloňanům, že číslo, násobeno součtem, rovná se součtu částečných součinů. I bylo patrno, že chtělo-li se jednou pro vždy ušetřiti duchamorné sčítání a nahraditi je tabulkou násobilky, stačí vypočítati tabulku pro prvých 10 nebo 20 násobitelů a pak napsati jen součiny z daného čísla a násobitelů 30, 40 a 50. Pro násobitele 60 a jeho násobky stačilo násobiti tak, jako bychom násobili jednotkami, a zvýšiti jen o 1 sexagesimální řád, což zvláště při klínovém písmu, kde se řád ten musil vyčísti ze souvislosti, bylo tím samozřejmější. Dalším krokem pak bylo, že se poznalo, že netřeba vypracovávati a hlavně uschovávati ohromné hliněné dílo, obsahující násobilky všech možných velkých čísel v mezích Babyloňany užívaných, nýbrž že lze i násobence rozvésti ve sčítance. Sčítanci se volili co nejpohodlnější, totiž dělitelé prvých mocnin 60. Jest to v naší soustavě tak, jako bychom se neučili násobilce všech čísel až do 10, nýbrž jen 2, 4, 5 a 25. Pro nás by to ovšem mnoho úspory neznamenalo, naopak, avšak při sexagesimální soustavě jest v tom značné zjednodušení. Takové násobení na př. čísel 4.797 $\times$ 837, by se provedlo, použijeme-li jen tabulek u Hilprechta uvedených, asi tak, jak je ukázáno na str. 277.

Hilprecht podporuje svůj názor ještě svým výkladem tabulky dělení, kterou se mu na základě několika úlomků podařilo sestaviti a kterou publikuje v uvedeném již díle svého spisu na str. 21. a 22. Každý řádek této tabulky podle Hilprechta praví, „každá n-tá část jeho jest m". Vhodnou volbou řádu jednotlivých číslic došel Hilprecht k názoru, že číslo, na něž ukazuje slovo „jeho", jest zase 12,960.000. Naproti tomu A. Ungnad (Die Platonische Zahl, Zeitschr. f. Assyriol. XXXI (1918) str. 156—159) dokazuje, zvoliv jinak řádové jednotky, že lze za společný dělenec celé tabulky považovati 1.

Pak by tabulka ta byla tabulkou zlomků kmenných se jmenovatelem rovným zase součinu z mocnin činitelů 2, 3 a 5, převedených na konečnou řadu zlomků sexagesimálních. Ungnad ihned ukazuje, jak se mohla tato tabulka používati při dělení. Jeho výklad méně umělý než Hilprechtův, podporoval by názor náš. Kmenné zlomky pak jsou, jak známo, na primitivním stupni matematického vývoje velmi přirozené (viz na př. K. Sethe: Von Zahlen und Zahlworten bei den alten Ägyptern und was für andere Völker und Sprachen daraus zu lernen ist. Strassburg, 1916). Tato tabulka dělení uvádí

4797 = 1 sar, 1 ner 9 sosů 57
837 = 1 „ 3 „ 57

		60^3	sary	sosy	jednotky
3000×	13 sosů	10	50		
	50		41	40	
	7		5	50	
1600×	13 sosů	5	25		
	50		20	50	
	7		2	55	
240×	13 sosů		52		
	50		3	20	
	7			28	
50×	13 sosů		10	50	
	50			41	40
	7			5	50
6×	13 sosů		1	18	
	50			5	
	7				42
1×	837			13	57
		15	209	375	189
	t. j.	18	35	18	9

všechny dělitele uvedeným způsobem sestrojené od 2 do 72. Podíly jsou pak vyjádřeny nejvýše třemi sexagesimálními zlomky. Jak patrno, byly tyto destičky pomůckou pro praktické počítání ve tvaru běžném, vžitém, tedy v sexagesimální soustavě tak, jako my vše nejraději převádíme do desetinných zlomků a na procenta. Jiní dělitelé, kteří dávali za podíl delší stupnice sexagesimálních zlomků nebo dokonce, nejsouce děliteli mocniny 60, nekonečně periodický zlomek sexagesimální, ovšem se nehodily pro tyto tabulky a pro podobné počítání. Že Babyloňané tyto dva případy skutečně rozeznávali početně — byloť by těžko předpokládati, že byli matematicky tak vyspělí, aby kladli na rozdíl ten váhu jen z důvodů teoretických — tomu se zdá nasvědčovati okolnost, že užívali jiných slovných obratů, když dělení hladce vycházelo a jiných v případě opačném (viz. H. Zimmern: Zu den altakkadischen geometrischen Berechnungsaufgaben, Orient. Litteraturztg. XIX (1916) sloup. 324, odst. *d*). Poněvadž nelze předpokládati, že by početní praxe nebyla předkládala starým Mesopotamcům úlohy jako 100 : 7, nutno se domnívati, dokud nás snad nové nálezy nepoučí o jiném, že cíle docházeli nikoli přehlednými tabulkami, nýbrž nějakým složitějším nebo aspoň pracnějším výpočtem. Snad odčítali 7 od 100 tak dlouho, až byl zbytek menší 7 a stanovili počet těchto subtrakcí.

Tabulku dělení, nalézající se na destičce z Nineve, popsané Bezoldem a vyložené Hilprechtem ve zmíněném již díle na str. 27., pokládá Hilprecht za dělení čísla $7 . 10 . 60^7$. Vyskytá se tu řada otázek, na něž Hilprecht neodpovídá. Proč byly hledány díly tohoto čísla? Má ono v souhlase s Hilprechtovou teorií nějaký magický význam? Jest pravda, že 7 takový význam mělo, než proč pak nevoleno $7 . 60^7$? Co tam značí činitel 10? Použijeme-li výkladu Ungnadova na tuto tabulku, měli bychom tu dělení čísla 70, po případě zlomky s tímto čitatelem. Nešlo by tu tedy o pomůcku při dělení podle návodu Ungnadova. Či jest to snad destička z celého díla nějakého, provádějící dělení čísel jednoduchých, jež nejsou však součiny mocnin 2, 3 a 5? Také volba dělitelů není zcela jasná. Některé řádky dávají jednoduché aspoň jedno z obou čísel dělitele a podílu, jiné činí tak v soustavě dekadické, o které nelze předpokládati, že by ji užívání soustavy sexagesimální, v jistém ohledu těžkopádné, bylo z vědomí Babyloňanů docela vytisklo. Ostatně tomu odporují Hilprechtem nalezené destičky, patrně žákovská cvičení, na nichž vidíme, jak se Babyloňané učili užívati sexagesimální soustavy na základě soustavy dekadické. Avšak někteří dělitelé (na př. v 16. řádku) voleni velmi složití a řada jiných mnohem jednodušších vynechána. Proč to? Všecky tyto otázky čekají ještě na svou odpověď.

O poměru tensí par nad fází stabilní a metastabilní.*)

Viktor Trkal.

Před 40 lety uveřejnil prof. F. Koláček pojednání[1]) „Über die Beziehung des Gefrierpunktes von Salzlösungen zu deren Spannkraftgesetze“, kde použil kruhového procesu, pomocí něhož se dala konstruovati křivka napětí par nad vodními roztoky soli pro každou temperaturu ležící pod bodem mrazu čisté vody, byl-li znám její průběh nad tímto bodem. Brzo potom poukázal H. Hertz[2]) na to, že by se pomocí téhož procesu dalo vypočítati napětí páry nad přechlazenou vodou ze známého průběhu napětí páry nad ledem.

Tato poznámka dala popud prof. Koláčkovi k další práci[3]) „Über Dampfspannungen“, v níž Koláček (před 36 lety) — prvý, pokud mi známo, — odvodil vzorec pro poměr tensí (napětí, tlaků)

---

*) Předneseno (ve zkrácené formě) na týdenní schůzi Jednoty československých matematiků a fysiků 12. listopadu 1921.

[1]) Wied. Ann. d. Phys u. Chem. *15*, pp. 38—45, (1882).

[2]) Wied. Ann. *17*, p. 197 (pozn. pod čarou), (1882).

[3]) Wied. Ann. *29*, pp. 347—352, (1886).