Augustin Pánek

O jistých integrálech pseudoelliptických

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 30 (1901), No. 5, 341--361

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/109003`

O jistých integrálech pseudoelliptických.*)

Napsal

Augustin Pánek.

Úkolem těchto řádků jest ukázati, že původ substitucí, jichž užito k vyčíslení pseudoelliptických integrálů tvarů algebraických, jež až dosud v různých žurnálech a sbornících uveřejněny byly, dlužno hledati v substitucích Eulerem publikovaných, podle nichž lze je konstruovati.

I. Když Euler vyčíslil integrály

$$(1) \qquad \int \frac{x^2\, d\, x}{(1-x^4)\sqrt{1+x^4}},$$

$$(2) \qquad \int \frac{\sqrt{1+x^4}}{1-x^4}\, d\, x,$$

$$(3) \qquad \int \frac{(1+x^2)\, d\, x}{(1-x^2)\sqrt{1+x^4}},$$

$$(4) \qquad \int \frac{(1-x^2)\, d\, x}{(1+x^2)\sqrt{1+x^4}}$$

způsoby, o nichž jsme se zmínili v tomto Časopise roč. XXVIII. str. 105. na konci Poznámky, vyčíslil je pak také *společnou* substitucí algebraickou

---

*) Práci tuto lze též pokládati za dokončení článku uveřejněného v tomto Časopise roč. XXVIII. str. 97. s názvem *Vyčíslení jistých Eulerových integrálů neomezených.*

$$\frac{x\sqrt{2}}{\sqrt{1+x^4}} = p.\text{*)} \tag{5}$$

V pojednání *„De integratione formulae* $\int \frac{dx\sqrt{1+x^4}}{1-x^4}$ *aliarumque ejusdem generis, per logarithmos et arcus circulares“*, později akademii Petrohradské předloženém, **) Euler vrací se opět k integrálu

$$\int \frac{\sqrt{1+x^4}}{1-x^4}\, dx \tag{2}$$

a tu praví:

„Když jsem o výrazu tomto bedlivě uvažoval, shledal jsem že lze jej zbaviti irracionálnosti podivuhodnou substitucí

$$x = \frac{\sqrt{1+t^2}+\sqrt{1-t^2}}{t\sqrt{2}}.\text{“} \tag{6}$$

Zvláštními obraty pak dospívá žádoucího vyčíslení, na konec poznamenávaje:

„Právem možno tázati se, kterým umělým obratem jsem dospěl substituce této, o níž by se při prvém pohledu mohlo zdáti, že k cíli nevede. Zajisté by nikdo na substituci tu nepřipadl, a já sám nemohu se upamatovati, jak jsem jí mohl dosíci. ***)

---

*) Viz Euler *„Inst. calculi integr.“*, 4. díl, str. 26. aneb Salomonův německý překlad, 4. díl táž stránka.

**) ibid. pag. 37.

***) V citovaném díle na str. 39. praví Euler dále: „Avšak uváživ všechny momenty, dospěl jsem mnohem jednodušší methody, podle níž možno výpočet bez velikých oklik vykonati . . . “, i podává methodu s názvem „Jednoduchá a přirozená methoda, kterak předložený výraz integrální vyšetřiti.“ Pod tímto titulem vyčísluje Euler integrál (2) substitucí $\sqrt{1+x^4} = px$, ač všechen další složitý apparát početní možno značně zjednodušiti, jak námi bylo dokázáno. (Viz tento Časopis roč. XXVIII.) Konstatujeme, že *nejjednodušší možná* a *společná* substituce, vedoucí zároveň *nejrychleji* k vyčíslení všech integrálů (1), (2), (3), (4) jest námi zavedená a Eulerem poprvé avšak pouze k vyčíslení jediného integrálu (2) užitá substituce $\sqrt{1+x^4} = px$. (Viz A. Pánek *„O vyčíslení některých integrálův Eulerových společnou substitucí algebraickou“*. Věstník král. české Společnosti náuk. V Praze, 1893.)

Ukážeme nyní, jak Euler mohl asi substituci (6) dostati ze substituce jím před tím zavedené (5).

Zdvojmocníme-li totiž obě strany rovnice (5) a upravíme ji, nabudeme

$$p^2x^4 - 2x^2 + p^2 = 0,$$

načež

$$(\lambda) \qquad x^2 = \frac{1 + \sqrt{1-p^4}}{p^2},$$

tudíž

$$x = \frac{1}{p}\sqrt{1 + \sqrt{1 - p^4}}.$$

Dle známého vzorce

$$(\alpha) \qquad \sqrt{a + \sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a + \sqrt{a^2 - b}}{2}} + \sqrt{\frac{a - \sqrt{a^2 - b}}{2}}\ ^{*)}$$

*) Dovolím si tu ukázati, jak jsem již před 25. lety svým žákům na bývalé městské střední škole na Malé Straně v Praze tento vzorec odůvodňoval.

Položíme-li

$$(\alpha) \qquad \sqrt{a + \sqrt{b}} = \sqrt{x} + \sqrt{y},$$

jest

$$(\beta) \qquad \sqrt{a - \sqrt{b}} = \sqrt{x} - \sqrt{y}.$$

Z rovnic (α) a (β) stanovíme x, y.

Sečteme-li obě rovnice, dostaneme

$$(\gamma) \qquad \sqrt{a + \sqrt{b}} + \sqrt{a - \sqrt{b}} = 2\sqrt{x},$$

a odečteme-li rovnici (β) od (α), nabudeme

$$(\delta) \qquad \sqrt{a + \sqrt{b}} - \sqrt{a - \sqrt{b}} = 2\sqrt{y}.$$

Zdvojmocníme-li rovnici (γ), jest patrně

$$(\varepsilon) \qquad x = \frac{a + \sqrt{a^2 - b}}{2}$$

bude

$$\sqrt{1+\sqrt{1+p^2}} = \sqrt{\frac{1+p^2}{2}} + \sqrt{\frac{1-p^2}{2}},$$

pročež

$$(6') \qquad x = \frac{\sqrt{1+p^2} + \sqrt{1-p^2}}{p\sqrt{2}},$$

což jest, píšeme-li tu t místo p, Eulerova substituce (6).

Kdybychom nepřihlíželi ku vzorci (α), mohli bychom postupovati též takto:

Přičteme-li k rovnici (λ) na obou stranách 1, bude

---

a zdvojmocníme-li rovnici (δ), bude

$$(\zeta) \qquad y = \frac{a - \sqrt{a^2 - b}}{2},$$

což vzhledem k (ε) možno přímo napsati.

Hodnoty (ε), (ζ) dosadíme do rovnic (α) a (β), které spojíme, píšíce

$$\sqrt{a \pm \sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a + \sqrt{a^2 - b}}{2}} \pm \sqrt{\frac{a - \sqrt{a^2 - b}}{2}},$$

což jest známý vzorec, který v učebnicích pro střední školy jedním ze dvou obvyklých různých způsobů bývá stanoven.

Toto rozvedení druhé odmocniny z výrazu surdického v součet neb rozdíl dvou takových odmocnin jest výhodné jen v tom případě, je-li $\sqrt{a^2 - b}$ číslo racionálné.

Žádáme-li, aby výraz $a^2 - b$ byl úplným čtvercem, třeba položiti

$$a^2 - b = x^2,$$

čímž b nabude hodnoty

$$(n) \qquad b = a^2 - x^2 = (a + x)(a - x).$$

Chceme-li zpaměti konstruovati případné číselné příklady pro druhou odmocninu z čísla surdického, jest nutno, abychom napřed věděli, že $\sqrt{a^2 - b}$ bude číslem racionálním.

Kdyby dáno bylo na př. $a = 2$, volíme číslo x na př. $x = 1$, načež z rovnice (n) vypočteme $b = 3$ a tudíž předložený příklad bude $\sqrt{2 \pm \sqrt{3}}$.

$$(\mu) \qquad 1+x^2=\frac{p^2+1+\sqrt{1-p^4}}{p^2}$$
$$=\frac{\sqrt{1+p^2}}{p}\cdot\frac{\sqrt{1+p^2}+\sqrt{1-p^2}}{p}.$$

Avšak vzhledem k (5) jest faktor

$$\frac{\sqrt{1+p^2}}{p}=\sqrt{1+\frac{1}{p^2}}=\sqrt{1+\frac{1+x^4}{2x^2}}=\frac{1+x^2}{x\sqrt{2}},$$

tudíž (μ)

$$1+x^2=\frac{1+x^2}{x\sqrt{2}}\cdot\frac{\sqrt{1+p^2}+\sqrt{1-p^2}}{p},$$

z čehož opětně plyne

$$(6') \qquad x=\frac{\sqrt{1+p^2}+\sqrt{1-p^2}}{p\sqrt{2}}.$$

I můžeme z kterékoliv substituce Eulerovy (m), (n), uvedené v tomto Časopise roč. XXVIII. str. 105., a (5), bez velikých obtíží konstruovati zcela nové substituce algebraické pro integrály (1), (2), (3) a (4).

Konstruujme snazší substituce charakteristické jako

$$(7),\ (8) \qquad \frac{1+x^2}{\sqrt{1+x^4}}=p, \quad \frac{1-x^2}{\sqrt{1+x^4}}=p$$

aneb

$$(9),\ (10) \qquad \frac{\sqrt{1+x^4}}{1+x^2}=p, \quad \frac{\sqrt{1+x^4}}{1-x^2}=p$$

aneb kladme

$$(11),\ (12) \qquad \frac{\sqrt{1+x^4}}{1-x^4}=p, \quad \frac{1-x^4}{\sqrt{1+x^4}}=p,$$

značí-li p vždy nově zavedenou integrační proměnnou.

Že jsme tyto substituce nazvali *charakteristickými*, odůvodňujeme tím, že v každém z uvedených čtyř integrálů jsou za symbolem integračním obsaženy některé z výrazů

$$(\nu) \qquad 1+x^2, \quad 1-x^2, \quad 1-x^4, \quad \sqrt{1+x^4},$$

z nichž první nebo druhý anebo třetí, spojen jsa se čtvrtým ve tvaru zlomku, poskytuje nám substituční rovnice (7) až (12) té vlastnosti, že každou jednotlivou z nich možno vyčísliti všechny integrály (1), (2), (3), (4).

Tato možnost dokazuje, že vazba těchto čtyř integrálů jest v jakési souvislosti, i patrno dle povahy integrálu (1), který z nich jediný obsahuje kromě posledních dvou výrazů v (ν) uvedených ještě x^2, že lze stanoviti další jednoduché substituce, a to

$$(13) \qquad \frac{\sqrt{1+x^4}}{x} = p$$

aneb

$$(14) \qquad \frac{x}{\sqrt{1+x^4}} = q,$$

kde p i q jsou nové integrační proměnné.

Ze substitucí (7) až (14) uvádí Euler pouze dvě a to substituci (13), jak již řečeno, při vyčíslení integrálu

$$\int \frac{\sqrt{1+x^4}}{1-x^4}\,dx$$

a integrálů obecnějších tvarů, a substituci (14), kterou zavedl při vyčíslení některých integrálů, v tomto Časopise roč. XXVIII. vytčených.

V následujícím podáme instruktivní methodu, jak lze některých z těchto nových substitucí použiti k vyčíslení všech integrálů (1), (2), (3) a (4).

II. Euler, vyčísliv integrály (1), (2), (3), (4) společnou substitucí (5) odst. I., podává je v pořadí (3), (4), (2), (1).*) Dle tohoto postupu nazveme integrály ty po řadě V_1, V_2, V_3, V_4. K jich vyčíslení volme na př. substituci (7), kladouce

$$(\alpha) \qquad p = \frac{1+x^2}{\sqrt{1+x^4}},$$

*) Srov. Euler tamže str. 26.

z čehož

$$(\beta)\qquad dp = \frac{2x(1-x^2)\,dx}{(1+x^4)^{\frac{3}{2}}}\,.$$

Sestrojme výrazy

$$(\gamma)\qquad \sqrt{p^2-1} = \frac{x\sqrt{2}}{\sqrt{1+x^4}}\,,$$

$$(\delta)\qquad \frac{\sqrt{p^2-1}}{p} = \frac{x\sqrt{2}}{1+x^2}\,,$$

$$(\varepsilon)\qquad 2-p^2 = \frac{(1-x^2)^2}{1+x^4}$$

a (ε) násobme $p^2 = \dfrac{(1+x^2)^2}{1+x^4}$, zdvojmocněnou to rovnicí (α), kterýžto součin pišme v podobě

$$(\zeta)\qquad 1-(p^2-1)^2 = \left(\frac{1-x^4}{1+x^4}\right)^2.$$

Dělíme-li (β) součinem (δ) a (ε), nabudeme

$$\frac{pdp}{(2-p^2)\sqrt{p^2-1}} = \sqrt{2}\,\frac{(1+x^2)\,dx}{(1-x^2)\sqrt{1+x^4}}\,,$$

tedy

$$V_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\int\frac{pdp}{(2-p^2)\sqrt{p^2-1}}\,.$$

Položíme-li

$$p^2-1 = z^2,\quad \text{jest}\quad pdp = zdz,$$

tudíž

$$V_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\int\frac{dz}{1-z^2} = \frac{1}{\sqrt{2}}\,l\,\frac{1+z}{\sqrt{1-z^2}}\,.$$

Vrátíme-li se k původní proměnné, jest především

$$(a)\qquad z = \sqrt{p^2-1}$$

a dle (γ) bude

$$(a') \qquad z = \frac{x\sqrt{2}}{\sqrt{1+x^4}}$$

a ježto

$$(b) \qquad \sqrt{1-z^2} = \frac{1-x^2}{\sqrt{1+x^4}},$$

nabýváme dosazením (a') a (b) do V_1

$$(A) \qquad \int \frac{(1+x^2)\,dx}{(1-x^2)\sqrt{1+x^4}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\, l\, \frac{\sqrt{1+x^4}+x\sqrt{2}}{1-x^2},$$

výsledek to s Eulerovým souhlasný.*)

Dělíme-li (β) součinem rovnic (α) a (γ), obdržíme

$$\frac{dp}{p\sqrt{p^2-1}} = \sqrt{2}\,\frac{(1-x^2)\,dx}{(1+x^2)\sqrt{1+x^4}}$$

a integrujeme-li obě strany,

$$V_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\int \frac{dp}{p\sqrt{p^2-1}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arc\,sec} p$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \arccos \frac{1}{p} = \frac{1}{\sqrt{2}} \arcsin \frac{\sqrt{p^2-1}}{p}.$$

Vzhledem k (δ) bude V_2 neboli

$$(B) \qquad \int \frac{(1-x^2)\,dx}{(1+x^2)\sqrt{1+x^4}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \arcsin \frac{x\sqrt{2}}{1+x^2},$$

což jest opět výsledek Eulerův.**)

Dělíme-li (β) rovnicí (δ) i (ζ), dostaneme

$$\frac{p\,dp}{[1-(p^2-1)^2]\sqrt{p^2-1}} = \sqrt{2}\,\frac{\sqrt{1+x^4}}{1-x^4}\,dx$$

---

*) Viz Euler tamže str. 23.

**) Viz Euler tamže str. 23.

a tedy

$$V_3 = \frac{1}{\sqrt{2}} \int \frac{pdp}{[1-(p^2-1)^2]\sqrt{p^2-1}},$$

kterýžto integrál vložením $p^2 - 1 = z^2$, $pdp = zdz$ lze převésti na tvar integrálu differenciálu racionálního, tak že

$$V_3 = \frac{1}{\sqrt{2}} \int \frac{dz}{1-z^4} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \int \left\{ \frac{dz}{1-z^2} + \frac{dz}{1+z^2} \right\}$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{2}} \left\{ l \frac{1+z}{\sqrt{1-z^2}} + \operatorname{arc\,tg} z \right\}.$$

Zavedeme-li opět původní proměnnou, jest vzhledem k (a') a (b) integrál V_3, t. j.

$$(C) \quad \int \frac{\sqrt{1+x^4}}{1-x^4} dx = \frac{1}{2\sqrt{2}} \left\{ l \cdot \frac{\sqrt{1+x^2}+x\sqrt{2}}{1-x^2} + \operatorname{arc\,tg} \frac{x\sqrt{2}}{\sqrt{1+x^4}} \right\},$$

výsledek opět totožný s Eulerovým.*)

Posléze násobme (β) rovnicí (δ) a součin ten dělme rovnicí (ε), čímž obdržíme

$$\frac{\sqrt{p^2-1}\,dp}{(2-p^2)p} = 2\sqrt{2} \frac{x^2dx}{(1-x^4)\sqrt{1+x^4}}.$$

Integrací obou stran povstane

$$V_4 = \frac{1}{2\sqrt{2}} \int \frac{\sqrt{p^2-1}\,dp}{(2-p^2)p}$$

a násobíme-li za integračním symbolem čítatele i jmenovatele p, lze psáti

$$V_4 = \frac{1}{2\sqrt{2}} \int \frac{p\sqrt{p^2-1}\,dp}{1-(p^2-1)^2}.$$

Integrál tento vede opětně na integrál differenciálu racio-

*) Viz Euler tamže str. 39.

nálního, použijeme-li dřívější substituce $p^2 - 1 = z^2$, tak že přímo jest patrný tvar integrálu posledního

$$\int \frac{z^2 dz}{1 - z^4} = \frac{1}{2} \int \left\{ \frac{dz}{1 - z^2} - \frac{dz}{1 + z^2} \right\}$$

$$= \frac{1}{2} \left\{ l \frac{1 + z}{\sqrt{1 - z^2}} - \operatorname{arc\,tg} z \right\}.$$

Přihlížíme-li opětně k původní proměnné, lze dle V_3 psáti integrál V_4, t. j.

(D) $$\int \frac{x^2 dx}{(1 - x^4)\sqrt{1 + x^4}}$$

$$= \frac{1}{4\sqrt{2}} \left\{ l \frac{\sqrt{1 + x^4} + x\sqrt{2}}{1 - x^2} - \operatorname{arc\,tg} \frac{x\sqrt{2}}{\sqrt{1 + x^4}} \right\}.$$

Abychom dostali výsledek Eulerův,*) uvažme, že

$$\operatorname{arc\,tg} \psi = \operatorname{arc\,sin} \frac{\psi}{\sqrt{1 + \psi^2}},$$

kdež

$$\psi = \frac{x\sqrt{2}}{\sqrt{1 + x^4}}.$$

A tak lze vyčísliti ostatními, v odst. I. uvedenými substitucemi všechny integrály (1), (2), (3) a (4), při čemž konstruování příslušných výrazů řídí se dle differenciálu, stanoveného ze zavedené integrační proměnné p.

Poznámka. Ukážeme ještě, jak lze vyčísliti integrál V_1 substituční rovnicí (8), uvedenou v odst. I., kdež píšeme

(*k*) $$p = \frac{1 - x^2}{\sqrt{1 + x^4}}.$$

Stanovme

(*l*) $$dp = -\frac{2x(1 + x^2)\,dx}{(1 + x^4)^{\frac{3}{2}}}$$

*) Euler tamže str. 25.

a sestrojme

$$(m) \qquad \sqrt{1-p^2} = \frac{x\sqrt{2}}{\sqrt{1+x^4}},$$

načež, násobíce (*k*) rovnicí (*m*), nabudeme

$$(n) \qquad p\sqrt{1-p^2} = \sqrt{2}\,\frac{x(1-x^2)}{1+x^4}.$$

Dělíme-li (*l*) rovnicí (*n*), povstane

$$\frac{dp}{p\sqrt{1-p^2}} = -\sqrt{2}\,\frac{(1+x^2)\,dx}{(1-x^2)\sqrt{1+x^4}},$$

tedy V_1, t. j.

$$\int\frac{(1+x^2)\,dx}{(1-x^2)\sqrt{1+x^4}} = -\frac{1}{\sqrt{2}}\int\frac{dp}{p\sqrt{1-p^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\,l\,\frac{1+\sqrt{1-p^2}}{p}$$

a vzhledem ku (*k*) a (*m*) nabýváme výsledku (A).

Jest na jevě, že ve všech našich substitucích možno místo *p* zavésti goniometrickou funkci jakožto novou integrační proměnnou, což budiž předmětem úvahy naší v odstavci následujícím.

III. Volme třebas poslední tvar substituce (*k*) v odstavci předešlém uvažované, kladouce nyní

$$(1) \qquad \cos\varphi = \frac{1-x^2}{\sqrt{1+x^4}},$$

kteroužto rovnicí lze též vyčísliti všechny integrály V_k

$$(k = 1, 2, 3, 4).$$

Z rovnice (1) stanovíme

$$(2) \qquad d\varphi = \sqrt{2}\,\frac{1+x^2}{1+x^4}\,dx,$$

což násobíme rovnicí (1), i bude

$$(3) \qquad \cos\varphi d\varphi = d\sin\varphi = \sqrt{2}\,\frac{1-x^4}{(1+x^4)^{\frac{3}{2}}}\,dx.$$

Dále sestrojíme výrazy

$$(4)\qquad 1+\sin^2\varphi = \frac{(1+x^2)^2}{1+x^4},$$

$$(5)\qquad (1+\sin^2\varphi)\cos^2\varphi = 1-\sin^4\varphi = \left(\frac{1-x^4}{1+x^4}\right)^2.$$

Dělením rovnice (2) rovnicí (1), dospějeme differenciálu V_1,

$$(6)\qquad \frac{d\varphi}{\cos\varphi} = \sqrt{2}\,\frac{(1+x^2)\,dx}{(1-x^2)\sqrt{1+x^4}} = \sqrt{2}\,.\,dV_1$$

a dělíme-li (3) rovnicí (4), dostaneme differenciál V_2,

$$(7)\qquad \frac{d\sin\varphi}{1+\sin^2\varphi} = \sqrt{2}\,\frac{(1-x^2)\,dx}{(1+x^2)\sqrt{1+x^4}} = \sqrt{2}\,.\,dV_2;$$

dělíme-li pak (3) rovnicí (5), nabýváme differenciálu V_3,

$$(8)\qquad \frac{d\sin\varphi}{1-\sin^4\varphi} = \sqrt{2}\,\frac{\sqrt{1+x^4}}{1-x^4}\,dx = \sqrt{2}\,.\,dV_3$$

a konečně, násobíme-li (8) rovnicí $\sin^2\varphi = \frac{2x^2}{1+x^2}$, obdržíme differenciál V_4,

$$(9)\qquad \frac{\sin^2\varphi\, d\sin\varphi}{1-\sin^4\varphi} = 2\sqrt{2}\,\frac{x^2dx}{(1-x^4)\sqrt{1+x^4}} = 2\sqrt{2}\,.\,dV_4.$$

Integrály V_k jsou tedy vyjádřeny jakožto integrály differenciálů racionálních, které vedou k resultujícím hodnotám vytčeným v odstavci předchozím.

Substitucí goniometrickou vyčísleny poprvé a dosud jedině tyto čtyři integrály V_k zvěčnělým *Gustavem Skřivanem*, professorem polytechnického ústavu království Českého ve článku *„Note über einige Integrale“.* *)

Dle obvyklého způsobu, při jistých integrálech differenciálů

*) Schlömilch, Zeitschrift für Mathematik u. Physik. Roč. VIII., 1863, str. 303.

irracionálních s výhodou užívaného, irracionálnost odstraňuje se zaváděním případné goniometrické funkce, aby z uvedené odmocniny, když si ji myslíme samu o sobě, vznikl jeden ze známých základních vzorců goniometrických, plynoucích z věty Pythagorovy. Proto Skřivan klade $x^2 = \operatorname{tg} \eta$, i jest tudíž

$$\sqrt{1 + x^4} = \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \eta} = \sec \eta .$$

Zřejmo, že mohlo se též klásti $x^2 = \operatorname{ctg} \eta$.

Tato Skřivanem zavedená společná substituce jest sice nejpřípadnější substituce *goniometrická*, nevede však k nejrychlejšímu vyčíslení integrálů těch, jako na př. goniometrická substituce (1) a jiné, které lze napsati dle substitucí (7) až (14) odst. I., z nichž (8) jest v tomto odstavci (1). Třeba tu opětně konstatovati, že námi zavedená *společná algebraická* substituce $\sqrt{1 + x^4} = px$ jest *nejjednodušší* ***vůbec*** *možná* substituce, vedoucí nejrychleji k vyčíslení integrálů V_k, což námi v citovaném článku, uveřejněném v král. Společnosti náuk, bylo ukázáno.

IV. *Legendre**) zabýval se integrálem tvaru

$$\text{(1)} \qquad V = \int \frac{x\,dx}{(1 - x^3)\sqrt{4x^3 - 1}},$$

který možno vyčísliti takto:

Zaveďme substituci

$$\text{(2)} \qquad \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{4x^3 - 1}} = y, \text{**)}$$

z níž plyne

$$x = \sqrt[3]{\frac{3 + y^2}{4y^2}}$$

a

$$dx = -\sqrt[3]{2}\,\frac{dy}{\sqrt[3]{y^5 (3 + y^2)^2}}.$$

*) Srovnej Legendre „*Traité des fonctions elliptiques et des intégrales eulériennes*". T. I, pag. 171, Paris, 1825.

**) O této substituci viz Poznámku na konci tohoto odstavce připojenou.

Po dosazení těchto hodnot do (1) bude

$$\text{(3)} \qquad V = \frac{2\sqrt[3]{4}}{3\sqrt{3}} \int \frac{y\,dy}{(1-y^2)\sqrt[3]{y^3+3y}}.$$

Ježto

$$(\alpha) \qquad \frac{y}{(1-y^2)\sqrt[3]{y^3+3y}} = \frac{1}{2\sqrt[3]{y^3+3y}}\left(\frac{1}{1-y} - \frac{1}{1+y}\right),$$

nabude (3) tvaru

$$V = \frac{\sqrt[3]{4}}{3\sqrt{3}}\left\{\int \frac{dy}{(1-y)\sqrt[3]{y^3+3y}} - \int \frac{dy}{(1+y)\sqrt[3]{y^3+3y}}\right\}$$

$$= \frac{\sqrt[3]{4}}{3\sqrt{3}}(V_1 - V_2),\text{*)}$$

kde V_1 znamená prvý a V_2 druhý integrál.

V obou integrálech jest výraz pod třetí odmocninou roven

$$\frac{(y-1)^3 + (y+1)^3}{2}.$$

Vložením této hodnoty do integrálu druhého udělíme tomuto podobu

$$\text{(5)} \qquad V_2 = \sqrt[3]{2} \int \frac{dy}{(y^2-1)\sqrt[3]{1+\left(\frac{y+1}{y-1}\right)^3}}.$$

Klademe-li nyní

$$\text{(6)} \qquad \frac{y+1}{y-1} = t,$$

---

*) Označíme-li druhý integrál $f(y)$, jest patrně prvý $f(-y)$, tak že

$$V = \frac{\sqrt[3]{4}}{3\sqrt{3}}\{f(-y) - f(y)\}.$$

obdržíme differencováním

$$\frac{dy}{(y-1)^2}=-\frac{dt}{2},$$

což dělíme-li (6),

(7) $$\frac{dy}{y^2-1}=-\frac{dt}{2t}.$$

Dosadíme-li hodnoty (6) a (7) do (5), nabudeme

(8) $$V_2=-\frac{1}{\sqrt[3]{4}}\int\frac{dt}{t\sqrt[3]{1+t^3}}.$$

Podobným způsobem dospěli bychom ku

(9) $$V_1=\sqrt[3]{2}\int\frac{dy}{(1-y^2)\sqrt[3]{1+\left(\frac{y-1}{y+1}\right)^3}}=\frac{1}{\sqrt[3]{4}}\int\frac{dt}{\sqrt[3]{1+t^3}}.$$

Jest tedy

$$V_1-V_2=\frac{1}{\sqrt[3]{4}}\left\{\int\frac{dt}{\sqrt[3]{1+t^3}}+\int\frac{dt}{t\sqrt[3]{1+t^3}}\right\}.$$

Druhý z těchto integrálů přejde ve formu prvého substitucí $=\frac{1}{z}$, tak že pak V čili integrál

(1′) $$\int\frac{xdx}{(1-x^3)\sqrt{4x^3-1}}=\frac{1}{3\sqrt{3}}\left\{\int\frac{dt}{\sqrt[3]{1+t^3}}-\int\frac{dz}{\sqrt[3]{1+z^3}}\right\}.$$

Známé integrály pravé strany jsou téže formy.

Volme z nich prvý

$$\int\frac{dt}{\sqrt[3]{1+t^3}},$$

který vyčíslíme jiným postupem než dosud se děje.

Položme

$$\sqrt[3]{1+t^3} = tu_2$$

čili

$$1+t^3 = t^3u_2^3,$$

kteroužto rovnici přímo differencujme a ihned kraťme $3t^2$; pak jest

$$dt = u_2^3\,dt + t\,u_2^2\,du_2$$

aneb

$$(1-u_2^3)\,dt = tu_2\,.\,u_2\,du_2.$$

Hledíce k původní substituční rovnici pišme dále

$$(1-u_2^3)\,dt = \sqrt[3]{1+t^3}\,.\,u_2du_2.$$

Rozloučíme-li proměnné, bude

$$\frac{dt}{\sqrt[3]{1+t^3}} = \frac{u_2du_2}{1-u_2^3}$$

a integrujeme-li obě strany této rovnice, jest hledaný integrál

$$\int\frac{dt}{\sqrt[3]{1+t^3}} = \int\frac{u_2du_2}{1-u_2^3}$$

patrně vyjádřen integrálem differenciálu racionálního.

Touže cestou, kladouce

$$\sqrt[3]{1+z^3} = zu_1,$$

dojdeme k nové formě druhého integrálu v (1′), t. j. k integrálu

$$\int\frac{dz}{\sqrt[3]{1+z^3}} = \int\frac{u_1\,du_1}{1-u_1^3}.$$

Integrál (1′) bude míti nyní tvar

$$(1'')\quad \int\frac{xdx}{(1-x^3)\sqrt{4x^3-1}} = \frac{1}{3\sqrt{3}}\left\{\int\frac{u_2\,du_2}{1-u_2^3} - \int\frac{u_1\,du_1}{1-u_1^3}\right\},$$

z něhož patrno, že předložený integrál (1) jest vyjádřen integrály racionálních differenciálů.

Poznámka k integrálu předchozímu. *Serret* ve svém vynikajícím spise o počtu differenciálním a integrálním uvádí binomický differenciál

$$(a)\qquad dV = \frac{dx}{(1-x^3)^{\frac{2}{3}}}, {}^{*})$$

jejž substitucí

$$(b)\qquad \frac{\sqrt[3]{1-x^3}}{1-x} = t$$

transformuje především na tvar

$$(c)\qquad \frac{dx}{\sqrt[3]{(1-x^3)^2}} = \frac{1-x}{1+x}\,dt = dV.$$

Na to stanoví

$$t^3 = \frac{3}{4}\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^2 + \frac{1}{4},$$

z kteréžto rovnice jde

$$(d)\qquad \frac{1-x}{1+x} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{4t^3-1}},$$

čímž (c) nabývá formy

$$(e)\qquad dV = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{4t^3-1}}\,dt.$$

Když t nahradíme x, tu výraz $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{4x^3-1}}$, položen rovný y, jest ona substituce, kterou jsme při vyčíslení Legendrova

*) Viz Serret, *Cours de calcul différentiel et intégral.* 2. édit., pag. 66, Paris, 1879 aneb na téže stránce ve 4. vyd., Paříž, 1894 aneb Harnackův německý překlad str. 58., Lipsko, 1885.

integrálu (1) zavedli a označili (2). Tato substituce, jak patrno, má svůj původ v substituci (*b*), kterouž dle povahy předloženého integrálu (1) sestrojiti lze dle substitucí, námi uvedených na str. 345., k nimž jsme dospěli úvahou opřenou o substituce, Eulerem, podané.

Třeba tu též poznamenati, že tvar integrálu

$$V=\int\frac{dx}{(1-x^3)^{\frac{3}{2}}}$$

vyskytuje se v Eulerově díle IV. na str. 293. Také Legendre ve svém *Traité des fonctions elliptiques,* pag. 185 uvádí týž integrál, při němž poprvé zavedena je substituce (*b*), kterou Serret v citovaném díle svém reprodukuje.

V. Legendreův integrál tvaru

$$V=\int\frac{xdx}{(x^3+8)\sqrt[3]{x^3-1}}, \tag{1}$$

který vyčíslil též *Clausen*, a kterým zabýval se *Günther*,*) převedeme na tvar Eulerova integrálu.

Klademe-li tu

$$x=\sqrt[3]{1+3u^2},$$

jest

$$dx=\frac{2udu}{(1+3u^2)^{\frac{2}{3}}},$$

tak že

*) Legendre, *Traité des fonctions elliptiques et des intégrales eulériennes.* Tome I, pag. 165, Paris, 1825. Clausen, *Ueber ein Integral in Legendre's Traité des fonctions elliptiques* (Astronom. Nachrichten, Nr. 442.). Totéž reprodukoval Grunert ve svém Archiv der Mathematik u. Physik, III. díl, pag. 335, 1843. Günther, *Sur l'évaluation de certaines intégrales pseudo-elliptiques.* (Bulletin de la Société mathématiques de France, pag. 88, Paris, 1882.).

$$(1') \qquad V = \frac{2}{3\sqrt[3]{3}} \int \frac{du}{(3+u^2)\sqrt[3]{1+3u^2}},$$

což jest integrál Eulerův.*)

Ježto

$$\frac{1}{(3+u^2)\sqrt[3]{1+3u^2}} = \frac{1}{(3+u^2)\sqrt[3]{1+3u^2}} \cdot \frac{(1+u)^2-(1-u)^2}{4u},$$

nabude (1') podoby

$$(2) \; V = \frac{1}{6\sqrt[3]{3}} \left\{ \int \frac{(1+u)^2 \, du}{(3u+u^3)\sqrt[3]{1+3u^2}} - \int \frac{(1-u)^2 \, du}{(3u+u^3)\sqrt[3]{1+3u^2}} \right\}$$

$$= \frac{1}{6\sqrt[3]{3}} (V_1 - V_2),$$

při čemž patrně označujeme první integrál V_1 a druhý V_2.

První integrál V_1 vyčíslíme, substitujeme-li

$$(3) \qquad \frac{1-u}{\sqrt[3]{1+3u^2}} = y;$$

differencujeme-li tuto rovnici, bude

$$(4) \qquad \frac{(1+u)^2 \, du}{(1+3u^2)\sqrt[3]{1+3u^2}} = -dy.$$

---

*) Integrál tento uvádí Euler s názvem „*Integratio succincta formulae integralis maxime memorabilis*

$$\int \frac{dz}{(3 \pm z^2)\sqrt[3]{1 \pm 3z^2}}\text{“}$$

(Convent. exhib. die 28. april. 1777). N. Acta Petr., X, 1792, p. 20—26. Viz též Legendre, *Traité des fonctions elliptiques.* Tome I, pag. 170.

Sestrojíme výraz

$$1-y^3=\frac{u(3+u^2)}{1+3u^2}, \tag{5}$$

načež, dělíme-li (4) rovnicí (5), obdržíme

$$\frac{(1+u)^2\,du}{u(3+u^2)\sqrt[3]{1+3u^2}}=-\frac{dy}{1-y^3},$$

tak že

$$V_1=-\int\frac{dy}{1-y^3}, \tag{6}$$

čímž integrál V_1 vyjádřen jest integrálem racionálního differenciálu.

Druhý integrál V_2 vyčíslíme substitucí

$$\frac{1+u}{\sqrt[3]{1+3u^2}}=z. \tag{7}$$

Přímým differencováním rovnice této nabudeme

$$\frac{(1-u^2)\,du}{(1+3u^2)\sqrt[3]{1+3u^2}}=dz \tag{8}$$

a ježto

$$z^3-1=\frac{u(3+u^2)}{1+3u^2}, \tag{9}$$

dostaneme, dělíme-li (8) rovnicí (9),

$$\frac{(1-u^2)\,du}{u(3+u^2)\sqrt[3]{1+3u^2}}=\frac{dz}{z^3-1}$$

a tedy

$$V_2=-\int\frac{dz}{1-z^3}.$$

Difference

$$V_1-V_2=-\int\frac{dy}{1-y^3}+\int\frac{dz}{1-z^3},$$

tak že hledaný integrál

$$\int \frac{x\,dx}{(x^3+8)\sqrt[3]{x^3-1}} = \frac{1}{6\sqrt[3]{3}} \left\{ \int \frac{dz}{1-z^3} - \int \frac{dy}{1-y^3} \right\}$$

vyjádřen jest integrály racionálních differenciálů.

Kterak lze dokázati větu o osách podobnosti tří kružnic užitím deskriptivní geometrie.

Napsal

Dr. **Ant. Sucharda** v Brně.

1. Ve čtvrtém vydání Mongeovy deskriptivní geometrie, jež pořídil r. 1820 žák jeho Brisson, dokazuje se na str. 56., že šest bodů podobnosti tří kružnic leží po třech na čtyřech přímkách (osách podobnosti). K výsledku tomu dospívá Monge, hledaje společné tečné roviny tří ploch kulových, sestrojených nad kružnicemi těmi jako hlavními, kterouž úlohu řeší užitím kuželových ploch, opsaných každým dvěma z těchto ploch kulových.

Důkaz Mongeův vyžaduje, aby žádné dvě z daných kružnic vespolek se neprotínaly, ježto sic vnitřní jejich tečny, tedy i příslušné plochy kuželové a proto i některé z tečných rovin jim společných stávají se pomyslnými. *)

V následujících řádcích pokusím se o důkaz také na deskriptivní geometrii založený, ale nezávislý na vzájemné poloze daných kružnic.

Za tou příčinou volím ono znění věty, které uvádí Salmon-Fiedler (Analytische Geometrie der Kegelschnitte, 4. vyd., p. 193.) a z něhož jsoucnost čtyr os podobnosti snadně vyplývá.

Dány-li v rovině tři libovolné kružnice $K\,K'\,K''$, prochází

---

*) Bez řečené výhrady dokazuje se věta planimetricky z obrácené věty Menelaovy (sr. Spieker, Lehrbuch der ebenen Geometrie 21. vyd. p. 20 . a j.).