Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky

J. Pšenička

Poznámka k výjevům v rourkách Crookesových

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 12 (1883), No. 1, 36--47

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/109001

Nápadně různé výjevy na Crookesových rourkách dle toho, je-li vnitřek positivní neb negativní, a sice silnější jiskry v prvním případě, zdají se potvrzovati náhled *Rühlmanna* a *Wiedemanna*, že k positivnímu výboji jest zapotřebí vyššího potentiálu než k výboji negativnímu *).

Poznámka k výjevům v rourkách Crookesových.

Sepsal **J. Pšenička.**

Záhy po uveřejnění Crookesových pokusů a jeho hypothesy o zářící hmotě, snažili se fysikové dokázati bezpodstatnost její jak cestou theoretickou, tak i experimentalní, hledíce ukázati, že výjevy v trubicích silně evakuovaných pozorované se neliší specificky od výjevů v obyčejných rourkách Geisslerových. Jeden z hlavních důvodů byl, že výboje v takových rourkách se řídí jako každý pohyblivý proud, působí-li naň magnet, zákonem *Biot-Laplaceovým*.

Tak praví p. dr. *Domalíp* v článku: **) „Über die magn. Einwirkung auf das durch die negat. Entladung in einem evacuirten Raume erzeugte Fluorescenzlicht", na základě pokusů s rourkami Geisslerovými a Crookesovými: „Potvrzuje se tedy náhled, že proud, prochází-li vakuem, stupněm zředění svých známých vlastností nepozbývá". Ku konci svého pojednání praví: „Ačkoliv jsem pokus s rourkou evakuovanou, kdež fluoreskující ***) deska dráhu paprsků označuje, nemohl opakovati, můžeme z uvedených pokusů souditi, že i v tomto zvláštním případě shora uvedený zákon plnou platnost míti bude, a že světlo v takovémto vakuum v témže smyslu magnetem odkloňováno bude, jako v prostoru méně evakuovaném." Pokus s takovou rourkou uvádí *Crookes* †) a praví, že „se zcela liší od onoho, jenž sleduje zákon účinkování magnetu při obyčejně užívaném zředění. Prochází-li zde jiskra indukční, nastane sice také odklon tento, ale jest *občasný*, neboť se proud v původní

*) Viz: *Wiedemann*, Galv., II. díl, 2. oddíl, str. 294. neb *Pogg. Ann.* sv. 158.

**) Sitzungsberichte d. Wien. Ak. d. Wissenschaften sv. 81.

***) Výjev ten nazývá se nyní obyčejně fosforescencí, poněvadž světélkování látky trvá i po přerušení působení paprsků elektrických.

†) V. článek p. *Čecháče* v Čas. pro pěst. math. a fys. r. 1880. str. 187.

směr vrací, aby znovu opět se odklonil, — v případu našem jest stálý.“ Porovnává pak odkloňování zářící hmoty magnetem odkloňování vystřelené kulky tíží zemskou.

Dělal jsem s rourkami Crookesovými v tomto ohledu četné pokusy, i s těmi, které nemají žádného stínítka, i s těmi, které stínítko s okénkem a desku opatřenou látkou fosforescenční a vždy shledal jsem, že světlo v rourkách těch řídilo se vůči magnetu týmiž zákony, jako každý pohyblivý vodič. Mohu tedy náhled, projevený p. dr. Domalípem na konci jeho pojednání, úplně potvrditi.

Spojíme-li elektrodu *a* trubice (obr. 12 v Čas. pro pěst. math. a fys. 1880, aneb obr. 18 v *Gretschlově* brošurce „Die strahlende Materie“) s pólem negativním buď Ruhmkorffova stroje indukčního neb Holtzovy elektriky influenční, *c* s pólem positivním, povstane na slídovém můstku za okénkem před elektrodou *a* světlý proužek, který se táhne k elektrodě positivní. Blížíme-li se k rource magnetickou tyčí, bude proužek buď se odpuzovati neb přitahovati, dle toho, *s kterým pólem se blížíme* a dle toho *klademe-li magnet pod trubici nebo nad trubici.* Můžeme vždy napřed určiti, zdali bude přitahován neb odpuzován, myslíme-li si dle Ampère-ova názoru magnet co solenoid a vycházíme-li od základních zákonů elektrodynamických. Dejme tomu, že při s hora uvedeném spojení blížíme se s hora s pólem severním, bude světlý proužek přitahován, protože proudy hypothetické v magnetu v části k rource obrácené jdou v stejném směru než jde proud v trubici; dáme-li týž pól v téže poloze pod trubici, bude světlý proužek odpuzován. Posouváme-li magnet nad rourkou ku předu, vrací se proužek do prostřed můstku, a zároveň intensita jeho slábne; je-li magnet svým prostředkem (indifferentním pasem) nad rourkou, *zmizí z velké části světlý proužek*, protože proud jest vytažen z můstku na horní část trubice, a za to fosforeskuje tato silněji v úzkém proužku, rovnoběžném s tím, který se táhl po slídovém můstku. Položíme-li jižní pól magnetu při uvedeném spojení nad rourku, bude světlý proužek na můstku odpuzován, poněvadž mají nyní prvkové proudy v magnetu opačný směr nežli proud uvnitř trubice, označený fosforeskujícím proužkem. Pošinujeme-li magnet dále, vrací se opět světlý proužek do prostředku a *stává se intensivnějším*, poněvadž se proud stlačuje magnetem jaksi na můstek. Opačně se chová proud, klademe-li magnet pod trubici.

Velmi dobře jest viděti pohyb světlého proužku působením magnetu též na rource obr. 10. v Čas. pro pěst. math. a fys. I když položíme magnetickou tyč po délce buď nad rourku neb pod ni, snaží se vždy proužek postaviti tak, aby měl co možná polohu rovnoběžnou s prvkovými proudy v magnetu a proud v rource měl s nimi stejný směr.

Podobně chová se světlý proužek, působí-li naň magnet podkovitý. Položíme-li nad rourku podkovu aequatorialně, vytáhne se buď nahoru aneb se stlačí dolů, dle toho, jdou-li proudy prvkové na pólech magnetu v témž směru jako proud v rource neb v opačném. Na př. jde-li proud v uvedené trubici od *c* k *a* a má-li magnet polohu takovou, že severní pól leží na levo, jižní na pravo od směru proudu positivního, zmizí fosforescenční proužek ze slídového můstku a na stěně trubice objeví se mezi oběma póly silně fosforeskující čára táhnoucí se od kathody k anodě. Patrno, že proud byl magnetem vytažen nahoru. V opačné poloze magnetu při stejném směru proudu, jest proužek stlačen dolů na slídovou desku, zároveň jest rozšířen a skrácen, jakoby byl od positivního pólu odříznut.

Tento výjev lze pozorovati i na takových rourkách, které nemají stínítka s okénkem a fosforescenční desky. Vždy buď vytáhne magnetická podkova, pod níž stojí rourka v poloze aequatorialní, světlo v úzký pruh silně fosforeskující mezi oba póly, aneb stlačí na dolní stěnu světlo tvořící oblouky na způsob křivek magnetických. Jak přirozeno, ještě význačněji nežli s podkovou permanentně magnetickou ukazují se tyto výjevy se silným elektromagnetem.

I mlhovité světlo positivní, které v rourkách, které jsem vyšetřoval, mělo barvu šedomodrou, v jedné načervenalou (obr. 10. v Čas. pro pěst. math. a fys.), bylo magnetem přitahováno neb odpuzováno dle zákonů Ampère-ových. Při účincích magnetu na toto světlo, třeba pilný zřetel bráti na účinek, který na ně má magnet co dobrý vodič. Již pouhé přiblížení prstu odkloní je značně, jak nejprvé shledal *Reitlinger* *), který výjev ten má

*) *Reitlinger und Urbanitzky:* Über die Erscheinung in Geissler'schen Röhren unter äusserer Einwirkung. Sitzb. d. Wien Ak. d. W. sv. 80.

za zvláštní elektrorepulsí, lišící se od známého odpuzování se stejnojmenně elektrických hmot.

Proud působí na výboje v rourkách Crookesových dle zákonů elektrodynamických.

Abych se o tom přesvědčil, vzal jsem drát navinutý v několika závitcích kolem rámce v podobě obdélníku a upevnil jsem rámec po délce nad rourkou, která stála tak, že můstek slídový fosforescenční látkou opatřený stál svisle. Jestliže tímto drátem prochází proud, vzbuzovaný voltaickou batterií a jestliže se rourkou (obr. 12.) vedou výboje buď Ruhmkorffova stroje neb influenční elektriky, jichž postup byl známým fosforeskujícím proužkem označen, máme dva proudy rovnoběžné buď téhož neb opačného směru. Zařídil jsem to tak, že jsem mohl proud batterie, procházející kolem rámce, přerušovati neb zavírati tím, že jsem drát od jednoho pólu batterie vedl do mističky naplněné rtutí, z níž druhý drát vedl teprve k rámci. Ponořil-li jsem drát, neb vytáhl-li jsem ho ze rtuti, byl proud uzavřen neb otevřen. A tu jsem shledal, že světlý proužek na můstku slídovém se přiklonil, když proud v rámci šel v témže směru jako v trubici, a že se odklonil, když oba proudy měly směr opačný.

Chování toto na novo dosvědčuje, že procházení elektřiny rourkami, v nichž plyn byl velice zředěn, podržuje vlastnosti elektrického proudu. Nevím, že by posud byl někdo působení proudu na světlý proužek v rource experimentálně vyšetřoval.

Vliv magnetu na průchod proudu v rourkách Crookesových.

Jak dokázal Wiedemann ve svém Galvanismu (díl II. §. 1033 1. vyd.) má magnet vliv na intensitu výbojů v rourkách Geisslerových a sice různý dle polohy magnetu — zdali axialní neb aequatorialní — a dle toho, je-li magnet poblíž anody neb kathody.

Vliv tento podařilo se mi na některých trubicích, jak myslím, ukázati způsobem následujícím: Spojil jsem elektrody rourky (na př. obr. 13. v Časopise pro pěstování mathem. a fysiky) s konduktory influenční elektriky, a vzdálil jsem konduktory od sebe tak daleko, že jiskry ještě sice mezi nimi přeskakovaly, ale již též trubicí šly výboje. — Jest totiž u každé rourky zapotřebí vzdáliti konduktory do určité nejmenší vzdálenosti, aby výboje se děly zředěným plynem v trubici, a nikoli vzduchem mezi svodiči. To bude tehdy, když vrstva vzduchu mezi konduktory klade větší odpor nežli zředěný plyn uvnitř. Tato nejmenší vzdálenost konduktorů se tedy patrně řídí odporem, který klade zředěný plyn v rource. Postavím-li při tomto spojení magnetickou podkovu aequatorialně nad rourku poblíž kathody, zmizí výboje mezi konduktory, a elektřina vyrovnává se jen zředěným plynem v rource a uvnitř objeví se světlo intensivnější.

Snáze se to podaří, když zavedeme vrstvu vzduchu, kterou musí elektřina mimo zředěný plyn ještě prorážeti. K tomu cíli vedl jsem drát od jednoho konduktoru k jednomu rameni Henley-ova vybíječe, od jehožto druhého ramene šel teprve drát k trubici. Mezi kuličkami vybíječe přeskakovaly pak též jiskry. Ovšem že v tomto případě nutno konduktory elektriky více od sebe vzdáliti. Ještě nápadněji bylo to pozorovati, když jsem na drát svodičů položil kondensační rouru. Jiskry, které mezi konduktory přeskakovaly, ihned zmizely, když postavil jsem magnet nad rourku poblíž negativní elektrody a v rource objevilo se silnější světlo. Vedl-li jsem magnet dále k anodě, počaly jiskry mezi svodiči opět přeskakovati, vrátil-li jsem se ku kathodě, přestaly.

Zdá se, že působením magnetu v této poloze se průchod proudu rourkou podporuje, nebo proud sesiluje. Plyne to i z toho pokusu, že když konduktory elektriky jsou tak málo od sebe vzdáleny, že jde mezi nimi proud jisker a v rource se světlo neobjevuje, neb na nejvýš nepatrné, vyskytne se ihned, jakmile dáme magnet nad rourku, aniž by jiskry mezi svodiči přestaly přeskakovati.

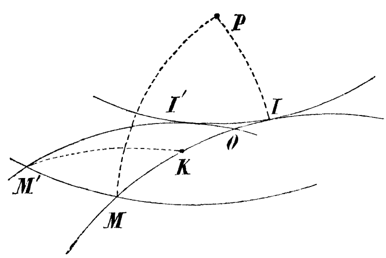
O kývadlu Foucaultově uveřejnil akademik *J. Bertrand* v Comptes rendus t. XCIV, č. 7. (ze dne 13. února 1882), pag. 371, zajímavou poznámku, již čtenářům Časopisu s některými vysvětlivkami pod čarou umístěnými a přidav obrazec předkládám.

„V dopisu uveřejněném na str. 383. sebraných vědeckých prací *Léona Foucaulta*, udává on princip, na jehož základě nalezl zákon známého úkazu.

„„Počínám, praví, tím, že kladu bez ostýchání následující postulát: Při změně polohy svislice, která stále jest obsažena v rovině kyvu, jsou posloupné polohy roviny kyvu stanoveny tou podmínkou, že mají spolu tvořiti úhly minimalní.““

Foucault applikuje tento princip k případu, kdy kyvadlo kyvá v poledníku. On mně byl proponoval problém obecný a zdá se mi, že řešení k vůli své jednoduchosti zasluhuje, abych je sdělil Akademii.

Buď M poloha pozorovatele na povrchu zemském. Po čase dt dospěje do M′ na rovnoběžníku vedeném bodem M; kdyby rovina kyvu nevykonávala zdánlivý (apparent) pohyb, tu by se otáčela se zemí a její posloupné polohy*) by obalovaly jistý rovnoběžník; buď I bodem dotyčným v původní poloze, který nechť dospěje do I′, kdy M dorazí do M′; mezi velkými kružnicemi vedenými bodem M′ tvoří ona M′K s MI nejmenší úhel, která protíná MI v bodu K, jehož vzdálenost MK od bodu M jest kvadrantem.**) Kružnice M′I′ by neukazovala žádnou odchylku, jevící se rotace roviny oscillační jest tedy I′M′K a tu označme ϑ: jde o to, abychom ji vyčíslili.



Buď O průsečíkem kružnic MI a M′I′, tedy arci bodem ku I i I′ nekonečně blízkým; v trojuhelníku M′OK máme

$$(1) \qquad \frac{\sin\vartheta}{\sin \mathrm{OK}} = \frac{\sin \mathrm{O}}{\sin \mathrm{M'K}}.$$

M′K jest kvadrantem, ϑ nekonečně malý úhel, sin O jest

*) t. j. posloupné polohy velké kružnice, jež jest stopou oscillační roviny na zeměkouli.

**) Je-li S středem koule, tu jde o to, vésti přímkou M′S rovinu, která má s rovinou MIS sklon minimální; stopa hledané roviny na rovině MIS jak známo jest kolma ku M′S, pročež hledaná kružnice prochází bodem K vzdáleným o 90^0 od paty kolmé, vedené na MI bodem M′. Body M a M′ jsou nekonečně blízké a proto lze onu patu nahraditi bodem M.

geodetickým kontingenčním úhlem*) ε oblouku II′ rovnoběžníku; napsaná rovnice tedy podává

(2) $$\vartheta = \varepsilon \sin \mathrm{OK}.$$

Úhel ε dělen obloukem II′ podává geodetické zakřivení rovnoběžníku II′; značí-li λ oblouk PI, vzdálenost to rovnoběžníku II′ od pólu P, máme**)

(3) $$\frac{\varepsilon}{\mathrm{II'}} = \frac{\cos\lambda}{\varrho},$$

kde ϱ značí poloměr rovnoběžníku, a tedy

(4) $$\vartheta = \sin \mathrm{OK} \cos\lambda \frac{\mathrm{II'}}{\varrho};$$

OK jest obloukem komplementárním ku MO aneb i ku MI, který se od něho jen nekonečně málo různí, a dále máme v pravoúhlém***) trojúhelníku MIP

$$\cos \mathrm{MI} \cos\lambda = \cos \mathrm{MP};$$

formuli (4) lze tudíž psáti

$$\vartheta = \cos \mathrm{MP} \frac{\mathrm{II'}}{\varrho}.$$

$\cos \mathrm{MP}$ jest sinusem geografické šířky, $\frac{\mathrm{II'}}{\varrho}$ jest úhel, o který se země otočila, a theorém *Foucault*-ův tudíž dokázán. *W.*

O theorému Sturm-ově píše prof. *Vincenzo Janni* v posledním sešitu „Giornale di Matematiche ad uso degli studenti delle Università italiane pubbl. per cura del prof. G. Battaglini," vol. XX., pag. 166:

---

*) Pojem ten vytknul *Liouville:* v. *Paul Serret*, Théorie nouvelle géométrique et mécanique des lignes à double courbure, Paris 1860, p. 8 a 10.

**) Poloměr geodetického zakřivení R_g čáry na ploše se rovná obecně poloměru zakřivení R této čáry dělenému cosinem úhlu α, který svírá oskulační rovina čáry s tečnou rovinou plochy, t.: $R_g = \frac{R}{\cos\alpha}$; v. cit. dílo, str. 9. Máme tedy pro čáru II′

$$R_g = \frac{\cos\lambda}{\varrho}$$

a tedy geodetické zakřivení $= \frac{1}{R_g} = \frac{\varrho}{\cos\lambda}$.

***) Rovina kružnice MI točící se kolem PS obaluje přímý kužel a SI jest hranou jeho, pročež roviny SMI a SPI jsou kolmé, t. j. trojúhelník MIP pravoúhlý ve vrcholu I.

„V 6. svazku druhé serie *Nouvelles Annales* na str. 237 a násl. a pak na str. 427 a násl. vyskytuje se polemika, již měli *Duhamel* a *Prouhet* v příčině slavného theorému *Sturm-ova*. Cituji z ní následující místo, ze str. 429, jež *Duhamel* napsal.

. . . „„mais par quelle espèce de divination a-t-il (*Sturm*) été conduit à prendre les restes changés de signe, auxquels conduit la recherche di commun diviseur entre le premier membre de l'équation et sa dérivée, c'est ce qu'il est impossible de savoir, et ce dont il avait peut-être] lui même perdu la trace, comme il arrive souvent dans les inventions auxquelles les déductions logiques ne suffisent pas; et qui demandent ce qu'on appelle du génie. Il y a une illumination subite de l'esprit, qui dépend bien des idées qu'on a rassemblées, mais dont l'inventeur lui même a un sentiment si rapidement effacé, qu'il serait presque tenté de croire, comme on l'a souvent dit, que c'est au hasard qu'il la doit.""

Duhamelovi tedy, a myslím, že taktéž i mnohým jiným, navždy zůstalo tajemstvím, kterak *Sturm* byl veden k vynalezení svého theorému; někteří též myslili, že vznikl jedině náhodou. A přece existuje cesta velmi schůdná a rovná vedoucí k tomuto theorému, což jasně ukáže tato kratičká poznámka.

V důkazu theorému *Fouriera* *) se činí následující poznámka. Dány-li tři celistvé funkce

$$f_1(x),\quad f_2(x),\quad f_3(x),$$

z nichž jsou $f_1(x)$ a $f_2(x)$ nesoudělné, a taktéž poslední dvě $f_2(x)$ a $f_3(x)$, jestliže při hodnotě a proměnné x zmizí $f_2(x)$ a mimo to zde mají f_1 a f_3 hodnoty různých znamení, tu vychází, že i pro hodnoty x dostatečně blízké hodnotě a nechť si již jsou větší aneb menší než a, napsané tři funkce nám poskytují jen jednu variaci a jednu permanenci znamének. Pročež kdykoli zmizí prostřední funkce $f_2(x)$, nezískáme ni neztratíme variaci. Nuže při funkcích *Fourier-ových***) nemá vždy

*) Theorém ten nejprvé uveřejnil *Budan*, neboť již roku 1811 podal Akademii v Paříži úplný důkaz o něm; ač větu *Fourier* dříve byl našel a o ní ústně pojednával. V.: Analyse des équations déterminées par *M. Fourier*, Paris, publikovanou po jeho smrti *Navier-em* r. 1830.

**) t. j. při dané celistvé funkci a její derivacích. V. cit. dílo str. 87. sqq.

místa ta vlastnost, aby, zmizí-li nějaká z funkcí při $x = a$, nabývaly funkce sousední (v pravo a v levo totiž stojící) hodnot různě označených, pročež mají-li tyto sousední totéž znamení, ztrácíme dvě variace průchodem rostoucí proměnné x hodnotou a. Tím ale okamžitě vzniká myšlénka, nahraditi funkce *Fourierovy* jinými, kterým by se dostávalo oné vlastnosti, aby pak počet variac ztracených od $x = p$ do $x = q$ zrovna se rovnal počtu reálných kořenů obsažených mezi p a q.

Tyto nové funkce, jimiž nutno nahraditi funkce *Fourierovy*, rázem se nám naskytují.

Neboť tvoří-li daná funkce n-tého stupně $f(x)$ a její první derivace $f'(x)$ první dva členy hledané řady funkcí, má míti třetí funkce tu vlastnost, aby pro hodnoty x, jež činí $f'(x) = 0$ byla opačného znamení s $f(x)$. Avšak $-f(x)$ jest pro libovolnou hodnotu proměnné opačného znamení s $f(x)$; jest-li že však v ní klademe $f'(x) = 0$, obdržíme funkci $f_2(x)$ stupně nanejvýš $n - 2$ a která bude opačného znamení s $f(x)$ při hodnotách x, jež činí $f'(x) = 0$. Jest však známo *), že klásti v $-f(x)$ podmínku $f'(x) = 0$ je totéž, jako hledati zbytek divise $f(x) : f'(x)$ a vzíti zbytek se znamením opačným. Touže cestou se stanoví ostatní funkce *Sturmovy*.

Z toho nyní patrno, že nalezení *Sturmova* theorému je pravým vejcem Columbovým a jest s podivením, že jej *Fourier*, který se po tolik let zanášel rovnicemi numerickými, nenašel.

Jest si co přáti, aby ve výkladech o algebře se podával důkaz věty *Sturmovy* cestou právě vytknutou.“

Tuto poznámku prof. *V. Janni-ho* mám za velice pozoruhodnou, neboť ona způsobem v pravdě analytickým přirozeně vysvětluje vznik věty *Sturmovy*, věty to, která podávajíc úplnou odpověď k otázce těžké a přesně vytknuté po počtu reálných kořenů obsažených v daných mezích, právem platí za jeden z nejkrásnějších nálezů bádavého ducha mathematického. *W.*

---

*) Dělme $f(x)$ derivací $f'(x)$; buď Q podíl a R zbytek divise, to jest: $f : f' = Q + \frac{R}{f'}$, aneb $f = Qf' + R$. Pro hodnoty x, jež činí $f'(x) = 0$, máme tedy $f = R$ a tedy $-f = -R$. Poněvadž je dělitel f' stupně $n - 1$, můžeme tak dlouho dělit, až je zbytek R stupně nižšího t. j. nanejvýš stupně $n - 2$.

O geometrickém místu pat kolmic vedených z ohniska ellipsy, hyperboly a paraboly na tečny uveřejnil p. *V. Hübner* v X. roč. tohoto časopisu článek (str. 278.), v němž vytknutý úkol řešen způsobem poněkud nepřímým a to, myslím, z toho důvodu, že přímé stanovení analytickou cestou naráží na jistou obtíž; o ní chci stručně pojednati, neb mám za to, že její vysvětlení a odčinění může začátečníkům býti instruktivním.

Dána buď ellipsa o poloosách a, b, $(a > b)$; veďme k její tečnám kolmice z ohniska souřadnic $c = \sqrt{a^2 - b^2}$, 0 a stanovme geometrické místo pat těchto kolmic. Tečna sestrojena v bodu x', y' ellipsy má rovnici

$$\frac{xx'}{a^2} + \frac{yy'}{b^2} = 1, \tag{1}$$

kolmice oním ohniskem k ní vedená má tedy rovnici

$$y = \frac{a^2 y'}{b^2 x'}(x - c), \tag{2}$$

a oběma těmto rovnicím vyhovuje pata x, y kolmice. Souřadnice dotyčného bodu x', y' váže relace

$$\frac{x'^2}{a^2} + \frac{y'^2}{b^2} = 1, \tag{3}$$

a obdržíme tedy eliminováním hodnot x', y' z rovnic (1), (2), (3) relaci mezi x a y, t. j. rovnici hledaného geometrického místa. Za tím účelem vypočteme z lineárných rovnic (1) a (2) x' a y'

$$x' = \frac{a^2(x - c)}{x(x - c) + y^2}, \quad y' = \frac{b^2 y}{x(x - c) + y^2},$$

vloživše tyto výrazy do (3) máme

$$[x(x - c) + y^2]^2 - a^2(x - c)^2 - b^2 y^2 = 0, \tag{4}$$

co rovnici hledaného geometrického místa. Ona jest stupně čtvrtého a dá se psáti ve tvaru

$$[y^2 + (x - c)^2][x^2 + y^2 - a^2] = 0, \tag{5}$$

o čemž se čtenář — maje zřetel k relaci $c^2 = a^2 - b^2$ — snadno sám přesvědčí. Hledané geometrické místo se tedy skládá z kružnice

$$x^2 + y^2 - a^2 = 0,$$

opsané nad velkou osou co průměrem, a z čáry o rovnici

$$y^2 + (x - c)^2 = 0,$$

t. j. $$[y + i(x - c)][y - i(x - c)] = 0,$$

t. j. ze dvou imaginárných přímek

(6) $y = -i(x-c)$, $y = +i(x-c)$, $(i = \sqrt{-1}$ procházejících patrně bodem $x = c$, $y = 0$, t. j. vytknutým ohniskem a majících směrnice $\pm\sqrt{-1}$. Čtenáře znalého moderní geometrie tento výsledek nemůže překvapiti, neboť je známo,*) že ohniskem procházejí k ellipse tečny o směrnicích $\pm\sqrt{-1}$, dále že vůči relacím

$$i = -\frac{1}{i}\,,\quad -i = -\frac{1}{-i}\,,$$

přímky o takových směrnicích jsou samy k sobě kolmy a že tedy sluší pokládati každý bod vytknutých přímek za bod hledaného geometrického místa. Počtářsky se vysvětluje zjev ten tím, že při jistých hodnotách x', y' hovících relací (3) se rovnice (1) a (2) stotožní a sice s tou neb onou z rovnic (6). Skutečně snadno nalezneme, že je rovnice (1) totožna s (2), jestliže x', y' vyhovují podmínkám

$$\frac{a^2y'}{b^2x'} = -\frac{b^2x'}{a^2y'}\,,\quad -c\,\frac{a^2y'}{b^2x'} = \frac{b^2}{y'}\,,$$

z nichž řešením dle x', y' tyto dva body obdržíme

$$x' = \frac{a^2}{c}\,,\quad y' = \pm i\,\frac{b^2}{c}\,,$$

jež patrně vyhovují rovnici ellipsy (3). Rovnice (1) se při těchto hodnotách x', y' stotožní s (2) a sice zní pak obě

$$y = \frac{a^2}{b^2}\left(\pm i\,\frac{b^2}{a^2}\right)(x-c),$$

t. j.

$$y = \pm i\,(x-c)$$

jak musilo býti.

Obdobný počet při hyperbole zůstavuji čtenáři. Při parabole jest rovnice tečny sestrojené v bodu x', y'

$$(7)\qquad yy' = p\,(x + x'),$$

a tedy rovnice kolmé vedené ohniskem $\frac{p}{2}$, 0 k ní

$$(8)\qquad y = -\frac{y'}{p}\,(x - \tfrac{1}{2}p)\,,$$

při čemž souřadnice bodu dotýčného x', y' váže rovnice paraboly

$$(9)\qquad y'^2 = 2px'.$$

Eliminací hodnot x', y' z těchto tří rovnic obdržíme hledané geometrické místo. Z linearných rovnic (7) a (8) nalezneme

*) V. Dr. *Emil Weyr* a *Ed. Weyr*, Základové vyš. geom. II. sv., str. 135.

$$x' = \frac{-2y^2 - 2x^2 + px}{2x - p}, \quad y' = -\frac{2py}{2x - p},$$

a to položivše do (9)

$$0 = x[-4(x^2 + y^2) + 4px - p^2].$$

Hledané geometrické místo se tedy skládá z přímky $x = 0$ t. j. z vrcholové tečny, a z čáry o rovnici

$$4(x^2 + y^2) - 4px + p^2 = 0,$$

čili

$$4[y^2 + (x - \tfrac{1}{2}p)^2] = 0,$$

t. z přímek imaginárných

$$y = i(x - \tfrac{1}{2}p), \quad y = -i(x - \tfrac{1}{2}p),$$

vedených ohniskem a sice o směrnicích $\pm\sqrt{-1}$. Jich vyskytnutí právě tak se vysvětluje jako při ellipse a to si laskavý čtenář bez obtíže sám doplní. *W.*

Úlohy.

Řešení úlohy 13. z roč. XI.

(Napsal pan *Em. Heinemann*, technik.)

Rovnice daných rovin jsou:

$$\begin{aligned} A_1 &\equiv x\cos\alpha_1 + y\cos\beta_1 + z\cos\gamma_1 - p_1 = 0,\\ A_2 &\equiv x\cos\alpha_2 + y\cos\beta_2 + z\cos\gamma_2 - p_2 = 0,\\ A_3 &\equiv x\cos\alpha_3 + y\cos\beta_3 + z\cos\gamma_3 - p_3 = 0,\\ A_4 &\equiv x\cos\alpha_4 + y\cos\beta_4 + z\cos\gamma_4 - p_4 = 0. \end{aligned} \qquad 1)$$

Položme determinant

$$\begin{vmatrix} \cos\alpha_1 & \cos\beta_1 & \cos\gamma_1 & -p_1 \\ \cos\alpha_2 & \cos\beta_2 & \cos\gamma_2 & -p_2 \\ \cos\alpha_3 & \cos\beta_3 & \cos\gamma_3 & -p_3 \\ \cos\alpha_4 & \cos\beta_4 & \cos\gamma_4 & -p_4 \end{vmatrix} = \Delta$$

a subdeterminanty stupně třetího nazvemež $S_{h,k}$.

Rovinami danými stanovený čtyrstěn bude míti vrcholy M_1, M_2, M_3, M_4, jakožto proniky rovin $A_2A_3A_4$, $A_1A_3A_4$, $A_1A_2A_4$, $A_1A_2A_3$. Souřadnice libovolného vrcholu na př. M_3 určíme z rovnice 1), použijeme-li Binetova označení determinantů následovně:

$$x_3 = \frac{(p_1, \cos\beta_2, \cos\gamma_4)}{(\cos\alpha_1, \cos\beta_2, \cos\gamma_4)}, \quad y_3 = \frac{(\cos\alpha_1, p_2, \cos\gamma_4)}{(\cos\alpha_1, \cos\beta_2, \cos\gamma_4)},$$

$$z_3 = \frac{(\cos\alpha_1, \cos\beta_2, p_4)}{(\cos\alpha_1, \cos\beta_2, \cos\gamma_4)}.$$