# Poznámka k článku „Odvození Kaufmannovy podmínky stability“.

Napsal **August Žáček.**

Pan prof. Macků upozornil mne laskavě dopisem, že mnou užitý postup při odvozování Kaufmannovy podmínky stability (Čas. p. pěst. m. a f. XLV. str. 62) není správný. Ježto plně uznávám oprávněnost jeho námitek, dovoluji si je sděliti s čtenáři Časopisu, kteří četli můj článek:

„Věta článku: Elektrický stav se nezmění sám od sebe v tom směru, aby oběma vodiči za nového stavu spotřebovaná energie byla větší, než může generátor dodati. potřebuje správně (a to zrovna dle věty o zachování energie) ještě dalšího doplňku: ale také ne tak, aby spotřebovaná energie byla menší než může generátor dodati. A pak se ovšem uvedenou cestou podmínka pro stabilitu vůbec nedá najíti, neboť při ní nebyla brána v úvahu energie magnetická. Vezme-li se v úvahu také tato, pak prijdeme k postupu Kaufmannovu.“

# Ze školní praxe.

Podává prof. **Jan Schuster.**

V učebnici fysiky pro VI. třídu reálek, napsané od pp. Dra B. Maška, Dra J. Jeništy a Dra Fr. Nachtikala na str. 120 odvozen zákon rázu nepružných koulí přímým měřením rychlostí, které jsou odhadovány z výšek, se kterých kyvadla vypuštěna, po případě, do kterých se vychýlí. Jejich měřítko, t. j. na stinítku nakreslená soustava vodorovných přímek, jež jsou vzdáleny od nejnižší, vedené středem kyvadlových koulí v poloze rovnovážné, v poměru čtverců čísel přirozené řady, je sice pomůckou ideově přesnou, ale odhad výstupů koulí jest obtížný jednak pro malý počet bodů přesně zjištěných (1 až 4), jednak že je velmi těžko určiti polohu středu značně velké koule.

Proto užívám principu následujícího.

Místo výšek měřím výchylku koule z polohy rovnovážné ve směru vodorovném. Zavěšuju nepružné koule na vlákna hodně dlouhá. Pak možná při výchylkách dosti malých bráti dráhu koulí téměř za přímou, a měřiti na vodorovném měřítku. Jeho bod nullový, střed, umístím za kyvadla poněkud nad ně do roviny určené stykovým bodem obou koulí, kolmé k měřítku, aby v poloze krajní právě ještě zůstala koule pod měřítkem. Výchylku udává vlákno, čímž methoda získává proti předešlé na přesnosti.

V této úpravě jest výchylka přímo úměrná rychlosti. Neboť zdvihne-li se koule do výšky $h$, a je-li při tom vzdálena o $a$ od polohy rovnovážné, platí dle věty o úsecích na průměru kruhu opsaného délkou vlákna jakožto poloměrem:

$$a^2 = (2l - h)\,h,$$

kterýž výraz pro malé $h$ přejde v

$$a^2 = 2lh\,\text{*}),$$

takže

$$a \sim \sqrt{h}.$$

Ježto rychlost

$$v \sim \sqrt{h},$$

platí úměrnost:

$$v \sim a,$$

a zákon o hybnostech se verifikuje bezprostředně na výchylkách.

Zdálo by se, že se výchylky musí určovati pro každé kyvadlo od jeho polohy rovnovážné, pokud se pohybuje samo, po srážce, kdy rozhoduje poloha těžiště obou kyvadel, že je měřiti jeho vzdálenost od těžiště v poloze rovnovážné, tak že jsou nutné stálé opravy odečtených elongací. Ale tomu není tak.

Nechť mají kyvadla hmoty $m_1$, $m_2$, poloměry $r_1$, $r_2$, výchylky od nullového bodu stupnice $a$, $b$, nechť výchylka jejich těžiště po rázu činí $c$, čítána jsouc na touž stranu od bodu nullového, na které se nalézá těžiště, jehož úsečka jest $\dfrac{m_1 r_1 - m_2 r_2}{m_1 + m_2}$. Skutečné výchylky kyvadel před rázem jsou tedy $a - r_1$, $b + r_2$, po rázu je $c - \dfrac{m_1 r_1 - m_2 r_2}{m_1 + m_2}$ společná výchylka, takže se zřetelem na úměrnost výchylky a rychlosti můžeme rovnost hybností vyjádřiti takto:

$$m_1(a - r_1) + m_2(b + r_2) = (m_1 + m_2)\left[c - \frac{m_1 r_1 - m_2 r_2}{m_1 + m_2}\right].$$

---

*) Chyba učiněná jest 1%, 2%, 3% resp. pro amplitudy 16°, 23°, 28°, jimž při délce vlákna $l = 150$ *cm* odpovídají vzdálenosti resp. $a$ — 41, 58, 70 *cm*.

Členy obsahující poloměry se zruší, a zbude jednoduchá rovnice:

$$m_1 a + m_2 b = (m_1 + m_2)\, c,$$

kde výchylky, jak už vytčeno, vesměs čítány od téhož bodu nullového.

Výhodou pozorování je, že kyvy jsou značně delší než na rázostroji v učebnici popsaném, takže tempo pozorování se trochu zvolní na prospěch bezpečnosti jeho.

Také vede zmenšení rychlosti ke zmenšení chyby, která může vzniknouti, nenastane-li srážka právě v nejnižší poloze kyvadel následkem nesoučasného vypuštění obou. Chyba tato je malá řádu druhého.

K důkazu předpokládejme, že srážka nastala ve vzdálenosti $x$ od polohy nullové. Jí odpovídej výška $k$ středů koulí nad polohou nejnižší. Jsou-li $h_a$, $h_b$ výšky, s nichž koule spuštěny, $h'_c$ výška výstupu těžiště po srážce, možno rovnici hybností psáti ve tvaru:

$$\sqrt{h_a - k}\,.\, m_1 + \sqrt{h_b - k}\,.\, m_2 = \sqrt{h'_c}\,(m_1 + m_2),$$

nebo zavedeme-li výškám úměrné čtverce výchylek,

$$\sqrt{a^2 - x^2}\,.\, m_1 + \sqrt{b^2 - x^2}\,.\, m_2 = c'\,(m_1 + m_2)$$

a rozvinutím odmocnin, když se omezíme jen na první mocniny,

$$am_1 + bm_2 = c'\,(m_1 + m_2) + \frac{1}{2}\, x^2 \left(\frac{m_1}{a} + \frac{m_2}{b}\right).$$

V tomto odvození, jež má býti jen odhadem chyby, zanedbány poloměry koulí jako veličiny malé.

Popsaná methoda je potud správná, pokud vzdálenost průseku vlákna s měřítkem je rovna vzdálenosti středu kyvadla od roviny svislé vedené středem stupnice. Ale při větších rozkyvech, jež vyžadují značné zvýšení pravítka nad rovnovážnou polohu kyvadel, vzniknou rozdíly rovné průmětům části vlákna ležící pod stupnicí na ni.

Aby bylo možné vychýliti kyvadlo o úhel $\alpha$, jest pravítko umístiti o $l \cos \alpha$ pod závěsem kyvadla, jehož délka jest $l$, a při výchylce menší $\varphi$ je průmět části vlákna právě zmíněné

$$l\,(1 - \cos \alpha \sec \varphi) \sin \varphi,$$

a nabývá největší hodnoty

$$l \sin^3 \varphi_0,$$

je-li

$$\cos^3 \varphi_0 = \cos \alpha.$$

Abychom posoudili vliv této chyby, určeme ji pro $l = 150\,cm$, a pro elongace $a = 20, 30, 40\,cm$, takže stále zůstáváme uvnitř hranice $1\%$ chyby v určení rychlosti. Pak je $\alpha = arcsin\,\frac{2}{15}, \frac{3}{15}, \frac{4}{15}$, t. j. $\alpha = 7^0 40', 11^0 30', 15^0 26'$, čemuž odpovídají resp. $\varphi_0 = 4^0 26', 6^0 39', 8^0 57'$ a chyba jest $l\,sin^3 \varphi_0 = 0{\cdot}07\,cm, 0{\cdot}2\,cm, 0{\cdot}56\,cm$. Vidíme, že do elongací 30 $cm$, t. j. $11^0$, dá tato methoda výsledky pro pokusy přednáškové zcela uspokojivé, přesvědčující.

Když se užije pravítka zakřiveného ve tvaru kruhového oblouku o poloměru rovném délce vlákna $l$, na něž se nanese stupnice, jejíž dělicí příčky mají směr poloměrů, a jejich průseky s vnější hranou dle přirozené řady čísel rostoucí kolmé vzdálenosti od roviny souměrnosti pravítka, odpadne i poslední chyba.

---

# Věstník literární.

## Recense knih.

*Karel Petr*, **Počet integrální.** Sborníku Jednoty českých mathematiků a fysiků v Praze číslo XIII., Praha 1915, stran XXIV + 638, cena váz. 20 K (pro členy 14·50 K).

Česká literatura mathematická postrádá dosud spisů z rozmanitých oborů k různým účelům. Nejnaléhavější a nejtíže pociťována byla potřeba knihy o počtu infinitesimálním, v kterémž oboru ve větších literaturách cizích jest přímo nadbytek. Vždyť mimo Studničkovy trojdílné Základy vyšší mathematiky, jež své poslání v dětské době našeho odborného písemnictví vykonaly, (a mimo výklady prvních začátků, hlavně v učebnicích středoškolských) neměli jsme spisu o vyšší analysi, ačkoliv o tomto fundamentálním předmětu novodobé mathematiky vykládá se řadu let na třech vysokých školách našich. Aby těm, kdo chtějí česky studovati počet infinitesimální, podal řádnou učebnici psanou v moderním duchu, napsal před 13 lety prof. Edvard Weyr svůj známý Počet differenciálný (Sborníku Jednoty čís. V.); pokračovati na cestě nastoupené překazila však autoru čestné paměti předčasná smrt jeho. Nyní dočkali jsme se konečně druhého dílu vyšší analyse, jejž tvoří profesora Petra Počet integrální. Je jenom přirozeno, že psáti druhý díl spisu jako pokračování, třebas samostatné, k prvnímu dílu jiného autora není úloha dost příjemná ani vděčná; tím více musíme si vážiti odhodlání spisovatele této knihy. Počet integrální jest výsledek práce odborníka, který k ní jest nad jiné povolán jak svým