Časopis pro pěstování matematiky a fysiky

B. Šalamon

Dvě úlohy z kartometrie

Časopis pro pěstování matematiky a fysiky, Vol. 58 (1929), No. 1-2, 119--124

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/108931

Dvě úlohy z kartometrie.

B. Šalamon.

1.

K měření oblouků na mapách užívá se rozličných křivkoměrů. Při žádném však z těchto přístrojů, co jich bylo již konstruováno, nedociluje se výsledků s takovou přibližností, jaká jest žádoucná pro geografické a jiné aplikace mapy. Při všech dají se totiž realisovati některé z teoretických podmínek toliko hrubě přibližně, což má za následek i hrubší hodnotu konečného výsledku. Srovnává-li se měření oblouků na mapách s měřením ploch, dostává se při tomto obvyklými plochoměry jemnějších výsledků a mimo to se pracuje s těmito přístroji pohodlněji. Pro matematika leží po seznání takových zkušeností nasnadě myšlenka obejíti měření oblouků měřením ploch. Dá se toho skutečně docíliti několika způsoby, z nichž nejprostší je ten, při němž se užívá vztahu mezi délkou měřeného oblouku a délkou jeho pravoúhlého průmětu do nějaké přímky (pomocné osy). Tímto způsobem budeme se zabývati v první části tohoto článku.

Dříve ještě, než podáme řešení této úlohy, předešleme několik poznámek, které přísluší také k druhé části tohoto článku. Poněvadž jsou čáry, které se vyskytují na mapách, převážně obecného rázu a nemají výtvarného zákona, který by bylo lze vyjádřiti nějakou rovnicí analytickou, bude nutno užívati k řešení metrických úloh na těchto čarách toliko metod grafických. K realisaci těchto metod bude zapotřebí jednak sestrojovati v bodech původní křivky tečny, jednak sestrojovati pomocné křivky, a to interpolací mezi řadu jejich bodů. Tyto se budou odvozovati z tečen k původní křivce. Tečny lze konstruovati s dostatečnou pro praxi přibližností pomocí zrcátkového pravítka. Interpolace pomocných křivek byla by usnadněna, kdyby se i k nim daly sestrojovati nějak jednoduše tečny. Bohužel to nejde, poněvadž konstrukce těchto tečen vyžaduje, jak prokážeme alespoň na nejjednodušším případě, znalosti poloměrů křivosti původní křivky.

a) Vztah mezi délkou nějakého oblouku a délkou jeho pravoúhlého průmětu do pomocné osy plyne integrací ze vztahu mezi délkovým prvkem ds oblouku a jeho průmětem ds_1, který jest vyjádřen rovnicí

$$ds = ds_1 \,.\, \sec \alpha,$$

v němž značí α úhel tečny, v níž leží element, s osou, do které se promítá.

Znásobíme-li obě strany uvedené rovnice pomocnou délkou a, nabudou obě významu ploch obdélníkových. Z těch použijeme obdélníku na pravé straně ke konstrukci pomocné křivky. Za jeho základnu považujeme průmět ds_1, kdežto za výšku délku $a \,.\, \sec \alpha$. Sumací takto popsaných obdélníků, jsou-li určeny pro všechny lineární prvky měřeného oblouku, obdrží se plocha omezená pomocnou osou, krajními pořadnicemi vyšetřovaného oblouku a pomocnou křivkou, jejíž pořadnice mají hodnoty $a \,.\, \sec \alpha$. Hodnotu plochy právě popsané označujeme v dalším p a vyhledáme ji planimetrováním.

Svrchu uvedená rovnice změní se po znásobení pomocnou délkou a a po provedení integrace ve tvar

$$a \,.\, s = \int a \,.\, \sec \alpha \,.\, ds$$

a po provedeném planimetrování pomocné plochy vzniká z na rovnice

$$a \,.\, s = p.$$

Z této plyne konečně, že

$$s = \frac{p}{a}.$$

Zvolí-li se pomocná délka a za jednotku míry a čtverec nad ní za jednotku plošné míry, shodne se měrné číslo délky s oblouku s měrným číslem pomocné plochy p. Pro praxi však stačí, měří-li se délka a jakoukoli mírou, jen když se potom plocha p měří čtvercem této míry.

Právě popsaný způsob určení délky oblouku konstrukcí pomocné křivky a měřením plochy jí omezené stává se nezbytným, měří-li se na př. nějaký oblouk na geografické mapě a chce-li se při tom získati hned hodnota oblouku na kulové ploše, k němuž jest onen v mapě obrazem. Jiný takový případ nastává, má-li se z délky převýšeného profilu odvoditi délka správného profilu. Ve všech takových případech vznikají elementy hledaného oblouku jako součiny z elementů oblouku v mapě a z příslušných k nim délkových koeficientů $\varkappa$. Hodnota těchto koeficientů jest proměnlivá s polohou elementu na oblouku v mapě. O způsobech, jak určovati koeficienty $\varkappa$, vykládá se v kartografii, nám postačí předpokládati, že jsou známy jejich hodnoty pro jednotlivé body oblouku v mapě. Hledaný konečný oblouk s jest takto určen rovnicí

$$s = \int \varkappa \,.\, ds.$$

Znázorní-li se koeficient $\varkappa$ délkou k, a to tak, že $k = a \,.\, \varkappa$, kde a značí opět pomocnou délku, dá se poslední rovnice psáti ve tvaru

$$s = \frac{1}{a} \cdot \int k \,.\, ds.$$

Integrál po pravé straně má význam plochy omezené rozvinutým obloukem z mapy a dále pomocnou křivkou, jejíž body jsou vázány k bodům rozvinutého oblouku pořadnicemi v hodnotách k. Poněvadž však jest při tom nutno provésti rozvinutí oblouku z mapy pomocí nějakého křivkoměru a nad to po částech, doporučuje se eliminovati ještě tuto manipulaci prací na pravoúhlém průmětu oblouku do nějaké pomocné osy a postupovati potom podle zprvu vyloženého principu o náhradě délkových měření plošnými. Takto dostáváme pro konečnou hodnotu s oblouku rovnici

$$s = \frac{1}{a} \cdot \int k \,.\, \sec \alpha \,.\, ds_1.$$

V této rovnici značí integrál na pravé straně plochu omezenou pomocnou osou a dále křivkou, jejíž body jsou vázány na body průmětu oblouku z mapy pořadnicemi $k \,.\, \sec \alpha$, při čemž α značí opět úhel mezi tečnou k oblouku v mapě a pomocnou osou. Označíme-li tuto plochu p a vyhledáme-li ji planimetrováním na pomocném grafu, obdržíme hodnotu oblouku s opět podle vzorce

$$s = \frac{p}{a}.$$

Řešení speciální úlohy tohoto druhu podal jsem v článku »Měřítko na geografických mapách.«[1])

Řešením reciproké úlohy, totiž náhradou plošného měření délkovým, zabývá se H. Schwerdtfeger v článku »Integration vermittels des Kurvimeters«.[2]) Metoda jím uváděná není jediná. Z nevýhod, jakými jsou provázeny křivkoměry, jak se o tom již stala zmínka, plyne, že by se náhrada plošných měření délkovými stala teprve tehdy prakticky cennou, kdyby se mohlo délkové měření redukovati na měření úsečky. Případ takový nastává, odvodí-li se na př. k obvodu měřené plochy, pokládanému za křivku derivační, příslušná křivka integrální. Ovšem konstrukce takové křivky má mnoho potíží a tak se uvedený způsob nehodí pro praxi.

b) Lze snadno pověřiti, že v případě prosté náhrady délkového měření plošným, s nímž jsme se zabývali nejprve, jest směrnice tečny k pomocné křivce dána rovnicí

$$\operatorname{tg} \alpha' = \frac{a}{\varrho} \,.\, \operatorname{tg} \alpha \,.\, \sec^2 \alpha,$$

[1]) Sborník Čsl. zeměpisné společnosti, XXXIII, 1927.

[2]) Zeitschrift f. Instrumentenkunde, 47. Jahrg., 1927, str. 544.

v níž značí ϱ poloměr zakřivení původní čáry. Tento poloměr dal by se odvozovati graficky následovně. K dané křivce přiřadila by se ještě další pomocná křivka, a to tak, že k průmětům bodů s oné do pomocné osy příslušely by pořadnice v hodnotách $a \sin \alpha$ bodů na této pomocné křivce. Pro směrnice tečen k posléze uvedené křivce platí rovnice

$$\operatorname{tg} \alpha'' = \frac{a}{\varrho}.$$

Sestrojí-li se tudíž k druhé pomocné křivce tečny, dají se z jejich směrnic odvoditi graficky snadno poloměry zakřivení původní křivky podle rovnice $\varrho = a \cdot \operatorname{cotg} \alpha''$.

2.

V této části budeme se zabývati řešením úlohy, při níž jde o povrch topografické plochy, která jest dána vrstevnicovým plánem. Úloha tato má význam pro některé otázky geografické a byla proto již také několika geografy řešena. Stručně pojednává o tom Dr. J. Cafourek v článku »Určování skutečného areálu topografické plochy.[3]) S matematického hlediska jest mezi nimi nejzajímavější ona, kterou popisuje S. Finsterwalder v práci »Über den mittleren Böschungswinkel u. das wahre Areal einer topographischen Fläche.[4])« Užívá se v ní vztahů mezi středními hodnotami rozličných funkcí téže neodvisle proměnné, jak je odvodil Hölder v práci »Über einen Mittelwertssatz.«[5]) Ač jest Finsterwalderova metoda teoreticky přesná, jest pro praxi jen zhruba přibližná a to velmi podstatnou svou částí, jejíž realisace totiž dá se provésti jen hrubým odhadem.

a) Jeden ze způsobů grafického řešení uvedené úlohy zakládá se na rozšíření principu, jehož jsme užívali v první části této práce. Jde při něm totiž o náhradu určování povrchu topografické plochy měřením objemu tělesa omezeného určitou pomocnou plochou a promítací plochou válcovou, procházející okrajem této plochy a konečně rovinou plánu. Body pomocné plochy jsou přiřazeny k průmětům bodů s topografické plochy v plánu a mají za souřadnice kolmé k průmětně hodnoty $a \cdot \sec \alpha$, při čemž a značí pomocnou délku a α úhel, který svírá tečná rovina k topografické ploše s rovinou plánu. Objem pomocného tělesa určíme pomocí hypsografické křivky. Tato znázorňuje vztah mezi plochami horizontálních křivek na pomocné ploše a jejich výškami nad rovinou plánu. Průměty horizontálních čar na po-

[3]) Sborník Čsl. zeměpisné společnosti. XXVIII, 1922.
[4]) Sitzungsberichte d. k. Akademie d. Wissenschaften in München Natur-phys. Cl., 1890.
[5]) Nachrichten d. Gesellschaft d. Wissenschaften an d. Universität Göttingen, 1889.

mocné ploše do roviny plánu jsou při tom totožny s průměty oněch křivek dané topografické plochy, podél nichž má plocha topografická konstantní sklon. K jejich konstrukci jest zapotřebí určiti na topografické ploše soustavu spádových křivek a tyto čáry rozvinouti s příslušnými k nim promítacími plochami válcovými.

b) Podrobněji chceme se zabývati jiným způsobem. Tento záleží v užití sumace plošných elementů topografické plochy, kterou upravíme vhodně vzhledem ke grafickému charakteru určení této plochy. Omezujeme při tom všude v dalším své vývody pouze na takovou část topografické plochy, která obsahuje toliko jediný vrchol a nemá žádných singularit.

Představíme-li si plochu pokrytu jednak soustavou horizontálních jejích křivek, jednak soustavou jejich orthogonálních trajektorií, totiž spádových křivek, rozložíme ji tím v plošné elementy podoby pravoúhlých čtyřúhelníků. Označujme střední jejich příčky do a ds, při čemž první symbol náleží délkovému elementu na horizontální křivce a druhý elementu na křivce spádové. Plošný element má tedy hodnotu $do \, . \, ds$. Poněvadž průmět plošného prvku do roviny plánu jest opět pravoúhlý a ježto z jeho středních příček se promítáním mění toliko element ve spádové křivce, a to tak, že $ds = ds_1 \, . \sec \alpha$, kdež α jest sklonem prvku na spádové čáře, plyne z toho rovnice

$$do \, . \, ds = do \, . \, ds_1 \, . \sec \alpha .$$

Z této rovnice dostáváme integrací hodnotu P povrchu topografické plochy ve tvaru

$$P = \iint \sec \alpha \, . \, do \, . \, ds_1 ,$$

při čemž integračním oborem jest průmět uvažované části topografické plochy do roviny plánu. Úhel α se mění jak podél čar o, tak i podél čar s.

Zavede-li se do pravé strany poslední rovnice místo prvku ds_1 prvek dv, t. j. vzdálenost rovin dvou soumezných horizontálních čar, mění se tato, poněvadž jest $ds_1 = dv \, . \cotg \alpha$, ve tvar

$$P = \int dv \, . \int \operatorname{cosec} \alpha \, . \, do$$

a ten jest velice vhodný pro grafickou integraci. Úhel α se nyní mění nejprve jen s veličinou o.

Grafická integrace záleží potom v následujícím postupu. K soustavě vrstevnic sestrojí se vhodně hustá soustava spádových křivek. V průsečících obou soustav křivkových sestrojí se úhly sklonu plochy. Užije se k tomu spádových křivek, rozvinutých spolu s jejich promítacími válcovými plochami. Na to se konstruuje soustava pomocných křivek, jejichž body jsou přiřazeny pořadnicemi v hodnotě $a \, . \operatorname{cosec} \alpha$, kde a jest opět pomocnou délkou, k průsečíkům obou soustav křivkových na ploše, jak se objevují na rozvinutých vrstevnicích. Plochy, omezené těmito pomocnými křivkami, dále jejich krajními pořadnicemi a konečně rozvinutou vrstevnicí, jsou hodnotami p integrálů

$$\int a \,.\, \mathrm{cosec}\, \alpha \,.\, do.$$

Označíme-li písmenem O hodnotu integrálu $\int \mathrm{cosec}\, \alpha \,.\, do$, platí že

$$O = \frac{p}{a}.$$

Konečně sestrojí se nová pomocná křivka, jejíž body mají za úsečky souřadnicové hodnoty výšek jednotlivých vrstevnic nad rovinou plánu a za pořadnice hodnoty O nalezené předcházejícími konstrukcemi a planimetrováními pro jednotlivé vrstevnice. Plocha omezená touto křivkou, jejími krajními pořadnicemi a osou výšek udává posléze hledanou hodnotu P pro povrch topografické plochy, neboť

$$P = \int O \,.\, dv = \int dv \,.\, \int \mathrm{cosec}\, \alpha \,.\, do.$$

Pomocná křivka užitá k závěru celého postupu jest zobecněnou křivkou klinografickou. Jednoduchými křivkami klinografickými vyjadřuje se závislost délek horizontálních křivek na jejich výšce. Užívá se jich při rozličných úlohách o topografické ploše. Geometrickými jejich vlastnostmi zabýval se Finsterwalder v citované již práci.

*

Deux problèmes cartométriques.

(Extrait de l'article précédent.)

L'article précédent contient la solution de deux problèmes cartométriques spéciaux qui ont une importance pour la géographie. Le premier s'occupe du remplacement de la mesure d'une longueur par la mesure de l'aire d'une courbe auxiliaire. L'autre problème a pour objet la détermination de l'aire d'une surface topographique qui est donnée par des courbes de niveau. C'est la méthode géométrique graphique que l'on applique dans la solution de ces deux problèmes.

Quant à la mesure des longueurs, l'auteur traite spécialement la détermination de la vraie valeur d'une longueur donnée par son image sur une carte géographique, donc par une image dont chaque élément linéaire est déformé suivant un coëfficient différent.

Le problème de l'aire d'une surface topographique est résolu par l'integration graphique des éléments de surface limités par des courbes de niveau et des courbes de pente et rangés, en général, le long des courbes de niveau.