Alois Strnad

Analytické cvičení o trojúhelníku

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 15 (1886), No. 6, 259--266

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/108901`

Jest tedy výsledek našeho uvažování:

Místo os šroubových pohybů a sice polovičního chodu, jimiž lze přímku do dané mimoběžné polohy převésti, jest rovina k daným přímkám rovnoběžná a vzdálenost těchto půlící; uvažované osy tvoří v rovině této dva systémy přímek rovnoběžných s rovinami, úhly daných přímek kolmo půlících.

Místo toto jest tedy rovnostranný hyperbolický paraboloid, degenerovaný v rovinu.

Analytické cvičení o trojúhelníku.

Napsal

A. Strnad,

professor v Hradci Králové.

Uložili jsme sobě vyšetřiti v článku tomto spůsobem analytickým některé vztahy týkající se trojúhelníka a čtverců sestrojených nad stranami jeho.

1. Dán buď libovolný trojúhelník abc, kterýž základním jmenovati budeme, pravoúhlými souřadnicemi svých vrcholů

$$a(x_1, y_1), \quad b(x_2, y_2), \quad c(x_3, y_3);$$

nad stranami tohoto trojúhelníka vně plochy jeho sestrojme čtverce $abc'c''$, $bca'a''$, $cab'b''$ (obrazec račiž sobě čtenář sám zhotoviti), a označme souřadnice jich vrcholů

$$a'(x'_1, y'_1), \quad b'(x'_2, y'_2), \quad c'(x'_3, y'_3);$$
$$a''(x''_1, y''_1), \quad b''(x''_2, y''_2), \quad c''(x''_3, y''_3).$$

Souřadnice tyto můžeme velmi jednoduše vyjádřiti souřadnicemi vrcholů základního trojúhelníka; jestiť, jak z obrazu *snadně lze poznati*,

$$\begin{array}{lll} x'_1 = x_3 + y_3 - y_2, & x'_2 = x_1 + y_1 - y_3, & x'_2 = x_2 + y_2 - y_1, \\ y'_1 = y_3 + y_2 - x_3, & y'_2 = y_1 + x_3 - x_1, & y'_3 = y_2 + x_1 - x_2, \\ x''_1 = x_2 + y_3 - y_2, & x''_2 = x_3 + y_1 - y_3, & x''_3 = x_1 + y_2 - y_1, \\ y''_1 = y_2 + x_2 - x_3, & y''_2 = y_3 + x_3 - x_1, & y''_3 = y_1 + x_1 - x_2. \end{array}$$

Jak patrno, lze souřadnice bodů a', b', c' jedny z druhých odvoditi cyklickou záměnou ukazatelů; rovněž tak lze učiniti při bodech a'', b'', c''. —

Povšimněme si trojúhelníků $a'b'c'$, $a''b''c''$; ustanovme jich těžiště a ploský obsah. Jelikož jest

$$x_1+x_2+x_3=x'_1+x'_2+x'_3=x''_1+x''_2+x''_3,$$
$$y_1+y_2+y_3=y'_1+y'_2+y'_3=y''_1+y''_2+y''_3,$$
jest zřejmo odtud, *že trojúhelníky abc, a'b'c', a''b''c'' mají společné těžiště.* Plochy těchto tří trojúhelníků označme po řadě $\varDelta$, $\varDelta'$, $\varDelta''$; potom jest
$$2\varDelta'=\begin{vmatrix} x_1+y_1-y_3, & y_1+x_3-x_1, & 1\\ x_2+y_2-y_1, & y_2+x_1-x_2, & 1\\ x_3+y_3-y_2, & y_3+x_2-x_3, & 1\end{vmatrix}.$$
Determinant tento lze však dle známých pravidel takto rozložiti a upraviti:
$$2\varDelta'=\begin{vmatrix} x_1, & y_1, & 1\\ x_2, & y_2, & 1\\ x_3, & y_3, & 1\end{vmatrix}+\begin{vmatrix} x_3-x_1, & y_3-y_1, & 1\\ x_1-x_2, & y_1-y_2, & 1\\ x_2-x_3, & y_2-y_3, & 1\end{vmatrix}$$
$$+\begin{vmatrix} x_1, & x_3-x_1, & 1\\ x_2, & x_1-x_2, & 1\\ x_3, & x_2-x_3, & 1\end{vmatrix}+\begin{vmatrix} y_1, & y_3-y_1, & 1\\ y_2, & y_1-y_2, & 1\\ y_3, & y_2-y_3, & 1\end{vmatrix}.$$
Ve výraze tomto determinant prvý rovná se $2\varDelta$; přičteme-li v determinantu druhém k řádce prvé řádku druhou i třetí, nezmění se tím hodnota jeho, a nabude týž tvaru
$$\begin{vmatrix} 0, & 0, & 3\\ x_1-x_2, & y_1-y_2, & 1\\ x_2-x_3, & y_2-y_3, & 1\end{vmatrix}=3\begin{vmatrix} x_1-x_2, & y_1-y_2\\ x_2-x_3, & y_2-y_3\end{vmatrix}=6\varDelta;$$
determinant třetí a čtvrtý pak zjednodušíme, přičtouce v každém z nich sloupec prvý k druhému, a obdržíme tím výraz
$$\begin{vmatrix} x_1, & x_3, & 1\\ x_2, & x_1, & 1\\ x_3, & x_2, & 1\end{vmatrix}+\begin{vmatrix} y_1, & y_3, & 1\\ y_2, & y_1, & 1\\ y_3. & y_2, & 1\end{vmatrix}$$
$$=\tfrac{1}{2}[(x_1-x_2)^2+(x_2-x_3)^2+(x_3-x_1)^2$$
$$+(y_1-y_2)^2+(y_2-y_3)^2+(y_3-y_1)^2],$$
rovnající se patrně polovici součtu čtverců stran základního trojúhelníka. Označíme-li tyto strany písmenami protějších vrcholů, bude tedy
$$\varDelta'=4\varDelta+\frac{a^2+b^2+c^2}{4}.$$
Ze souměrnosti tohoto výrazu soudíme, že bychom k témuž výsledku dospěli, hledajíce obsah $\varDelta''$ trojúhelníka $a''b''c''$; proto

$\Delta' = \Delta''$: *trojúhelníky $a'b'c'$, $a''b''c''$ určené střídavými vrcholy čtverců jsou si obsahem rovny.*

2. Spojme sousední vrcholy čtverců přímkami $\overline{a'b''}$, $\overline{b'c''}$, $\overline{c'a''}$; tím vzniknou trojúhelníky $ab'c''$, $bc'a''$, $ca'b''$, jichž ploské obsahy označme Δ_1, Δ_2, Δ_3.

Jsou-li α, β, γ vnitřní úhly trojúhelníka abc, jest

$$\Delta_1 = \tfrac{1}{2}\, bc \sin(2R - \alpha) = \Delta$$

a tedy dle obdoby

$$\Delta = \Delta_1 = \Delta_2 = \Delta_3:$$

trojúhelníky $ab'c''$, $bc'a''$, $ca'b''$ jsou rovny obsahem základnímu trojúhelníku abc. Analyticky se o tom přesvědčíme takto:

$$2\Delta_1 = \begin{vmatrix} x_1, & y_1, & 1 \\ x'_2, & y'_2, & 1 \\ x''_3, & y''_3, & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_1, & y_1 & 1 \\ x_1 + y_1 - y_3, & y_1 + x_3 - x_1, & 1 \\ x_1 + y_2 - y_1, & y_1 + x_1 - x_2, & 1 \end{vmatrix};$$

odečteme-li řádku prvou od druhé i třetí, bude

$$2\Delta_1 = \begin{vmatrix} x_1, & y_1, & 1 \\ y_1 - y_3, & x_3 - x_1, & 0 \\ y_2 - y_1, & x_1 - x_2, & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_3 - x_1, & y_3 - y_1 \\ x_1 - x_2, & y_1 - y_2 \end{vmatrix} = 2\Delta.$$

Bez obtíží mohli bychom dokázati, že *těžiště trojúhelníků $ab'c''$, $bc'a''$, $ca'b''$ jsou vrcholy trojúhelníka majícího společné těžiště se základním trojúhelníkem abc.*

Budiž φ úhel, jejž tvoří přímka $\overline{a'b''}$ s kladným směrem osy X; potom jest

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{y'_1 - y''_2}{x'_1 - x''_2} = -\frac{x_1 + x_2 - 2x_3}{y_1 + y_2 - 2y_3} = -\frac{x_0 - x_3}{y_0 - y_3},$$

znamená-li $x_0 = \dfrac{x_1 + x_2}{2}$, $y_0 = \dfrac{y_1 + y_2}{2}$ souřadnice bodu c_0 půlícího délku $\overline{ab}$. Hodnota pro $\operatorname{tg}\varphi$ objevená ukazuje, že jest $\overline{a'b''} \perp \overline{cc_0}$; podobně bude $\overline{b'c''} \perp \overline{aa_0}$, $\overline{c'a''} \perp \overline{bb_0}$, značí-li a_0, b_0 středy stran $\overline{bc}$, $\overline{ca}$. Též délky takových dvou přímek kolmých jsou v jednoduché souvislosti. Pozorujeme-li ku př. délku $\overline{a'b''}$, jejíž krajní body mají souřadnice (x'_1, y'_1), (x''_2, y''_2), tedy jest

$$x''_2 - x'_1 = y_1 + y_2 - 2y_3 = 2(y_0 - y_3)$$
$$y''_2 - y'_1 = -(x_1 + x_2 - 2x_3) = -2(x_0 - x_3)$$

a proto

$$\overline{a'b''} = \sqrt{(x_2'' - x_1')^2 + (y_2'' - y_1')^2} = 2\sqrt{(x_0 - x_3)^2 + (y_0 - y_3)^2}$$
$$= 2 \, . \, \overline{cc_0} \, ;$$

obdobně jest $\overline{b'c''} = 2 \, . \, \overline{aa_0}$, $\overline{c'a''} = 2 \, . \, \overline{bb_0}$, a lze tudíž říci: *Přímka spojující sousední vrcholy dvou čtverců kolma jest ku spojnici společného jich vrcholu se středem protější strany základního trojúhelníka, a jest dvojnásob tak dlouha jako tato spojnice.* —

Vztyčíme-li uprostřed přímky $\overline{a'b''}$ kolmici, bude kolmice tato míti rovnici

$$2x(y_1+y_2-2y_3)-2y(x_1+x_2-2x_3)+(x_1+x_2-2x_3)(x_2-x_1+2y_3)$$
$$+(y_1-y_2-2y_3)(y_2-y_1-2x_3)=0,$$

a kruhovou záměnou ukazatelů obdržíme odtud rovnice kolmic vztyčených uprostřed přímek $\overline{b'c''}$, $\overline{c'a''}$. Součet těchto tří rovnic rovná se identicky nulle; pročež *kolmice vztyčené uprostřed přímek $\overline{a'b''}$, $\overline{b'c''}$, $\overline{c'a''}$ protínají se v bodě jediném.*

3. Středy čtverců nad stranami trojúhelníka abc sestrojených buďtež s_1, s_2, s_3, a jmenujme souřadnice jich

$$s_1\,(\xi_1,\,\eta_1),\quad s_2\,(\xi_2,\,\eta_2),\quad s_3\,(\xi_3,\,\eta_3).$$

Patrně jest

$$\xi_1 = \frac{x_2 + x_1'}{2} = \frac{x_3 + x_1''}{2} = \frac{x_2 + x_3 + y_3 - y_2}{2}$$

$$\eta_1 = \frac{y_2 + y_1'}{2} = \frac{y_3 + y_1''}{2} = \frac{y_2 + x_3 + x_2 - x_3}{2},$$

a z toho plyne cyklickou permutací ukazatelů

$$\xi_2 = \frac{x_3 + x_1 + y_1 - y_3}{2}, \quad \eta_2 = \frac{y_3 + y_1 + x_3 - x_1}{2},$$

$$\xi_3 = \frac{x_1 + x_2 + y_2 - y_1}{2}, \quad \eta_3 = \frac{y_1 + y_2 + x_1 - x_2}{2}.$$

Jelikož jest

$$\xi_1 + \xi_2 + \xi_3 = x_1 + x_2 + x_3, \quad \eta_1 + \eta_2 + \eta_3 = y_1 + y_2 + y_3,$$

mají trojúhelníky abc, $s_1s_2s_3$ společné těžiště.

Ustanovme také obsah trojúhelníka určeného středy čtverců, $s_1s_2s_3 = \Delta_s$. Jestiť

$$2\Delta_s = \begin{vmatrix} \xi_1, & \eta_1, & 1 \\ \xi_2, & \eta_2, & 1 \\ \xi_3, & \eta_3, & 1 \end{vmatrix}$$

čili po snadné přeměně

$$8\Delta_s = \begin{vmatrix} x_1 + x_2 + y_2 - y_1, & y_1 + y_2 + x_1 - x_2, & 1 \\ x_2 + x_3 + y_3 - y_2, & y_2 + y_3 + x_2 - x_3, & 1 \\ x_3 + x_1 + y_1 - y_3, & y_3 + y_1 + x_3 - x_1, & 1 \end{vmatrix}.$$

Hodnota determinantu tohoto se nezmění, přičteme-li k sloupci prvému sloupec druhý; bude pak po zkrácení 2ma

$$4\Delta_s = \begin{vmatrix} x_1 + y_2, & y_1 + y_2 + x_1 - x_2, & 1 \\ x_2 + y_3, & y_2 + y_3 + x_2 - x_3, & 1 \\ x_3 + y_1, & y_3 + y_1 + x_3 - x_1, & 1 \end{vmatrix}.$$

Odečteme nyní od sloupce druhého sloupce prvý a obdržíme

$$4\Delta_s = \begin{vmatrix} x_1 + y_2, & y_1 - x_2, & 1 \\ x_2 + y_3, & y_2 - x_3, & 1 \\ x_3 + y_1, & y_3 - x_1, & 1 \end{vmatrix},$$

odkud rozkladem následuje

$$4\Delta_s = \begin{vmatrix} x_1, & y_1, & 1 \\ x_2, & y_2, & 1 \\ x_2, & y_3, & 1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} y_2, & x_2, & 1 \\ y_3, & x_3, & 1 \\ y_1, & x_1, & 1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} x_1, & x_2, & 1 \\ x_2, & x_3, & 1 \\ x_3, & x_1, & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} y_2, & y_1, & 1 \\ y_3, & y_2, & 1 \\ y_1, & y_3, & 1 \end{vmatrix}$$

$$= 2\begin{vmatrix} x_1, & y_1, & 1 \\ x_2, & y_2, & 1 \\ x_3, & y_3, & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_2, & x_1, & 1 \\ x_3, & x_2, & 1 \\ x_1, & x_3, & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} y_2, & y_1, & 1 \\ y_3, & y_2, & 1 \\ y_1, & y_3, & 1 \end{vmatrix}.$$

Hledíce k významu těchto determinantů, vysvětlenému již v odstavci 1., můžeme psáti

$$4\Delta_s = 4\Delta + \frac{a^2 + b^2 + c^2}{2},$$

a tudíž

$$\Delta_s = \Delta + \frac{a^2 + b^2 + c^2}{8};$$

srovnávajíce pak tento výsledek s konečným vzorcem odstavce 1., přijdeme k zajímavé relaci

$$\Delta + \Delta_s = \tfrac{1}{2}\Delta'.$$

Z rovnic dříve vyvozených vyplývá

$$\xi_1 - \xi_2 = \tfrac{1}{2}(2y_3 - y_1 - y_2 + x_2 - x_1) = y_3 - \eta_3$$

$$\eta_1 - \eta_2 = -\tfrac{1}{2}(2x_3 - x_1 - x_2 + y_2 - y_1) = -(x_3 - \xi_3),$$

a obdobně lze vyjádřiti rozdíly $\xi_2 - \xi_3$ a t. d. Z toho lze souditi o poloze i délce stran trojúhelníka $s_1 s_2 s_3$. Jest totiž

$$\frac{\eta_1 - \eta_2}{\xi_1 - \xi_2} = -\frac{x_3 - \xi_3}{y_3 - \eta_3},$$

a proto $\overline{s_1 s_2} \perp \overline{c s_3}$; dle obdoby jest pak též $\overline{s_2 s_3} \perp \overline{a s_1}$, $\overline{s_3 s_1} \perp \overline{b s_2}$. Jsou tedy přímky $\overline{a s_1}$, $\overline{b s_2}$, $\overline{c s_3}$ výškami v trojúhelníku $s_1 s_2 s_3$, a mají proto společný průsečík. Mimo to jest

$$(\xi_1 - \xi_2)^2 + (\eta_1 - \eta_2)^2 = (x_3 - \xi_3)^2 + (y_3 - \eta_3)^2,$$

a tedy $\overline{s_1 s_2} = \overline{c s_3}$, $\overline{s_2 s_3} = \overline{a s_1}$ $\overline{s_3 s_1} = \overline{b s_2}$. Tyto výsledky zahrneme větou: *Přímky spojující vrcholy trojúhelníka se středy čtverců sestrojených nad stranami jeho protínají se v jediném bodě, jsou kolmy ku stranám trojúhelníka těmito středy určeného a každá rovná se délkou příslušné straně.* Odtud bezprostředně plyne jednoduché a elegantní řešení úlohy: *Stanoviti trojúhelník, dány-li jsou středy čtverců sestrojených nad stranami jeho.*

4. Připojíme k úvahám předešlým ještě některé, založené na užití souřadnic stejnoměrných. Zvolme strany základního trojúhelníka osami soustavy souřadnic stejnoměrných, pokládajíce souřadnicemi bodu v rovině daného vzdálenosti od těchto tří stran. Budiž tedy $\overline{bc} \equiv \mathrm{X}$, $\overline{ca} \equiv \mathrm{Y}$, $\overline{ab} \equiv \mathrm{Z}$; vzdálenosti bodu od stran těchto označme x, y, z, a přisuzujme souřadnicím těmto znaménko $\pm$ tím spůsobem, aby body, ležící na téže straně osy jako protější vrchol trojúhelníka, měly příslušnou souřadnici kladnou. Tak ku př. budou míti všechny body ležící s bodem a na téže straně osy X souřadnici x kladnou, na opačné straně zápornou. Za těchto podmínek vyhovují souřadnice libovolného bodu rovnici

$$ax + by + cz = 2\Delta.$$

Ustanovme rovnice oněch stran čtverců, které jsou rovnoběžny ku stranám trojúhelníka základního. Přímka $\overline{a'a''} \equiv \mathrm{A}$ bude míti rovnici $x + a = 0$, které dáme podobu stejnoměrnou, násobíce ji 2Δ,

$$2\Delta x + a\,(ax + by + cz) = 0.$$

Učiníme-li týmž spůsobem u přímek $\overline{b'b''} \equiv \mathrm{B}$, $\overline{c'c''} \equiv \mathrm{C}$, můžeme rovnice těchto stran psáti:

$$\begin{aligned} \mathrm{A} &\equiv (a^2 + 2\Delta)\, x + aby + acz = 0 \\ \mathrm{B} &\equiv abx + (b^2 + 2\Delta) y + bcz = 0 \\ \mathrm{C} &\equiv acx + bcy + (c^2 + 2\Delta)\, z = 0. \end{aligned}$$

Strany tyto náležitě prodlouženy omezují trojúhelník $a^* b^* c^*$, jehož obsah budiž $\varDelta^*$. Tento vyšetříme užitím známého vzorce*) následovně:

$$\varDelta^* = \frac{\varDelta \,.\, abc \begin{vmatrix} a^2+2\varDelta, & ab, & ac \\ ab, & b^2+2\varDelta, & bc \\ ac, & bc, & c^2+2\varDelta \end{vmatrix}^2}{\begin{vmatrix} a^2+2\varDelta, & ab, & ac \\ ab, & b^2+2\varDelta, & bc \\ a, & b, & c \end{vmatrix} . \begin{vmatrix} ab, & b^2+2\varDelta, & bc \\ ac, & bc & c^2+2\varDelta \\ a, & b, & c \end{vmatrix} . \begin{vmatrix} ac, & bc, & c^2+2\varDelta \\ a^2+2\varDelta, & ab, & ac \\ a & b, & c \end{vmatrix}}$$

Z prvého determinantu ve jmenovateli možno vyjmouti činitele c, ze druhého a, ze třetího b, a zkrátiti pak zlomek součinem abc.

Determinant v čítateli se vyskytující lze takto přetvořiti:

$$\begin{vmatrix} a^2+2\varDelta, & ab, & ac \\ ab, & b^2+2\varDelta, & bc \\ ac, & bc, & c^2+2\varDelta \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a^2, & 0, & 0 \\ ab, & 2\varDelta, & 0 \\ ac, & 0, & 2\varDelta \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2\varDelta, & ab, & 0 \\ 0, & b^2, & 0 \\ 0, & bc, & 2\varDelta \end{vmatrix}$$

$$+ \begin{vmatrix} 2\varDelta, & 0, & ac \\ 0, & 2\varDelta, & bc \\ 0, & 0, & c^2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2\varDelta, & 0, & 0 \\ 0, & 2\varDelta, & 0 \\ 0, & 0, & 2\varDelta \end{vmatrix},$$

načež vyčíslením objeví se hodnota

$$4a^2\varDelta^2 + 4b^2\varDelta^2 + 4c^2\varDelta^2 + 8\varDelta^3 = 4\varDelta^2 (a^2 + b^2 + c^2 + 2\varDelta).$$

Zkrácený prvý determinant jmenovatele jest

$$\begin{vmatrix} a^2+2\varDelta, & ab, & a \\ ab, & b^2+2\varDelta, & b \\ a, & b, & 1 \end{vmatrix} = 4\varDelta^2,$$

a tutéž hodnotu mají ostatní dva determinanty.

Proto bude po náležitém zjednodušení

$$\varDelta^* = \frac{(a^2+b^2+c^2+2\varDelta)^2}{4\varDelta}.$$

Trojúhelník $a^*b^*c^*$ maje strany rovnoběžné ku stranám trojúhelníka abc, jest tomuto podoben a podobně položen; přímky aa^*, bb^*, cc^* budou se tudíž protínati v jediném bodě k, příslušném středu podobnosti. To lze analyticky snadně stvrditi a zároveň souřadnice bodu k vyšetřiti. Jsou totiž souřadnice bodu a^* tyto: $y = -b$, $z = -c$, a tedy rovnice přímky $\overline{aa^*} \equiv cy - bz = 0$; podobné budou rovnice druhých dvou přímek

*) *Salmon-Fiedler*, Analyt. Geometrie der Kegelschnitte, II. Aufl. p. 92.

$\overline{bb^*} \equiv az - cx = 0$, $\overline{cc^*} \equiv bx - ay = 0$. Znásobíme-li prvou z těchto tří rovnic hodnotou a, druhou b, třetí c, jest součet takto znásobených rovnic totožně roven nulle, a tedy přímky ony mají společný průsečík k. Souřadnice bodu tohoto vypočítáme z rovnic posledních a z rovnice $ax + by + cz = 2\Delta$; obdržíme tím

$$x = \frac{2a\Delta}{a^2 + b^2 + c^2}, \; y = \frac{2b\Delta}{a^2 + b^2 + c^2}, \; z = \frac{2c\Delta}{a^2 + b^2 + c^2}.$$

Ježto jest $x : y : z = a : b : c$, t. j. *vzdálenosti bodu k od stran základního trojúhelníka jsou úměrny délkám těchto stran*, poznáváme bod k jakožto *bod Lemoineův* či *Grebeův* v trojúhelníku abc, o kterémž význačném bodě jsme v tomto ročníku „Časopisu" našeho na str. 27. promluvili. Dodatečně připomínáme, že pojednání Grebeovo o tomto bodě nalezá se v VII. díle archivu Grunertova.

Když článek tento již vysázen byl, dověděl se pisatel jeho z letošního únorového čísla časopisu *Mathesis*, že o tvaru zde vyšetřovaném pojednáno bylo v I. ročníku onoho časopisu na str. 93. a ve IV. díle *Nouvelle correspondance mathématique*, str. 142., kterých však si opatřiti nemohl, aby je s prací svou srovnal. Větu vyslovenou ku konci 3. odstavce uveřejnil ve formě úlohy *Fuhrmann* v Hoffmannově *„Zeitschrift für math. und naturw. Unterricht,"* XIII. Jahrg. p. 365.

O Steinerových parabolách souosých osnov konfokálních kuželoseček.

Napsal

Václav Tlučhoř v Jičíně.

Značí-li o, o_1 ohniska a m střed osnovy O konfokálních kuželoseček, obalují, jak známo, veškeré přímky, které ku jednotlivým prvkům v rovině osnovy ležícího svazku paprsků s libovolným středem s, vzhledem k této osnově sdružené jsou, tak zvanou Steiner-ovu parabolu P_s, která se os A, B osnovy O, jakož i os N, N_1 involučního svazku s — jakožto zvláštních poloh