Dělíme-li tuto rovnici postupně všemi třemi původními obdržíme

$$c = M \sin \gamma,\ b = M \sin \beta,\ a = M \sin \alpha,$$

z čehož

$$2s = a + b + c = M(\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma) = 4M \cos\frac{\alpha}{2} \cos\frac{\beta}{2} \cos\frac{\gamma}{2}$$

$$2(s-a) = -a+b+c = M(-\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma) = 4M\cos\frac{\alpha}{2} \sin\frac{\beta}{2} \sin\frac{\gamma}{2}$$

$$2(s-b) = a-b+c = M(\sin\alpha - \sin\beta + \sin\gamma) = 4M \sin\frac{\alpha}{2} \cos\frac{\beta}{2} \sin\frac{\gamma}{2}$$

$$2(s-c) = a+b-c = M(\sin\alpha + \sin\beta - \sin\gamma) = 4M \sin\frac{\alpha}{2} \sin\frac{\beta}{2} \cos\frac{\gamma}{2}.$$

Znásobením těchto rovnic a dosazením hodnoty za M, při čemž užijeme ještě vztahu

$$\sin\chi = 2 \sin\frac{\chi}{2} \cos\frac{\chi}{2},$$

nabudeme známého vzorce

$$\Delta = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}. \qquad (5)$$

Drobné zprávy.

Napsal

A. Strnad,

professor v Hradci Králové.

Z nauky o číslech. Dle *Legendre-a* značí E (x) celistvou část realné hodnoty x (l'entier contenu dans x); jest tedy ku př. $E\sqrt{10} = 3$. Vlastnostmi tohoto úkonu mnoho se zabýval *Buňakovský*, uveřejniv ve spisech akademie petrohradské řadu článků: „Démonstration de quelques propositions relatives à la fonction numérique E (x)." V článku jednom vyšetřil důmyslnými úvahami hodnotu výrazu $\sum\limits_{u=1}^{u=N} E\sqrt[r]{u}$.

Při $r = 2$ jest, položíme-li $n = E\sqrt{N} - 1$,

$$U = \sum_{u=1}^{u=N} E\sqrt{u} = \frac{(n+1)(6N - 2n^2 - 7n)}{6};$$

ku př. $E\sqrt{1} + E\sqrt{2} + E\sqrt{3} + \ldots + E\sqrt{20} = 54$ $(N = 20, n = 3)$.

Ve zvláštních případech může hodnota U býti číslo kmenné. Může se to státi jen při $n = 1, 2, 5$ a jest případů takových celkem 13, totiž:

$N = 4, 5, 7, 10, 14, 36, 37, 39, 42, 43, 44, 46, 47;$
$U = 5, 7, 11, 19, 31, 131, 137, 149, 167, 173, 179, 191, 197.$

Značí-li $n = E\sqrt[3]{N} - 1$, jest

$$\sum_{u=1}^{u=N} E\sqrt[3]{u} = \frac{n(n+1)^2(3n+1)}{4} + (n+1)\,[N+1-(n+1)^3];$$

v případě obecném, klademe-li $n = C\sqrt[r]{N} - 1$, bude

$$\sum_{u=1}^{u=N} E\sqrt[r]{u} = \sum_{1}^{n}[n((n+1)^r - n^r)] + (n+1)[N+1-(n+1)^r].$$

(Bulletin de l'Académie Impériale des Sciences de Saint-Pétersbourg. Tome XXIX. p. 250).

Dva nové význačné body trojúhelníka. Pokračováním ku zprávě obsažené na str. 27. podáváme tuto některé další vlastnosti trojúhelníka, přidržujíce se označení tam užitého.

Hledáme-li geometrické místo bodu m té vlastnosti, že kolmice spuštěné s vrcholů a, b, c daného trojúhelníka ku přímkám mb, mc, ma mají společný průsečík m', objeví se tímto místem určitá kuželosečka M; geom. místem bodu m' jest pak jiná kuželosečka M'. Obě křivky mají mimo a, b, c ještě čtvrtý společný bod n; týž vyznačuje se mnohými zvláštnostmi, které vyšetřovali *Tarry, Brocard a Neuberg*. Bod tento jest průsečíkem kružnice K o $\triangle\, abc$ opsané s hyperbolou pravoúhlou H, která prochází vrcholy tohoto trojúhelníka, průsečíkem h' výšek jeho a těžištěm e. V něm též protínají se kolmice vedené body a, b, c k příslušným stranám trojúhelníka Brocardova $a'b'c'$, jakož i přímky ah, $a'h'$, ez (z značí střed kružnice Brocardovy). Stanovíme-li bodem n kolmice k stranám trojúhelníka abc, obdržíme celkem 9 průsečíků ležících po třech ve třech přímkách.

Kolmice sestrojené body b, a, c ku přímkám na, nb, nc protínají se v bodě r, kolmice spuštěné k týmž přímkám s vrcholů c, a, b mají společný bod r', a kolmice vztýčené v bodech a, b, c k přímkám oněm procházející bodem r''. Trojúhelníky abc, $rr'r''$ mají společné těžiště e, které jest zároveň středem ellipsy opsané oběma trojúhelníkům. Bod r jest průsečíkem kružnic oskulačních stanovených k této ellipse v bodech a, b, c; leží také na kružnici K, jejímž jest přímka nr průměrem.

Na místě, z něhož toto čerpáme, nazýván jest bod n *bodem Tarryovým*, r pak *bodem Steinerovým*. (*Mathesis, t. V. p. 258; t. VI. p. 5*).

O čtyrstěnu. *Neuberg*, professor na universitě v Lutichu a spoluredaktor časopisu „Mathesis", rozšířil vzhledem ku čtyrstěnu některé vlastnosti trojúhelníka, které jsme ve drobných zprávách na str. 26. a 128. sestavili. Sdělíme tuto některé pozoruhodné výsledky jeho úvah, obsažených ve spise *Mémoire sur le tétraèdre*. Dány-li jsou dvě roviny R a S, tvořící dvojstěn o hraně P, a mimo ně bod m, určující s přímkou P rovinu T; položíme-li potom přímkou P rovinu U tak, aby rovina půlící úhel (RS) půlila též úhel (TU): slove rovina U stejnoúhle polárnou rovinou bodu m vzhledem ku dvojstěnu RS (*plan polaire isogonal*).

Předpokládejme libovolný čtyrstěn a bod m; stejnoúhle polárné roviny bodu tohoto vzhledem ku šesti dvojstěnům daného čtyrstěnu mají společný bod n, jehož vzdálenosti od stěn jsou obráceně úměrny se vzdálenostmi bodu m od týchž stěn. Paty kolmic spuštěných s bodů m a n na tyto stěny náleží téže ploše kulové mající střed v bodě půlícím mn; body m a n jsou ohniska rotační plochy 2. stupně, dotýkající se stěn daného čtyrstěnu. Takto k sobě příslušné body m a n nazývá *Neuberg body stejnoúhle sdruženými (points conjugués isogonaux)*. Přiřadíme-li tímto způsobem ke každému bodu m libovolné plochy P příslušný bod n, bude geom. místem bodu n nová plocha Q; ve zvláštních případech mohou se obě plochy sjednotiti a tvoří pak plochu vzhledem ku čtyrstěnu stejnoúhle anallagmatickou.

Jsou-li a_1 a_2 a_3 a_4 vrcholy čtyrstěnu, j_1 j_2 j_3 j_4 body, v nichž se stěn jeho uvnitř dotýkají plochy kulové vně dotyčné; tu každá plocha 2. stupně procházející 7mi z těchto bodů prochází též bodem osmým a jest stejnoúhle anallagmatickou.

Stanovíme-li uvnitř čtyrstěnu bod l, jehož vzdálenosti od stěn jsou úměrny s jich ploskými obsahy, jest bod tento obdobou bodu Lemoineova v trojúhelníku. Součet zčtvercovaných vzdáleností bodu l od stěn čtyrstěnu jest minimum; rovina položená bodem tím a hranou čtyrstěnu dělí protější hranu ve čtverečném poměru ploch sbíhajících se v oné hraně. Bod l jest stejnoúhle sdružen s těžištěm čtyrstěnu daného a jest těžištěm čtyrstěnu, jehož vrcholy jsou paty kolmic spuštěných s něho ku stěnám původního.

Na místě tří příček trojúhelníka, které procházejíce vrcholy jeho sbíhají se v bodě jediném, nastupují při obdobném vyšetřování čtyrstěnu obyčejně 4 přímky, tvořící tak zvanou čtveřinu hyperboloidickou *(quadruple hyperboloïdique)*. Jsou to takové 4 mimoběžky, které jsou čtyřmi přímkami téže soustavy na hyperboloidu; každá přímka protínající tři z nich protíná též čtvrtou. Nejjednodušším známým příkladem takové čtveřiny jsou výšky libovolného čtyrstěnu; *Neuberg* shledal takovými též přímky spojující vrcholy čtyrstěnu se středy kružnic vepsaných stěnám protějším, s body Lemoineovými těchto stěn, s dotyčnými body stěn a koule vepsané, s dotyčnými body j_1 j_2 j_3 j_4 dříve jmenovanými, s vrcholy čtyrstěnu omezeného rovinami tečnými sestrojenými ve vrcholech čtyrstěnu daného ke kouli jemu opsané a t. d.

Tvoří-li kolmice jdoucí vrcholy jednoho čtyrstěnu ku stěnám jiného čtyrstěnu čtveřinu hyperboloidickou, jsou takovými též kolmice stanovené vrcholy druhého ku stěnám prvého. Zajímavá tato věta jest zobecněním známé *věty Steinerovy:* Protínají-li se v jediném bodě kolmice jdoucí vrcholy jednoho čtyrstěnu ku stěnám čtyrstěnu jiného, mají též společný průsečík kolmice spuštěné s vrcholů druhého k stěnám prvého. — Dalším předmětem úvah citovaného pojednání jsou některé zvláštní druhy čtyrstěnů; obmezeností místa jsme nuceni přestati na podaných ukázkách z obsažné práce belgického autora. *(Mémoires de l'Académie royale de Belgique. Tome XXXVII. 1884).*

Záměna pohybu kruhového v pohyb přímý. Tato důležitá úloha mechaniky řešena jest různými způsoby, z nichž nejznámější jest *rovnoběžník Wattův.* Týž neposkytuje sice přesné řešení, ježto vzniká pomocí něho místo dráhy přímé křivka mající podobu velmi táhlé osmičky (courbe à longue inflexion dle Hachettea);

v praxi však lze pohybem takovým velmi přibližně nahraditi pohyb přímý. Má-li čtyrúhelník $abcd$ strany stálé délky, je-li dále $\overline{ad} = \overline{bc}$, a jsou-li vrcholy a, b pevny, opisuje střed strany cd křivku Wattovu. Na základě této věty ukázal *Catalan* ještě jiné způsoby, jimiž křivka tato vzniknouti může. *(Mathesis, tome V. p. 154. 222).*

Se stanoviska theoretického velmi dokonalé řešení podává *rovnoběžník Peaucellierův*. Důmyslné toto užití transformace převratnými průvodiči záleží v následujícím: K vrcholům proměnného kosočtverce $abcd$, jehož strany mají však stálou délku n, připojeny dvě stejné tyče $\overline{ae} = \overline{ce} = m$, mimo to pak tyč df rovná délkou m. Body ef jsou pevné a mají též vzdálenost m; za těchto podmínek jest vždy $\overline{eb} \,.\, \overline{ed} = m^2 - n^2 = \text{const.}$ Vrchol d nucen jest při pohybu soustavy opisovati kružnici středu f a jdoucí skrz e; bod b pohybuje se pak ve dráze přímé P kolmé ku ef.

Závislost rychlosti úhlové ω, kterou se děje otáčení kolem f a rychlosti V, jakou pohybuje se vrchol b po P, vyjádřil *d'Ocagne* vzorcem

$$V = \omega \,.\, \overline{bp} = \omega \,.\, \overline{bq}.$$

Bod p jest průsečík přímky ef s $bp \parallel df$, bod q určen tak, že jest $bq \parallel ef$, $aq \parallel df$. Geometrické místo bodu q jest parabola ohniska e a řídící přímky P. *(Nouvelles annales de mathématiques, 1884. p. 199).*

Posléze zabýval se řešením svrchu udané úlohy též znamenitý mathematik ruský *Čebyšev*. Týž předpokládá dva trojúhelníky abc, abm rovnoramenné, jichž společná strana $\overline{ab} = \overline{ac} = \overline{am}$. Jsou-li tyto tři délky a mimo ně též $\overline{bm}$ stálé, opisuje-li pak bod a kružnici středu e a bod b kružnici středu c_1 ležícího v původní poloze proměnné strany bc, vytvořuje vrchol m křivku souměrnou k původní poloze cm. Může-li b vykonati úplné otočení, jest dráha bodu m křivkou uzavřenou. Čebyšev ustanovil podmínky, za kterých dráha tato blíží se pokud možno nejvíce dráze kruhové nebo přímé.

(Bulletin de la société mathématique de France. Tome XII. p. 179).

Involuce vyšších tříd. Důležitou částí moderní geometrie jest theorie involucí vyšších stupňů.*) Jedním z nejhorlivějších pěstitelů jejích jest slovutný náš geometr prof. *Dr. Emil Weyr*, který již r. 1870 vyšetřoval involuce n-ho stupně ve spise: *„Die Erzeugung algebraischer Curven durch mehrdeutige Elementargebilde“*, a r. 1874 specielně zpracoval *„Grundzüge einer Theorie der cubischen Involutionen“*. (Oba spisy vyšly v pojednáních král. české společnosti nauk). Později obrátil pozornost svou k involucím obecnějším, pojednav r. 1879 v zasedacích zprávách akademie vídeňské *„Über Involutionen n-ten Grades und k-ter Stufe.“* K jich důležitosti poukázal také ve své přednášce na I. sjezdu českých lékařů a přírodozpytců v Praze r. 1880, podav tuto obecnou definici:

„Racionální soustava n-prvkových skupin, z kterých každá úplně určena jest k libovolně zvolenými prvky, zove se involucé n-tého stupně a k-té třídy.“ (Oznamovatel I. sjezdu, str. 15.)

Četnými pracemi o předmětu tomto v různých vědeckých sbornících uveřejněnými stal se prof. Weyr jedním z tvůrců theorie involucí tříd vyšších. Vedle proslulého učence našeho zabýval se naukami těmi *Dr. Le Paige*, prof. na universitě v Lutichu. Učinil tak poprvé v *„Mémoire sur quelques applications de la théorie des formes algébriques à la géométrie“* (Mémoires de l'académie royale de Belgique, tome XLII) a pak ve mnohých jiných statích; některé z nich uveřejněny v pojednáních naší učené společnosti, jejímž je výborný učenec belgický členem dopisujícím.

Týž sestavil v poslední době nejhlavnější základy z theorie involucí vyšších tříd v pěkném článku v Teixeirově „Jornal de sciencias mathematicas e astronomicas“ (vol. V. p. 77. a násl.); pojednání to opírá se místy o práce Weyrovy, které mnohokráte cituje.

Vycházeje z geometrické definice, dokazuje, že J^n_k určena jest $(k+1)$ skupinami n-prvkovými, a podává pak tuto definici algebraickou: Jsou-li

$$f_0 = 0,\ f_1 = 0,\ f_2 = 0, \ldots, f_k = 0$$

*) Viz: *Cremona-Weyr*, Úvod do geometrické theorie křivek rovinných, str. 25.

rovnice $(k+1)$ skupin n-prvkových, vyjadřuje rovnice

$$f_0+\lambda_1 f_1+\lambda_2 f_2+\ldots\ldots\lambda_k f_k=0$$

involuci J_k^n stupně n-ho a třídy k-té.

Odtud plynou mnohé výsledky o skupinách neutrálných, o počtu bodů násobných, o involucích sdružených a soumístných, o Weyrových křivkách a plochách involuce a t. d.

Konečně připojena některá použití této theorie, vztahující se hlavně ku křivkám a plochám stupně třetího. Tak ku př. řešeny úlohy: Sestrojiti plochu stupně třetího, která jest určena třemi přímkami a sedmi body, jednou přímkou a 15ti body, aneb 19ti body. Zajímavé jest toto vytvoření plochy 3-ho stupně: Tři stěny čtyrstěnu otáčejí se kolem tří mimoběžných os X, Y, Z, čtvrtá stěna dotýká se plochy 2. stupně Σ_2, hrany v této stěně ležící zůstávají různoběžny ke třem hranám trojhranu P dotýkajícího se Σ_2; vrchol této stěně protilehlý vytvořuje plochu stupně 3-ho, obsahující přímky X, Y, Z i hrany trojhranu P.

Deset bodů plochy 2. stupně vyznačuje se vlastnostmi obdobnými s onou, kterou o šesti bodech kuželosečky vyjadřuje věta Pascalova. V příčině té objevil *Petot* platnost těchto dvou vět:

Náleží-li body $a_1 a_2 \ldots . a_{10}$ ploše 2. stupně a jsou-li P, P′ dvě plochy 2. stupně sdružené vzhledem ke čtyrstěnu $a_1 a_2 a_3 a_4$, protínají se roviny polárné ostatních šesti bodů $a_5 a_6 \ldots a_{10}$ stanovené vzhledem k plochám P, P′ v šesti přímkách určitého komplexu prvého stupně.

Stanovíme-li bodem a_4 rovinu libovolnou R a dvě libovolné přímky P, Q, můžeme každému bodu m v prostoru danému přidružiti přímku M, která jest průsečnicí roviny určené přímkou (R, $a_1 a_3 m$) a bodem (P, $a_1 a_2 m$) s rovinou určenou přímkou (R, $a_2 a_3 m$) a bodem (Q, $a_1 a_2 m$). Šest přímek příslušných tímto způsobem k bodům a_5, $a_6 \ldots a_{10}$ náleží témuž komplexu prvého stupně.

Věty této lze užiti k sestrojení bodů společných dané přímce a ploše 2. stupně určené devíti body.

(Comptes rendus; tome XCVIII. p. 726).