Úlohy

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 15 (1886), No. 6, 282--289

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/108896

Úlohy.

Řešení úlohy 19.

(Zaslal pan *V. Bartoň*, stud. VII. tř. r. v Hradci Králové.)

Budiž $\frac{P_n}{Q_n}$ n-tá sblížená hodnota hledaného řetězce; žádáme, aby bylo $P_n = Q_{n-2}$. Jak známo, jest

$$P_n = a_n P_{n-1} + P_{n-2},\quad Q_n = a_n Q_{n-1} + Q_{n-2},$$

značí-li a_n jmenovatele n-ho článku. I bude tedy dle vzorců uvedených a dle podmínky dané

$$Q_{n-2} = a_n Q_{n-3} + Q_{n-4},\quad Q_{n-2} = a_{n-2} Q_{n-3} + Q_{n-4},$$

z čehož vyplývá $a_n = a_{n-2}$, ale jen pro $n > 3$; neboť s tímto omezením platí poslední dvě rovnice.

Proto bude

$$a_2 = a_4 = a_6 = \ldots,\quad a_3 = a_5 = a_7 = \ldots$$

a hledaný řetězec má podobu

$$\cfrac{1}{a + \cfrac{1}{b + \cfrac{1}{c + \cfrac{1}{b + \cfrac{1}{c + \ldots \text{ in inf.}}}}}}$$

Avšak perioda b, c není libovolná; ustanovíme-li totiž sblížené hodnoty tohoto řetězce, bude

$$Q_1 = a,\quad Q_2 = ab + 1,\quad P_3 = bc + 1,\quad P_4 = b^2c + 2b,$$

a z podmínek $Q_1 = P_3$, $Q_2 = P_4$ vypočítáme

$$b = 1,\quad c = a - 1.$$

Jmenovatel a jest libovolný; neboť dosazením hodnot b, c do podmínky $Q_3 = P_5$ přišli bychom k rovnici identické. Protož jest hledaný řetězec:

$$\cfrac{1}{a + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{a - 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{a - 1 + \ldots \text{ in inf.}}}}}}$$

Správné řešení zaslali pp.: *Karel Novák* ze VII. tř. g. v Hradci Králové, *Bohuš Mašek* ze VII. tř. g. na Novém Městě v Praze a *Jan Andres* ze VII tř. g. městského r. g. na Malé Straně v Praze.

Řešení úlohy 20.

(Podal p. *Boh. Müller*, stud. VII. tř. r. městského r. g. na Malé Straně v Praze.)

Dle rovnice dané jest

$$\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta + \operatorname{tg}\gamma = -a,$$
$$\operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\beta + \operatorname{tg}\beta \operatorname{tg}\gamma + \operatorname{tg}\gamma \operatorname{tg}\alpha = b$$
$$\operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\beta \operatorname{tg}\gamma = -c;$$

mimo to známo, že

$$\operatorname{tg}(\alpha+\beta+\gamma) = \frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta + \operatorname{tg}\gamma - \operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\beta \operatorname{tg}\gamma}{1-(\operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\beta + \operatorname{tg}\beta \operatorname{tg}\gamma + \operatorname{tg}\gamma \operatorname{tg}\alpha)},$$

a proto v případě uvažovaném

$$\operatorname{tg}(\alpha+\beta+\gamma) = \frac{c-a}{1-b}.$$

Při podmínce $a = c$ jest tedy $\alpha+\beta+\gamma = 2n\mathrm{R}$, a při $b = 1$ jest $\alpha+\beta+\gamma = (2n+1)\,\mathrm{R}$.

Správné řešení zaslali pp.: *Boh. Mašek* ze VII. tř. g. na Novém Městě v Praze, *Karel Petr* ze VI. tř. g., *Ant. Pleskot* z VIII. tř. v Chrudimi a *Ant. Radešínský* ze VII tř. g. v Litomyšli.

Řešení úlohy 21.

(Zaslal p *Ant. Radešínský*, stud. VII. tř. g. v Litomyšli)

Značí-li a, b, c délky stran trojúhelníka, jest

$$a+b+c = -m$$
$$ab+bc+ca = n$$
$$abc = -p;$$

obsah trojúhelníka $\triangle$ vyjadřuje vzorec *Heronův*

$$\triangle = \tfrac{1}{4}\sqrt{(a+b+c)(a+b-c)(a-b+c)(-a+b+c)}$$

čili

$$\triangle = \tfrac{1}{4}\sqrt{2(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2) - (a^4 + b^4 + c^4)}.$$

Z rovnic hořejších ustanovíme

$$a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 = n^2 - 2mp$$
$$a^4 + b^4 + c^4 = m^4 - 4m^2n + 4mp + 2n^2,$$

a obdržíme tudíž

$$\triangle = \tfrac{1}{4}\sqrt{-m^4 + 4m^2n - 8mp}.$$

Správné řešení zaslali pp.: *Antonín Vyskočil* ze VI. tř. r. v Hradci Králové, *Boh. Müller* ze VII. tř. r. městského r. g. na Malé Straně v Praze, *Boh. Mašek* ze VII. tř. g. na Novém Městě v Praze, *Ant. Pleskot* z VIII. tř. a *Karel Petr* ze VI. tř. g. v Chrudimi.

Řešení úlohy 22.

(Podal p. *Vlad. Novák*, stud. VII. tř. g. na Novém Městě v Praze.)

Značí-li a délku ramene, b půdici, α úhel při půdici a β úhel ramen, jest

$$r = \frac{b}{2\sin\beta}, \quad \varrho = \frac{a^2\sin\beta}{2a+b}$$

a proto

$$\frac{\varrho}{r} = \frac{2a^2\sin^2\beta}{(2a+b)b}.$$

Nahradíme-li ve zlomku tomto $\frac{b}{a}$ poměrem $\frac{\sin\beta}{\sin\alpha}$ obdržíme, kladouce zároveň $\sin\beta = \sin 2\alpha$:

$$\frac{\varrho}{r} = \frac{2\sin^2\alpha\sin 2\alpha}{2\sin\alpha + \sin 2\alpha} = 2\cos\alpha\,(1 - \cos\alpha).$$

Z dané podmínky plyne rovnice

$$16\cos^2\alpha - 16\cos\alpha + 3 = 0,$$

z které řešením vyjde $\cos\alpha_1 = \frac{3}{4}$, $\cos\alpha_2 = \frac{1}{4}$, a odtud:

$$\alpha_1 = 41^\circ 24' 39'', \quad \alpha_2 = 75^\circ 31' 21''$$
$$\beta_1 = 97^\circ 10' 42'', \quad \beta_2 = 28^\circ 57' 18''.$$

Správné řešení zaslali pp. *Jaromír Mannsfeld, Rudolf Kotík* a *Leopold Volf* ze VI. tř. r. v Rakovníku, *Bohumír Tomíček* ze VII. tř. g. v Jičíně, *Ant. Brousil* z VIII. tř. v Písku, *Václav Bartoň* ze VII. tř. r., *Ant. Vyskočil* ze VI. tř. r. a *Karel Novák* ze VII. tř. g. v Hradci Králové, *Bohuš Mašek* ze VII. tř. g. na Novém Městě v Praze, *Karel Petr* ze VI. tř. g. v Chrudimi, *Ant. Radešínský* ze VII. tř. g. a *Ant. Paďour* ze VII. tř. r. v Litomyšli, *Boh. Müller* ze VII. tř. r. *Jan Noháč* ze VI. tř. r. a *Jan Andres* ze VII. tř. g. městského r. g. na Malé Straně v Praze.

Řešení úlohy 23.

(Zaslal p. *Ant. Vyskočil,* stud. VI. tř. r. v Hradci Králové.)

Dáno-li v rovině n přímek, stanoví tyto $\binom{n}{2}$ průsečíků; počet průsečíků vznikajících úhlopříčnami n-úhelníka jest tedy

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{n(n-3)}{2}\left[\frac{n(n-3)}{2}-1\right]=\frac{1}{8}\,n(n-3)\,(n^2-3n-2).$$

V tom zahrnuty jsou také vrcholy mnohoúhelníka, z nichž každý $\binom{n-3}{2}$ krát počítati sluší, poněvadž jím $(n-3)$ úhlopříčny procházejí. Vlastní počet průsečíků úhlopříčen jest proto

$$\begin{aligned}P&=\frac{1}{8}\,n(n-3)\,(n^2-3n-2)-\frac{1}{2}\,n(n-3)\,(n-4)\\&=\frac{1}{8}\,n(n-3)\,(n^2-7n+14).\end{aligned}$$

Průsečíky tyto jsou dílem vnitř, dílem vně mnohoúhelníka (na úhlopříčnách prodloužených). Počet průsečíků vnitřních P_1 ustanovíme, uváživše, že každé 4 vrcholy daného mnohoúhelníka lze spojiti dvěma úhlopříčnami v jednom bodě uvnitř se protínajícími. Tudíž jest

$$P_1=\binom{n}{4}=\frac{1}{24}\,n(n-1)\,(n-2)\,(n-3);$$

počet průsečíků vnějších jest pak

$$P_2 = P - P_1 = \frac{1}{12} n(n-3)(n-4)(n-5).$$

Správné řešení zaslali pp.: *Antonín Pleskot* z VIII. tř. a *Karel Petr* ze VI. tř. g. v Chrudimi.

Řešení úlohy 24.

(Zaslal p. *Ant. Pleskot*, stud. VIII. tř. v Chrudimi.)

Promítneme-li daný čtyrúhelník kolmo jednou do osy rovnoběžné k straně $\overline{ab}$ a podruhé do osy kolmé k $\overline{ab}$, nabudeme rovnic

$$a - b\cos\beta + c\cos(\beta+\gamma) - d\cos\alpha = 0$$
$$b\sin\beta - c\sin(\beta+\gamma) - d\sin\alpha = 0,$$

z nichž následuje

$$\operatorname{tg}(\beta+\gamma) = \frac{b\sin\beta - d\sin\alpha}{b\cos\beta + d\cos\alpha - a}.$$

Dle daných podmínek vypočítáme

$$\cos\alpha = \frac{7}{25}, \quad \cos\beta = \frac{9}{41},$$

$$\sin\alpha = \frac{24}{25}, \quad \sin\beta = \frac{40}{41},$$

$$\alpha = 73^\circ 44' 23'', \quad \beta = 77^\circ 19' 12'',$$

z toho pak

$$\operatorname{tg}(\beta+\gamma) = \frac{5952}{95139}.$$

Odtud najdeme $\beta+\gamma = 183^\circ 34' 49''$ a tedy $\gamma = 106^\circ 15' 37''$; ježto jest $\alpha+\gamma = 180^\circ$, lze o čtyrúhelník daný kružnici opsati. Ze druhé základní rovnice vypočítáme nyní $c = 93$; jelikož jest $a + c = b + d = 348$, lze do čtyrúhelníka daného kružnici vepsati.

Majíce ustanoviti poloměr r kružnice opsané, vypočítejme z trojúhelníka abc úhel $\gamma_1 = \sphericalangle acb = 60^\circ 22' 46''$, načež bude

$$r = \frac{a}{2 \sin \gamma_1} = 89{\cdot}15.$$

K určení poloměru ϱ kružnice vepsané ustanovme nejprvé plochu čtyrúhelníka

$$P = \sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)} = 14880;$$

potom bude

$$\varrho = \frac{P}{s} = 60.$$

Správné řešení zaslali pp.: *Alois Smolík* ze VII. tř. g. v Budějovicích, *Boh. Mašek* ze VII. tř. g. na Novém Městě v Praze, *Ant. Brousil* z VIII. tř. v Písku a *Ant. Radešínský* ze VII. tř. g. v Litomyšli.

Řešení úlohy 25.

(Podal p. *Jan Andres*, stud. VII. tř. g. městského r. g. na Malé Straně v Praze.)

Leží-li bod m na ellipse $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$, lze psáti souřadnice jeho

$$x_1 = a \cos \omega, \qquad y_1 = b \sin \omega,$$

a rovnici příslušné normaly

$$\frac{ax}{c^2 \cos \omega} - \frac{by}{c^2 \sin \omega} = 1.$$

Délka normály té obsažená mezi bodem ellipsy a osou hlavní jest

$$N_1 = \sqrt{\left(a \cos \omega - \frac{c^2 \cos \omega}{a}\right)^2 + b^2 \sin^2 \omega} = \frac{br'}{a},$$

kdež značí

$$r' = \sqrt{a^2 \sin^2 \omega + b^2 \cos^2 \omega}$$

délku poloměru sdruženého ku $\overline{om} = r$.

Podobně obdržíme část normály obsaženou mezi bodem m a průsečíkem s osou vedlejší:

$$N_2 = \sqrt{a^2 \cos^2 \omega + \left(b \sin \omega + \frac{c^2 \sin \omega}{b}\right)^2} = \frac{ar'}{b}.$$

Protož jest

$$\frac{N_1}{N_2} = \frac{b^2}{a^2}.$$

Správné řešení zaslali pp.: *Bohuš Mašek* a *Vlad. Novák* ze VII. tř. g. na Novém Městě v Praze, *Ant. Pleskot* z VIII. tř. a *Karel Petr* ze VI. tř. g. v Chrudimi, *Ant. Brousil* z VIII. tř. v Písku, *Ant. Radešínský* ze VII. tř. g. v Litomyšli a *Václav Barton* ze VII. tř. r. v Hradci Králové.

Řešení úlohy 26.

(Zaslal p. *K. Herzán*, stud. V. tř. r. v Hradci Králové.)

Zobrazme čtyrúhelník *abcd* a směry S, S'; pokládejme strany tohoto čtyrúhelníka za obrazy dvóu přímek, ku př.

$$\overline{ab} \equiv A_1, \quad \overline{ad} \equiv A_2; \quad \overline{bc} \equiv B_1, \quad \overline{cd} \equiv B_2.$$

Zvolme dále obraz osy průmětné $X_{1,2} \perp S$ a mějme S' za 1. i 2. obraz určité přímky C. Sestrojení vepsaného rovnoběžníka s danými směry stran lze nyní vykonati řešením úlohy: zobraziti průměty přímky P, která jest různoběžna ku A i B a rovnoběžna ku C. Konstrukci příslušnou lze upraviti takto: Stanovme bodem a přímku M || S' a bodem b přímku N || S, čímž obdržíme v stranách $\overline{bc}$, $\overline{ad}$ (aneb v jich prodloužení) průsečíky e, f; spojnice $\overline{ef}$ určuje v straně $\overline{cd}$ bod g, který jest jedním vrcholem žádaného rovnoběžníka.

Jsou-li směry dané rovnoběžny s úhlopříčnami daného čtyrúhelníka, stává se úloha neurčitou.

Řešení zaslal též p. *Antonín Pleskot* z VIII. tř. v Chrudimi.

Řešení úlohy 27.

(Zaslal p. *Frant. Smotlacha*, stud. VII. tř. r. v Hradci Králové.)

Úhlopříčny hledaných obdélníků jsou rovnoběžny se stranami pětiúhelníka a svírají spolu úhel buď 36° neb 72°; ze všech možných jsou tudíž 2 různé.

Důkaz. Je-li AB úhlopříčna hledaného obdélníka, O střed, OC a OD kolmice na strany pětiúhelníka, kteréž jsou úhlopříčnou AB protaty, jest $\triangle AOC \cong \triangle BOD$ a tudíž $\sphericalangle AOC = \sphericalangle BOD$. Prodloužíme-li CO k vrcholu E, jest $\sphericalangle BOE = \sphericalangle AOC = 18^0$ a $\sphericalangle OBE = 108^0$ t. j. roveň vnitřnému úhlu pravidelného pětiúhelníka.

Správné řešení zaslali pp.: *Antonín Pleskot* z VIII. tř. v Chrudimi a *Václav Bartoň* ze VII. tř. r. v Hradci Králové. Řešení, ač ne úplné, zaslali pp.: *Bohumír Tomíček* ze VII. tř g. v Jičíně, *Frant. Tomášek* ze VI. tř. g. a *Jan Petříček* z V. tř. r. v Hradci Králové.

Správné řešení úlohy 13. zaslal též p. *Alois Smolík*, stud. VII. tř. g. v Budějovicích, úlohy 18. p. *Boh. Tomíček*, stud. VII. tř. g. v Jičíně, úlohy 13., 16. a 17. p. *Antonín Paďour* a *Jan Křivohlávek*, stud. VII. tř. r., úlohy 14. a 18. p. *Ant. Radešínský*, stud. VII. tř. g. Litomyšli.

Věstník literární.

A. Hlídka programů.

Výroční zpráva cís. král. vyššího gymnasia českého na Novém Městě v Praze za školní rok 1884—5 obsahuje článek:

Pohyb vzduchem. Ukázky z nejnovějších prací fysiologických o letu. Podává prof. *Boh. Bauše.* (15 stran).

V článku řečeném pan spisovatel seznamuje nás s pokroky, které se staly v pozorování letu různých živočichů, hlavně však ptáků, za účelem sestrojení létacího stroje, který by byl specificky těžší vzduchu.