Josef Klíma

Polárné vlastnosti soustavy kuželoseček, dotýkajících se dvojnásob dvou kuželoseček, a z toho plynoucí konstrukce kuželoseček

Časopis pro pěstování matematiky a fysiky, Vol. 56 (1927), No. 1, 24--35

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/108874`

Polárné vlastnosti soustavy kuželoseček, dotýkajících se dvojnásob dvou kuželoseček, a z toho plynoucí konstrukce kuželoseček.

Dr. Josef Klíma.

V rozpravách Čes. akademie, roč. XXVIII, čís. 5, odvodil jsem polárné vlastnosti soustavy kuželoseček, určených dvěma body a dvěma tečnami. Pan prof. dr. *Sobotka* v pojednání »K některým konstrukcím kuželoseček, jejichž určující útvary nejsou reálné«,[1]) zmiňuje se, že soustavu obecnější dostaneme, nahradíme-li obě tečny kuželosečkou K_1 a oba body jinou kuželosečkou K_2. Jedná se pak o soustavu kuželoseček L^2,..., jež se dvojnásob dotýkají dvou kuželoseček K_1, K_2. Prof. Sobotka synteticky dokazuje tam tyto věty, Steinerem vyslovené bez důkazu.[2])

»Dotyčné tětivy S_1, S_2 libovolné kuželosečky L^2 této soustavy s kuželosečkami K_1, K_2, jdou týmž vrcholem společného trojúhelníka polárného xyz obou kuželoseček K_1, K_2.«

»Tětivy S_1, S_2 tvoří kvadratickou involuci, jejímiž dvojnými paprsky jsou tětivy Q_1, Q_2, společné kuželosečkám K_1, K_2, jež jdou tímtéž vrcholem trojúhelníka polárného.«

Rozpadá se tudíž tato soustava kuželoseček ve tři skupiny ∞^1 kuželoseček, z nichž každou skupinu označme podle příslušného vrcholu trojúhelníka polárného. Tak na př. [x] značí onu skupinu kuželoseček L^2, jichž dotyčné tětivy s K_1, resp. K_2 jdou vrcholem x.

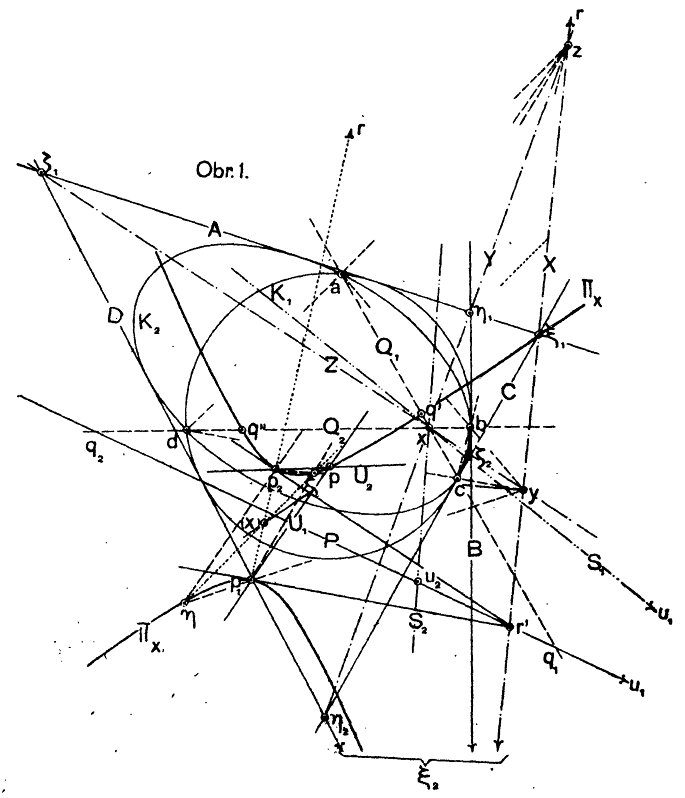
Buďtež v obr. 1 dány kuželosečky K_1, K_2, jež nechť protínají se v reálných bodech a, b, c, d a jichž společný trojúhelník polárný xyz je diagonálním trojúhelníkem čtyrúhelníka $abcd$. Kuželosečky ty mají čtyři společné tečny A, B, C, D, jež tvoří čtyrstran, jehož protější vrcholy jsou na stranách společného trojúhelníka polárného xyz. Tak na př. vrcholy $\xi_1 \equiv (AC)$, $\xi_2 \equiv (BD)$ jsou na straně $X \equiv \overline{yz}$.

Skupina [x] kuželoseček dvojnásob se dotýkajících kuželoseček K_1, K_2 má s těmito tětivy dotyčné, idoucí vrcholem x. Jednu ku-

[1]) »Časopis pro pěstování mat. a fysiky«, roč. LIV, str. 331—338.

[2]) Steiner »Allgemeine Betrachtung über einander doppelt berührende Kegelschnitte« v Journal f. die reine und angewandte Math., roč. 45 (1853), str. 212—218. Analytický důkaz je obsažen v Gundelfinger »Vorlesungen aus der analytischen Geometrie der Kegelschnitte«, vyd. od F. Dingeldey, Lipsko, r. 1895, str. 396—400.

želosečku L^2 skupiny $[x]$ vytkneme, zvolíme-li její dotyčnou tětivu S_1 s kuželosečkou K_1. Dotyčná tětiva kuželosečky té s K_2 je v přímce S_2, pro niž platí $(Q_1 Q_2 S_1 S_2) = -1$, kde Q_1 a Q_2 jsou strany $\overline{ac}, \overline{bd}$ čtyřúhelníka $abcd$, jdoucí vrcholem x. Abychom určili pól přímky libov. P ke kuželosečce L^2, zvolíme na P dva body a to průsečíky $u_1 \equiv (S_1 P)$ a $u_2 \equiv (S_2 P)$ a stanovíme jich poláry ke kuželosečce L^2. Polára bodu u_1 k L^2 splývá patrně s polárou téhož bodu ke K_1 a je to přímka U_1, jdoucí pólem p_1 přímky P ke K_1. Stejně polára bodu



u_2 k L^2 splývá s polárou téhož bodu ke K_2, a je to přímka U_2, jdoucí pólem p_2 přímky P ke K_2. Průsečík $p \equiv (U_1 U_2)$ je pólem přímky P k L^2. Opíše-li S_1 svazek o středu x, kuželosečka L^2 vytvoří skupinu kuželoseček $[x]$ a tu patrně body u_1 a u_2 na přímce P proběhnou dvě projektivní řady a tedy též jich poláry U_1 a U_2 opíší kol středů p_1, p_2 dva projektivní svazky a tedy pól p vytvoří kuželosečku Π_x. Kuželosečka Π_x obsahuje póly p_1, p_2 přímky P ke kuželosečkám K_1, K_2, dále jde body q', q'' harmonicky sdruženými k průsečíkům $q_1 \equiv (Q_1 P)$ a $q_2 \equiv (Q_2 P)$ vzhledem ke koncovým bodům a, c, resp. b, d společných tětiv, ježto tětivy ty lze uvažovati jako degenerované kuželosečky, dvojnásob se dotýkající kuželoseček K_1, K_2. Další degenerované kuželosečky této skupiny $[x]$, jsou vždy párem tečen společných oběma kuželosečkám, jichž průsečíky ξ_1, resp. ξ_2 jsou na protější straně $X \equiv yz$ trojúhelníka polárného k vrcholu x. Ježto pól přímky P k této kuželosečce je vždy v průsečíku obou přímek, jde kuželosečka Π, též body ξ_1 a ξ_2, pro něž, jak známo, platí $(yz\xi_1\xi_2) = -1$. Jako pár přímek S_1, S_2 možno vzíti též xy a $\overline{xz}$, a sestrojíme-li k průsečíkům jich s přímkou P příslušné poláry, tu dostaneme za další body kuželosečky Π_x jednak $\eta \equiv (p_1y,\ p_2z)$ a pak $\zeta \equiv (\overline{p_1z},\ \overline{p_2y})$. Čtyrúhelník $p_1\eta p_2\zeta$ je kuželosečce Π_x vepsán a tedy je diagonální jeho trojúhelník $(x)\,yz$, kde $(x) \equiv (\eta\zeta, p_1\,p_2)$, trojúhelníkem polárním kuželosečky Π_x. Je tudíž bod (x) harmonicky sdružen k průsečíku $r \equiv (\overline{p_1p_2},\ \overline{yz})$ vzhledem k bodům p_1, p_2 a bod (x) je pólem přímky $X \equiv yz$ ke kuželosečce Π_x. Ježto přímka X protíná Π_x v bodech ξ_1 a ξ_2, jdou tečny v bodech ξ_1 a ξ_2 k této kuželosečce bodem (x). Dále, jak známo, vytíná libovolná přímka P a spojnice jejích pólů $R \equiv p_1p_2$ ke kuželosečkám K_1 a K_2 na straně X společného trojúhelníka polárného, pár bodový r a r', jenž je harmonicky sdružen k bodům ξ_1 a ξ_2, v nichž indukují obě kuželosečky tutéž involuci. Procházejí tudíž tečny v bodech p_1 a p_2 ke kuželosečce Π_x průsečíkem r' přímky P se stranou X trojúhelníka polárného. Z těchto dat dá se již snadno pólová kuželosečka Π^x sestrojiti.

Stejně ke skupině $[y]$ dostaneme kuželosečku Π_y a k $[z]$ kuželosečku Π_z, jež všechny tři mají společné body p_1, p_2. Dostáváme tudíž výsledek:

»Póly libovolné přímky P ke kuželosečkám soustavy kuželoseček, jež dvojnásob se dotýkají dvou kuželoseček K_1, K_2, vyplňují tři pólové kuželosečky Π_x, Π_y, Π_z, jež procházejí póly p_1, p_2 přímky P ke kuželosečkám K_1, K_2 a tečny v nich jdou průsečíkem přímky P s příslušnou stranou společného trojúhelníka polárného xyz kuželoseček K_1, K_2.«

Duální pak věta je:

»Poláry libovolného bodu o ke kuželosečkám, jež dvojnásob se dotýkají dvou kuželoseček K_1, K_2 obalují tři kuželosečky polárné Ω_x, Ω_y, Ω_z, jež dotýkají se polár O_1, O_2 bodu o ke kuželosečkám K_1, K_2 a dotyčné jich body jsou na spojnicích bodu o s příslušným vrcholem společného trojúhelníka polárného xyz kuželoseček K_1, K_2.«

Polárná kuželosečka na př. Ω_x dotýká se dále přímek Q_1, Q_2, jež obsahují společné tětivy $\overline{ac}$, $\overline{bd}$ kuželoseček K_1, K_2 a které jdou vrcholem x společného polárního trojúhelníka xyz. Dotyčné body na těchto tečnách Q_1, Q_2 jsou na přímce harmonicky sdružené k spojnici vrcholu x s průsečíkem polár O_1, O_2 vzhledem k těmto přímkám O_1, O_2. Dále dotýká se Ω_x přímek harmonicky sdružených k spojnici bodu x s průsečíkem ξ_1 (ξ_2) společných tečen kuželoseček K_1, K_2 vzhledem k těmto tečnám.

Přejde-li přímka P v úběžnou přímku S_∞ roviny, dostaneme:

»*Středy všech kuželoseček, jež se dvojnásob dotýkají dvou kuželoseček K_1, K_2, jsou na třech soustředných kuželosečkách $\Sigma_x, \Sigma_y, \Sigma_z$ jichž společný střed ω půlí vzdálenost $\overline{s_1 s_2}$ středů s_1, s_2 obou kuželoseček K_1, K_2, jež jdou těmito středy s_1, s_2 a tečny v nich jsou rovnoběžny s příslušnou stranou společného trojúhelníka polárného xyz.*«

Další body a tečny *středových* kuželoseček Σ_x, Σ_y, Σ_z dostanou se obdobně jako při obecné poloze přímky P.

Splyne-li přímka P s přímkou $Q_1 \equiv \overline{ac}$ a uvažujeme její póly ke kuželosečkám skupin $[y]$ a $[z]$, tu kuželosečky Π_y a Π_z splynou v jedinou kuželosečku, ježto obsahují obě póly $\overline{p_1}$, $\overline{p}$ (jsou v tomto případě na X) a v nich společné tečny $\overline{p_1 x}$ a $\overline{p_2 x}$ a dále jdou obě body a a c, s nimiž v obou případech splynou body q' a q''. Dostáváme tedy větu Steinerem[3]) vyslovenou bez důkazu, již možno takto doplniti:

»*Póly společné tětivy $Q_1 \equiv ac$, jdoucí vrcholem x společného trojúhelníka polárného, ke kuželosečkám skupin [y] a [z], jsou na kuželosečce, jež obsahuje póly přímky Q_1 ke kuželosečkám K_1 a K_2, v nichž tečny jdou vrcholem x trojúhelníka polárného a která jde body a, c a dvěma páry protějších vrcholů η_1, η_2 a ζ_1, ζ_2 čtyřstranu určeného společnými tečnami A, B, C, D kuželoseček K_1, K_2.*«

Stejné platí pro tětivu $Q_2 \equiv \overline{bd}$. Duálně pak je věta:

»*Poláry bodu $\xi_1 \equiv (AC)$ vzhledem ke skupinám [y] a [z] obalují tutéž kuželosečku, jež dotýká se polár bodu ξ_1 ke kuželosečkám K_1, K_2 a sice v bodech na straně $X \equiv \overline{yz}$ společ. trojúhelníka polárného a která dotýká se tečen A a C a tětiv $\overline{ab}$, $\overline{cd}$, $\overline{ad}$, $\overline{bc}$.*«

Další vztahy, jež platí pro skupinu $[x]$, platí i pro skupiny $[y]$ a $[z]$.

Uvažujme, že bod o je na přímce P. Jeho polárná kuželosečka Ω_x je obalena též spojnicemi pólů p a p' dvou přímek P a P', jež bodem tím jdou, k téže kuželosečce skupiny $[x]$. Póly p jsou na pólové kuželosečce Π_x přímky P a póly p' jsou na pólové kuželosečce Π_x' přímky P'. Řady bodů p na Π_x a p' na Π_x' jsou projektivní a spojnice odpovídajících bodů pp' obalovaly by obecně křivku čtvrté třídy, ale zde ve společných bodech ξ_1, ξ_2 obou kuželoseček na straně X splývají dva odpovídající si body a proto obálkou tou je kuželosečka Ω_x, jež se kuželosečky Π_x dvojnásob dotýká. Dostáváme tudíž:

»*Polárné kuželosečky bodů přímky P ke skupině [x] dotýkají se dvojnásob pólové kuželosečky Π_x této přímky k téže skupině.*«

Podobně platí věta duální.

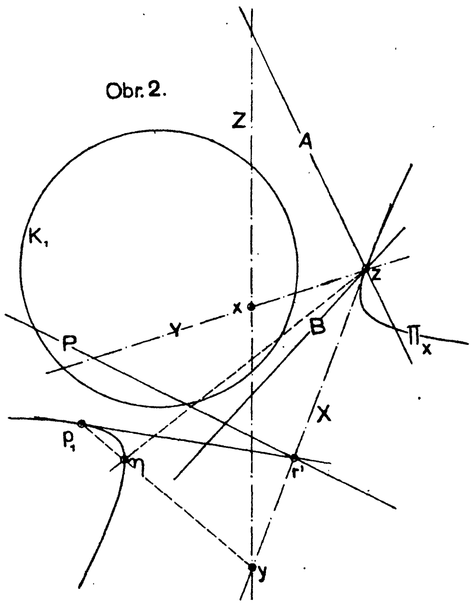
Ježto polárné kuželosečky ke skupině $[x]$ dotýkají se těchže dvou přímek Q_1, Q_2, jsou polárné kuželosečky bodů přímky P ku-

[3]) V citov. již pojednání na str. 217, odst. V 1. a 2.

želosečkami jedné skupiny kuželoseček, dotýkajících se dvou přímek a dvojnásob se dotýkajících kuželosečky Π_{x}.

Druh kuželoseček pólových Π_x závisí na poloze přímky P vzhledem k příslušné středové kuželosečce Σ_x. Protíná-li přímka P kuželosečku Σ_x ve dvou reálných bodech, pak dva póly přímky P ke kuželosečkám skupiny $[x]$, jež v bodech těch mají středy, jsou úběžné a tedy pólová kuželosečka je hyperbolou. Dotýká-li se přímka P kuželosečky Σ_x, je Π_x parabolou, a seče-li ve dvou imag. bodech Σ_x, je to elipsa.

Obr. 2.



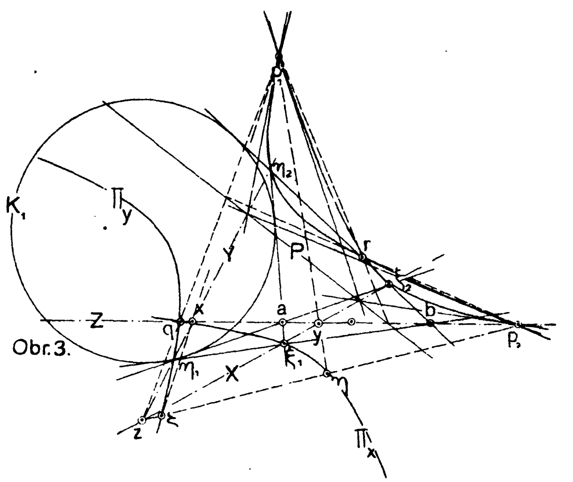
Zvolíme-li k přímce P pól p na kuželosečce Π_x, tu dostaneme příslušnou kuželosečku L^2 skupiny $[x]$, určíme-li k spojnicím $\overline{pp_1} \equiv U_1$, resp. $\overline{pp_2} \equiv U_2$ póly u_1, resp. u_2 ke kuželosečkám K_1, resp. K_2 a pak spojnice $\overline{xu_1}$, resp. $\overline{xu_2}$ protnou kuželosečky K_1, resp. K_2 v dotyčných bodech s kuželosečkou L^2.

Společný trojúhelník polární dvou kuželoseček K_1, K_2 má nejméně jeden vrchol a protější stranu reálnou a proto je reálná aspoň jedna ze skupin dvojnásob dotýkajících se kuželoseček.

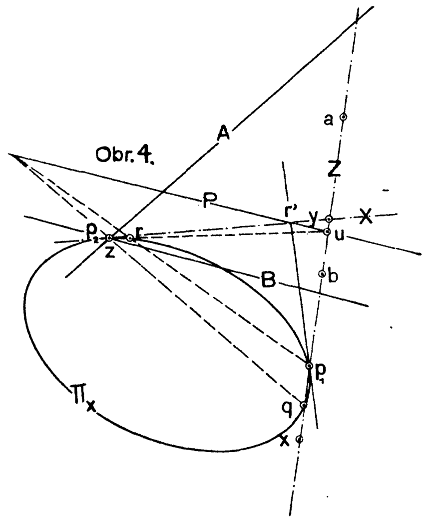
V případě, že některá z kuželoseček K_1 nebo K_2 přechází v pár přímek nebo v pár bodový, potřebují tyto konstrukce jisté změny.

Budiž v obr. 2 dána soustava kuželoseček, ***dotýkajících se páru přímek** A, B* a ***dvojnásob kuželosečky** K_1*. Jeden vrchol z společného trojúhelníka polárného splývá tu s průsečíkem přímek A a B. Druhé dva vrcholy x, y jsou na poláře Z tohoto vrcholu z ke kuželosečce K_1. Vrcholy x, y jsou reálné jen tehdy, když obě involuce, indukované jednak kuželosečkou K_1, jednak párem A, B na přímce Z, mají společný pár reálný. Tento systém kuželoseček rozpadá se jen ve dvě skupiny $[x]$ a $[y]$, kdežto skupina $[z]$ obsahuje jen degenerované kuželosečky.

Pólová kuželosečka Π_x přímky P dotýká se strany $X \equiv \overline{yz}$ v bodě z, pólu to p_2 přímky P k (AB), a tečna v pólu p_1 přímky P ke K_1 jde bodem $r' \equiv (PX)$. Další bod η kuželosečky Π_x dostaneme v průsečíku přímky $\overline{p_1 y}$ s přímkou $\overline{z\eta}$ harmonicky sdruženou k průsečíku (PZ) vzhledem k přímkám A a B. Kuželosečky polárné mají konstrukci stejnou jako v obecném případě neb duální k následujícímu případu.



Při soustavě kuželoseček, jdoucích body a, b a dotýkajících se dvojnásob kuželosečky K_1, dostaneme opět jen dvě skupiny ∞^1 kuželoseček. Spojnice $\overline{ab} \equiv Z$ je jedna strana společného trojúhelníka polárného (obr. 3) a pól z této ke K_1 je protější vrchol. Jsou-li možny z a a b tečny ke K_1, dostaneme snadno vrcholy x a y podle obr. 3, jinak určí se jako dvojné body involuce, určené párem a, b a průsečíky přímky Z s K_1. Neb strany X a Y jsou společným párem involuce, již indukuje v z kuželosečka K_1 a involuce paprskové, kterou se promítají body a, b z vrcholu z. Tyto jsou imag. jen tehdy, jsou-li involuce ty hyperbolické a jich dvojné prvky se rozdělují. Pólová kuželosečka je zde určena jako v obecném případě póly p_1, p_2 této přímky ke kuželosečkám K_1 a $K_2 \equiv (a, b)$, t. j. p_2 je harmonický bod k průsečíku (PZ) vzhledem k a, b a tečny v nich jdou průsečíkem přímky P se stranou X při skupině $[x]$ a se stranou Y ve skupině $[y]$. Další bod q je sdružen k průsečíku (PZ) v involuci, již indukuje kuželosečka K_1 na přímce Z, ježto přímku Z lze uvažovati jako degenerovanou kuželosečku systému, patřící k $[x]$ i $[y]$. Kuželosečky Π_x a Π_y mají vedle bodů p_1, p_2, q ještě společný bod r, který je v průsečíku $p_1 (PZ)$ a $p_2 (Pp_1q)$, jak vyplývá z konstrukce bodů kuželoseček těch, jsou-li dány dvě tečny pro každou s týmiž dotyčnými body p_1, p_2 a bod q. Spojnice p_1q jde patrně pólem z. Možno ovšem ještě získati pro kuželosečky Π_x a Π_y další body, jako η pro prvou a ζ pro druhou a body ξ_1, ξ_2, resp. η_1, η_2 s příslušnými tečnami. Je-li P úběžnou přímkou roviny, dostaneme:



»*Středy kuželoseček dvojnásob se dotýkajících kuželosečky K_1 a jdoucí body a, b, jsou na dvou soustředných kuželosečkách* Σ_x a Σ_y, *jichž společný střed půlí vzdálenost středu s_1 kuželosečky K_1 od půlícího bodu s_2 úsečky $\overline{ab}$. Tyto středové kuželosečky jdou středy s_1, s_2 a mají v nich tečny rovnoběžné buď se stranou X nebo se stranou Y společného trojúhelníka polárného kuželosečky K_1 a kuželosečky degenerované v a, b. Další společný bod obou je střed involuce indukované kuželosečkou K_1 na přímce $Z \equiv \overline{ab}$.*«

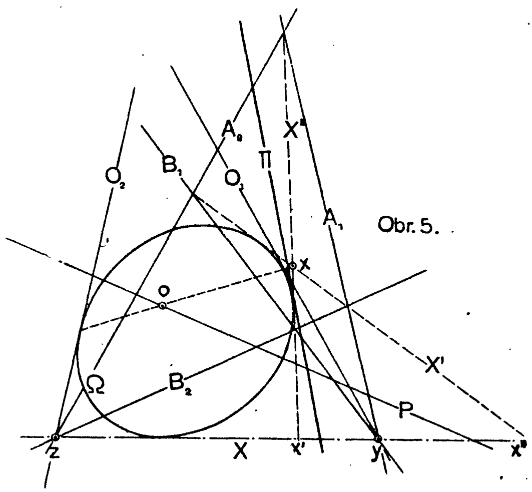
Polárná kuželosečka Ω_x bodu o určí se duálně k tomu, jako v předchozím případě, duálním k tomuto, určila se kuželosečka pólová.

Případ, kdy jedna kuželosečka rozpadá se ve dvě přímky A, B (obr. 4) a druhá kuželosečka v pár bodový a, b, probral jsem v citov. již pojednání, jen třeba dodati, že pólovou kuželosečku Π_x přímky P možno podle předchozího určiti též tečnami v pólech p_1, p_2 přímky P ke kuželosečkám degener. a, b a A, B. Je-li $(P, ab) \equiv u$, tu je $(a\, b\, u\, p_1) = -1$ a $p_2 \equiv (AB)$. Tečny v bodech p_1 a p_2 k Π_x jdou průsečíkem $r' \equiv (P, \overline{zy})$. Pólové kuželosečky dotýkají se tudíž v p_2

téže přímky $X \equiv \overline{yz}$. Kuželosečky Π_x a Π_y mají společné body p_1, p_2, q, r, jež určíme jako v předchozím případě a sice prvá má v bodě p_2 tečnu zy, kdežto druhá $\overline{zx}$.

Stejně polárné kuželosečky dotýkají se přímky $Z \equiv \overline{ab}$ v bodě x při skupině $[x]$ a v bodě y při skupině $[y]$.

Kdyby obě kuželosečky K_1, K_2 rozpadly se vždy ve dvě přímky A_1, B_1, resp. A_2, B_2, tu dostaneme řadu kuželoseček, dotýkající se čtyř základních tečen $A_1A_2B_1B_2$. Dotyčné body kuželoseček řady s přímkami A_1B_1, resp. A_2B_2 (obr. 5) jsou na přímkách, jdoucích vrcholem x společného trojúhelníka polárného xyz a jsou harmonicky sdruženy k diagonálám, jdoucím bodem x. Pólová kuželo-



sečka přímky P prochází póly $y \equiv (A_1B_1)$ a $z \equiv (A_2B_2)$ k degenerovaným kuželosečkám a tečny v nich jdou bodem (PX) a proto X je jednou částí pólové kuželosečky a druhá vlastní část je přímka Π, jdoucí harmonicky sdruženými body k průsečíkům přímky P s diagonálami čtyrúhelníka tečen, vzhledem k jeho vrcholům. Budeme-li tečny ty kombinovati po dvou jinak, dostaneme vrchol x' nebo x'' a kuželosečky pólové rozpadají se vždy v přímku X' nebo X'' a tutéž druhou přímku Π. Polárné kuželosečky všechny dotýkají se přímek X, X', X''. Polárná kuželosečka Ω na př. bodu o na P dotýká se přímek harmonicky sdružených k spojnici $\overline{oy}$, resp. $\overline{oz}$ vzhledem k tečnám A_1B_1, resp. A_2B_2, a sice v bodech na spojnici $\overline{ox}$. Různou kombinací tečen daných dostaneme pro Ω vedle čtyř tečen Π, X, X', X'' ještě šest tečen s dotyčnými body. Polárné kuželosečky bodů přímky P tvoří patrně řadu o zákl. tečnách Π, X, X', X''.

Duálně, rozpadají-li se kuželosečky K_1, K_2 v páry bodové a_1b_1 a a_2b_2, tu jedná se o kuželosečky svazku $(a_1b_1a_2b_2)$. Strany společného trojúhelníka polárného jsou $Y \equiv \overline{a_1b_1}$, $Z \equiv \overline{a_2b_2}$ a $X \equiv (\overline{a_1a_2}\ \overline{b_1b_2})$ $(\overline{b_1a_2}, \overline{a_1b_2})$. Pólová kuželosečka přímky P prochází harmonicky sdruženými body k průsečíku (PY), resp. (PZ) vzhledem k vrcholům a_1b_1, resp. a_2b_2 a tečny v nich jdou průsečíkem (PX). Trojí kombinací daných čtyř bodů do dvou skupin po dvou, dostaneme 6 tečen s dotyčnými body pro pólovou kuželosečku mimo ovšem vrcholy diag. trojúhelníka, jež jsou na všech pólových kuželosečkách. Je-li P úběžnou přímkou, dostaneme větu:

»Středy kuželoseček svazku $(a_1b_1a_2b_2)$ jsou na kuželosečce, jdoucí šesti půlicími body stran úplného čtyrúhelníka $a_1b_1a_2b_2$ a tečny vždy v půlicích bodech dvou protějších stran jsou rovnoběžny s protější stranou diagonálního trojúhelníka.«

Důsledek toho je, že střed této středové kuželosečky, jak již *Pfaff* r. 1810 vyslovil, je společným středem tří úseček, jichž krajní body jsou v půlících bodech protějších stran úplného čtyrúhelníka $(a_1b_1a_2b_2)$; je to těžiště těch čtyř bodů.

Výsledků těchto lze nyní užíti k řešení úloh, jež byly předmětem úvah pana prof. *Sobotky* v uvedeném pojednání a před tím pp. prof. *Procházky* a *Mikana.*[4]) Jako příklad uvedeme následující konstrukce.

I. Budiž sestrojiti kuželosečku danou dvěma imag. body $a^i b^i$, dvěma imag. tečnami $A^i B^i$ a buď a) reálným bodem c neb b) reálnou tečnou C.

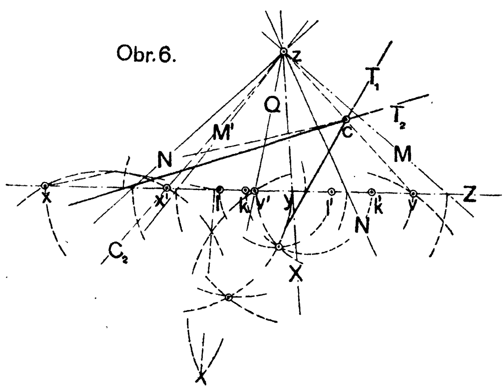
V případě a) buďtež v obr. 6 body $a^i b^i$ dány eliptickou involucí (kk', ll') na přímce Z a tečny $A^i B^i$ eliptickou paprskovou involucí (MM', NN') v bodě z. V daném reálném bodě c sestrojíme k hledané kuželosečce tečnu. Společný trojúhelník polárný degenerovaných kuželoseček $(a^i b^i)$, $(A^i B^i)$ je xyz, kde x, y je společný pár involuce (kk', ll') určující $a^i b^i$ a involuce, jíž vytíná elipt. involuce paprsková (MM', NN') na přímce Z. Zde jsou dvě skupiny ∞^1 kuželoseček $[x]$ a $[y]$. Poláry bodu c vzhledem ke kuželosečkám skupiny $[x]$ obalují kuželosečku polárnou Γ_x, jež je určena tečnami $Z \equiv a^i b^i$, C, sdruženou to přímkou k zc v involuci (MM', NN'), na nichž body dotyku jsou na spojnici $\overline{cx}$ a tečnou Q, jež je k $\overline{zc}$ sdružena v paprskové involuci, jíž promítá se z vrcholu z involuce bodová (kk, ll'). Jsou tedy $v \equiv (\overline{Zcz})$ a $v' \equiv (ZQ)$ párem v involuci (kk', ll'). Tečna k hledané kuželosečce v bodě c, je současně tečnou polárné kuželosečky Γ_x, a ježto z c lze vésti ke Γ_x dvě tečny T_1, T_2, dostaneme ve skupině $[x]$ dvě kuželosečky úloze vyhovující.

---

[4]) »Časopis pro pěstování mat. a fys.«, roč. LIV., str. 226 v pojednání: »Poznámka ke konstrukci kuželoseček z prvků dílem imaginárných«.

Tečny T_1, T_2 jsou samodružnými paprsky involuce určené dvěma páry sdružených polár kuželosečky Γ_x, jdoucí bodem c. Jeden pár je $\overline{cx}$ a $\overline{cx'}$, kde $x' \equiv (ZC_2)$, a druhý pár je $\overline{cz}$ a $\overline{cv'}$. Tedy průsečíky tečen T_1, T_2 se stranou Z dostaneme jako samodružné body involuce určené páry xx' a vv'. Podobně ve skupině $[y]$ dostaneme dvě kuželosečky, k nimž sestrojené tečny T_3, T_4 v bodě c, protínají stranu Z v bodech, jež jsou dvojnými prvky v bodové involuci o párech yx' a vv'. V obr. 6 tyto jsou imaginární. Tečny T_1T_2 a T_3T_4 jsou patrně dva páry involuce o samodružných paprscích $\overline{cz}$ a $\overline{cv'}$. Určením těchto tečen lze již kuželosečky ty snadno sestrojiti.

Případ b), kdy místo bodu c je dána tečna C, řeší se duálně a úloha je opět obecně čtyrznačná.

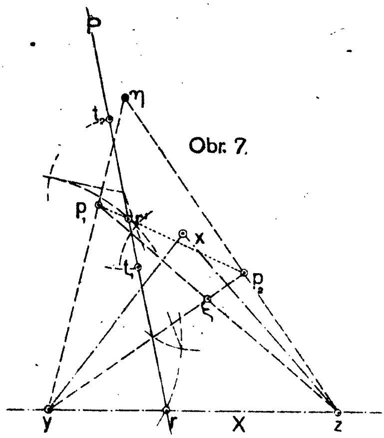


Kdyby místo bodu c byl dán pár sdružených bodů c_1, c_2, tu určila by se polárná kuželosečka bodu c_1 a k ní určily by se tečny z bodu c_2, jež by byly pak polárami bodu c_1 ke dvěma kuželosečkám příslušné skupiny. Z těchto dat by se opět kuželosečky ty již snadno sestrojily.

Stejně postupujeme i v jiných případech, kdy hledaná kuželosečka má se dvojnásob dotýkati dané kuželosečky a buď procházeti dvěma imag. body a reálným bodem neb dotýkati se dvou imag. tečen a reálné tečny atd.

II. V obr. 7 je určiti kuželosečku dotýkající se dvojnásob dvou kuželoseček K_1, K_2 a dotýkající se mimo to přímky P. Kuželosečky K_1, K_2 dány společným trojúhelníkem polárním xyz a první pólem p_1 přímky P a druhá pólem p_2 téže přímky. Kdyby byly dány jiné prvky pro kuželosečky K_1, K_2, sestrojíme zvolené známým způsobem. Podle polohy daných prvků v obr. 7 je patrně kuželosečka K_1 reálnou, kdežto K_2 je imaginárnou. Stanovme pólovou kuželosečku Π_x přímky P ke skupině $[x]$ soustavy kuželoseček dvojnásob se dotýkajících kuželoseček K_1, K_2. Π_x jde póly p_1, p_2 a v nich tečny její jdou průsečíkem $r \equiv (PX)$ a další dva body jsou $\eta \equiv (\overline{p_1y}, \overline{p_2z})$ a

$\zeta \equiv (\overline{p_1 z}, \overline{p_2 y})$. Průsečíky t_1, t_2 přímky P s Π_x jsou dotyčnými body přímky P s dvěma hledanými kuželosečkami. Průsečíky ty jsou dvojnými body involuce, jíž indukuje Π_x na přímce P. Jeden pár sdružených bodů je r, $r' \equiv (\overline{P p_1 p_2})$ a druhý pár jsou průsečíky přímky P se spojnicemi $\overline{p_1 \zeta z}$ a $\overline{p_2 \zeta y}$ neb průsečíky přímky P s $\overline{p_1 y}$ a $\overline{p_2 z}$. Dvojné body t_1, t_2 jsou dotyč. body dvou kuželoseček skupiny $[x]$, pro něž je x a X pól a polára. Stejně dostaneme po dvou kuželo-



sečkách ve skupině $[y]$ a $[z]$, takže úloha je šestiznačná. Podle konstrukce dostáváme zřejmě větu:

»*Dotyčné body přímky P s kuželosečkami soustavy, jež se dvojnásob dotýkají dvou kuželoseček $K_1 K_2$, jsou tytéž jako dotyčné body kuželoseček tří svazků, jichž základní body jsou póly p_1, p_2 přímky P ke kuželosečkám K_1, K_2 a pak vždy dva vrcholy společného trojúhelníka polárného kuželoseček K_1, K_2.*«

Jak by se sestrojili kuželosečky ty dále, je patrno z obr. 1. Kdyby místo tečny P dány byly dvě sdružené přímky neb dva sdružené body, je patrno, jak by se použilo kuželoseček pólových neb polárných.

*

Les propriétés polaires d'un système de coniques ayant un contact double avec deux coniques données.

(Extrait de l'article précédent.)

Ce système se décompose, d'après un résultat du à Steiner, en trois groupes $[x]$, $[y]$, $[z]$ d'une infinité de coniques. Les droites joignant les points de contact des coniques de chaque groupe avec es deux coniques données, soit K_1 et K_2, passent, respectivement, par un sommet du triangle polaire commun xyz des deux coniques. L'auteur démontre le théorème:

„Les pôles d'une droite arbitraire P par rapport aux coniques du système en question ont pour lieu trois coniques de pôles Π_x, Π_y, Π_z qui passent par les pôles p_1, p_2 de la droite P par rapport aux coniques K_1, K_2 et dont les tangentes en ces points passent par le point d'intersection de la droite F avec le côté respectif du triangle xyz."

Ainsi, les tangentes de Π_x aux points p_1, p_2 passent par le point $(\overline{P, yz})$. L'auteur énonce le théorème réciproque; il appelle polaires les trois coniques correspondant, de la manière réciproque, à un point o. Il existe la relation suivante entre les coniques de pôles et les coniques polaires:

„Les coniques polaires des points d'une droite P par rapport au groupe $[x]$ ont un contact double avec la conique de pôles Π_x de cette droite par rapport au même groupe."

L'auteur considère, ensuite, les cas particuliers où l'une ou les deux coniques données se décomposent, soit en deux droites, soit en deux points.

Comme application, il fait voir, comment on peut utiliser les coniques de pôles et les coniques polaires pour la construction de coniques déterminées par des éléments imaginaires.

Il démontre, encore, le theorème suivant:

„Les points de contact d'une droite P avec les coniques du système considéré, sont identiques aux points de contact des coniques des trois faisceaux dont les points fondamentaux sont les pôles de la droite P par rapport aux coniques K_1, K_2 et deux sommets respectifs du triangle polaire commun."