Jan Vilém Pexider

Studie o funkcinálních rovnicích

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 29 (1900), No. 3, 153--195

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/108860`

Studie o funkcionálních rovnicích.

Napsal

Dr. Jan Vilém Pexider v Praze.

I. Stanovení funkcí, hovících určitým podmínkám.

Problém 1. *Nalézti takové funkce $f(x)$ reálného argumentu x, jež v libovolných mezích proměnné x jsou spojité a jednoznačné, aby pro všechny hodnoty x, y v oněch mezích vyhovovaly rovnici*

$$(1)\qquad f(x) + f(y) = \varphi(x + y)$$

respektivně

$$(2)\qquad f(x) . f(y) = \varphi(x + y),$$

$$(3)\qquad f(x) . f(y) = \varphi(xy),$$

$$(4)\qquad f(x) + f(y) = \varphi(xy),$$

nechť φ značí funkci jakoukoliv.

Jednoduchá úvaha problémy předložené výhodně specialisuje. Položíme-li totiž v rovnici (1) $y = 0$, obdržíme vztah

$$\varphi(x) = f(0) + f(x),$$

t. j. funkce, jež vyhovují relaci (1), jsou definovány rovnicí

$$f(x) + f(y) = f(0) + f(x + y)$$

— při čemž ovšem nutno, aby číselná hodnota $|f(0)|$ byla konečnou, t. j. aby $|f(0)| < A$, značí-li A libovolně velké kladné číslo — a tato jest jich funkcionální rovnicí; jeť typu

$$F[f(x), f(y), f(z)] = 0,$$

při čemž argument z hoví vztahu $z = \psi(x, y)$ a ψ značí funkci jakoukoliv.

Obdobně, kladouce v rovnici (2) $y = 0$, v (3) $y = 1$, ve (4) $y = 1$, obdržíme vztahy

$$\varphi(x) = f(0) \, . \, f(x)$$

resp.

$$\varphi(x) = f(1) \, . \, f(x) \, ,$$
$$\varphi(x) = f(1) + f(x) \, ,$$

takže funkce $f(x)$ definována jest funkcionální rovnicí

$$f(x) \, . \, f(y) = f(0) \, . \, f(x + y)$$

respektivně

$$f(x) \, . \, f(y) = f(1) \, . \, f(xy) \, ,$$
$$f(x) + f(y) = f(1) + f(xy) \, ,$$

při čemž opět číselné hodnoty $|f(0)|$ a $|f(1)|$ jsou menší než A.

Hoví-li funkce $f(x)$ respektivně těmto rovnicím, vyhovuje zajisté i rovnici (1) resp. (2), (3), (4).

Platí tudíž věta:

Aby funkce $f(x)$ hověla rovnici (1) resp. (2), (3), (4), jest nutno a stačí, aby definována byla funkcionální rovnicí

$$\text{(I)} \qquad f(x) + f(y) = f(0) + f(x + y)$$

resp.

$$\text{(II)} \qquad f(x) \, . \, f(y) = f(0) \, . \, f(x + y) \, ,$$
$$\text{(III)} \qquad f(x) \, . \, f(y) = f(1) \, . \, f(xy) \, ,$$
$$\text{(IV)} \qquad f(x) + f(y) = f(1) + f(xy) \, ,$$

a platilo pokaždé $|f(0)|$ resp. $|f(1)| < A$.

Jest-li v speciálním případě v rovnici (I) hodnota $f(0) = 0$, v (II) hodnota $f(0) = 1$, v (III) $f(1) = 1$ a ve (IV) $f(1) = 0$, obdržíme funkce $f_1(x)$, definované rovnicemi jednoduššího tvaru

$$\text{(I')} \qquad f_1(x) + f_1(y) = f_1(x + y) \, ,$$
$$\text{(II')} \qquad f_1(x) \, . \, f_1(y) = f_1(x + y) \, ,$$
$$\text{(III')} \qquad f_1(x) \, . \, f_1(y) = f_1(xy) \, ,$$
$$\text{(IV')} \qquad f_1(x) + f_1(y) = f_1(xy) \, .$$

Lze snadno ukázati, že funkce $f_1(x)$ a $f(x)$ stojí k sobě v jednoduchém poměru.

Uvažujme funkce tyto, nejprve definované rovnicemi (I) a (I'); kladouce totiž

$$f(x) = af_1(x) + b,$$

kdež a, b značí libovolné konstanty, obdržíme vzhledem ku

$$f_1(0) = 0, \; f(0) = b, \; f(y) = af_1(y) + b,$$
$$f(x+y) = af_1(x+y) + b$$

vztah

$$(\alpha) \qquad af_1(x) + b + af_1(y) + b = b + af_1(x+y) + b$$

čili identitu

$$f_1(x) + f_1(y) = f_1(x+y);$$

t. j. — značí-li $f_1(x)$ funkci definovanou rovnicí (I′), pak funkce $af_1(x) + b$, kdež a, b značí libovolné konstanty, jest zajisté jednou z funkcí, jež definuje rovnice (I).

Později bude ukázáno, že tato jest také jedinou funkcí, již definuje funkcionální rovnice (I).

Obdobně uvažujíce funkce definované rovnicemi (II) a (II′) resp. (III) a (III′), (IV) a (IV′), t. j. kladouce pokaždé

$$f(x) = af_1(x) + b,$$

obdržíme především hodnoty

$$f(0) = af_1(0) + b = a + b$$

resp.

$$f(1) = af_1(1) + b = a + b,$$
$$f(1) = af_1(1) + b = b,$$

ježto z rovnice (II′) resp. (III′), (IV′) plyne

$$f_1(0) = 1 \text{ resp. } f_1(1) = 1, \; f_1(1) = 0,$$

a po dosazení do rovnice (II) resp. (III), (IV) vztahy

$$(\beta) \qquad [af_1(x) + b].[af_1(y) + b] = (a+b).[af_1(x+y) + b],$$
$$(\gamma) \qquad [af_1(x) + b].[af_1(y) + b] = (a+b).[af_1(xy) + b],$$
$$(\delta) \qquad af_1(x) + b + af_1(y) + b = b + af_1(xy) + b.$$

Ze vztahu (β) resp. (γ) plynou vzhledem k (II′) resp. (III′) rovnice

$$ab[f_1(x) + f_1(y)] = ab[1 + f_1(x+y)],$$
$$ab[f_1(x) + f_1(y)] = ab[1 + f_1(xy)];$$

poněvadž pak nutně $a \lesseqgtr 0$ vzhledem k možné hodnotě $a = 1$ a faktory na obou stranách u ab sobě rovnati se nemohou, lze jim zadosti učiniti pouze supposicí $b = 0$; vztah (δ) jest vzhledem k (IV′) identitou.

Hoví tudíž rovnici (II) resp. (III), (IV) zajisté funkce $f(x) = af_1(x)$ resp. $f(x) = af_1(x)$, $f(x) = af_1(x) + b$ při libovolném stálém a a b. Stejně bude ukázáno, že funkce tyto jsou jediné funkce, definované funkcionálními rovnicemi (II), (III) a (IV).

Značí-li $f_1(x)$ funkci definovanou funkcionální rovnicí (I′) resp. (II′), (III′), (IV′), pak funkcí $f(x)$, definovanou rovnicí I), resp. (II), (III), (IV) jest funkce

$$f(x) = af_1(x) + b$$

resp.

$$f(x) = af_1(x),$$
$$f(x) = af_1(x),$$
$$f(x) = af_1(x) + b,$$

kdež a, b značí zcela libovolné konstanty.

Funkcionální rovnice (I′), (II′), (III′) a (IV′) řešil již Cauchy [1]; všestranně provedené řešení rovnice (II′) obsaženo jest ve Stolzově Arithmetice [2]; pro analytické funkce řešil problémy ty dle Weierstrassovy theorie Biermann [3], pro komplexní funkce reálného argumentu opět Cauchy [4], a pro funkce komplexního argumentu jednotlivé z nich Thomae [5] a Stolz [6].

Jedná se tudíž o řešení následujícího problému:

Stanoviti všechny v libovolných mezích reálné proměnné x spojité a jednoznačné funkce $f(x)$, jež vyhovují relaci

---

[1] *Cauchy*, Cour d'analyse de l'école royale polytechnique, Oeuvres complètes, II^e Série, Tome III, p. 98–105.

[2] *Stolz*, Vorlesungen über allgemeine Arithmetik, I. Theil, p. 133 a n., p. 303 a n.

[3] *Biermann*, Theorie der analytischen Funktionen, p. 264—268.

[4] *Cauchy*, Ibidem, p. 220—229. Též Stolz, Arithmetik, II. Theil, p. 72–74.

[5] *Thomae*, Elementare Theorie der analytischen Funktionen einer complexen Variabelen, p. 48 a n.

[6] *Stolz*, Arithmetik, II. Theil, p. 193—195.

(I') $$f(x+y) = f(x) + f(y)$$
resp.
(II') $$f(x+y) = f(x) \,.\, f(y)\,,$$
(III') $$f(xy) = f(x) \,.\, f(y)\,,$$
(IV') $$f(xy) = f(x) + f(y)\,.$$

Řešení prvních dvou funkcionálních rovnic. — Nahradíme-li v rovnici

$$f(x_1 + x_2) = f(x_1) + f(x_2)$$

resp.

$$f(x_1 + x_2) = f(x_1) \,.\, f(x_2)$$

postupně x_2 proměnnými $x_2 + x_3$, x_3 proměnnými $x_3 + x_4, \ldots$ x_{n-1} proměnnými $x_{n-1} + x_n$, pokaždé použivše daného vztahu (I') resp. (II'), obdržíme relaci

$$f(x_1 + x_2 + \ldots + x_n) = f(x_1) + f(x_2) + \ldots + f(x_n)$$

resp.

$$f(x_1 + x_2 + \ldots + x_n) = f(x_1) \,.\, f(x_2) \ldots f(x_n)\,,$$

nechť n jest jakékoliv celistvé kladné číslo. Položíme-li pak

$$x_1 = x_2 = x_3 = \cdots = x_n = x\,,$$

nabudeme vztahu

$$f(nx) = nf(x)$$

resp.

$$f(nx) = [f(x)]^n\,,$$

pro $x = 1$ hodnoty

$$\left.\begin{array}{l} f(n) = nf(1) \\ \text{resp.} \\ f(n) = [f(1)]^n \end{array}\right\} n = 1, 2, 3, \ldots,$$

a pro $x = \frac{1}{n}$ hodnoty

$$\left.\begin{array}{l} f(1) = nf\left(\frac{1}{n}\right) \\ \text{resp.} \\ f(1) = \left[f\left(\frac{1}{n}\right)\right]^n. \end{array}\right\} n = 1, 2, 3, \ldots$$

Poslední vztah, t. j. $f\left(\frac{1}{n}\right) = \sqrt[n]{f(1)}$, ukazuje, že hodnota $f(1)$ podléhá jistému omezení. Má-li totiž $f\left(\frac{1}{n}\right)$ býti reálné číslo při jakémkoliv $n = 1, 2, 3, \ldots$, jest nutné a zajisté i stačí, aby $f(1)$ bylo číslo kladné; v obou pak případech, aby číselná hodnota $|f(1)|$ byla konečnou, t. j. aby

$$|f(1)| < \mathrm{M}$$

resp.

$$f(1) = \mathrm{A} \text{ při } 0 < \mathrm{A} < \mathrm{M},$$

kdež M značí libovolně velké kladné číslo.

Položíme-li v rovnici (II′) $y = x$, obdržíme vztah

$$f(2x) = [f(x)]^2$$

a dosazením $\frac{x}{2}$ za x

$$f(x) = \left[f\left(\frac{x}{2}\right)\right]^2,$$

odkudž plyne, že funkce $f(x)$ jest stále positivní, jsouc rovna jistému quadrátu.

Pro hodnoty $n = m$ a $x = \frac{1}{n}$ plyne z rovnic předchozích

$$f\left(\frac{m}{n}\right) = mf\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{m}{n}f(1)$$

resp.

$$f\left(\frac{m}{n}\right) = \left[f\left(\frac{1}{n}\right)\right]^m = \left[f(1)\right]^{\frac{m}{n}},$$

dále pro $y = 0$ plyne z rovnice (I′) resp. (II′) vztah

$$f(x) = f(0) + f(x) \text{ resp. } f(x) = f(0) \,.\, f(x),$$

t. j.

$$f(0) = 0 \text{ resp. } f(0) = 1,$$

a pro $y = -x$ relace

$$f(0) \quad 0 = f(x) + f(-x)$$

resp.

$$f(0) = 1 = f(x) \,.\, f(-x),$$

t. j.

$$f(-x) = -f(x)$$

resp.

$$f(-x) = \frac{1}{f(x)}.$$

Platí tudíž obecněji

$$f(x) = x \,.\, f(1) = ax$$

resp.

$$f(x) = [f(1)]^x = A^x,$$

nechť x značí jakýkoliv kladný neb záporný zlomek číselný, t. j. jakékoliv racionálné číslo.

Značí-li φ_n, ψ_n racionálná a α, β irracionálná čísla taková, že $\alpha = \lim \varphi_n$ a $\beta = \lim \psi_n$ při $n = \infty$, platí pro prvý druh čísel

$$f(\varphi_n) = a\varphi_n \quad \text{resp.} \quad f(\varphi_n) = A^{\varphi_n}$$

a tudíž, limitujeme-li

$$\lim f(\varphi_n) = a \lim \varphi_n = f(\lim \varphi_n)$$

resp.

$$\lim f(\varphi_n) = \lim A^{\varphi_n} = A^{\lim \varphi_n} \text{[1]} = f(\lim \varphi_n);$$

limitováním rovnic

$$f(\varphi_n + \psi_n) = f(\varphi_n) + f(\psi_n)$$
$$f(\varphi_n + \psi_n) = f(\varphi_n) \,.\, f(\psi_n)$$

obdržíme vzhledem k předchozímu

$$f(\lim \{\varphi_n + \psi_n\}) = f(\lim \varphi_n) + f(\lim \psi_n)$$

resp.

$$f(\lim \{\varphi_n + \psi_n\}) = f(\lim \varphi_n) \,.\, f(\lim \psi_n)$$

čili

$$f(\alpha + \beta) = f(\alpha) + f(\beta)$$

resp.

---

[1] Důkaz této věty viz na př. *Stolz*, Arithmetik, I. Theil, p. 138.

$$f(\alpha + \beta) = f(\alpha) \, . \, f(\beta) \, ,$$

značí-li současně

$$f(\alpha) = a \lim \varphi_n = a\alpha$$

resp.

$$f(\alpha) = A^{\lim \varphi_n} = A^{\alpha} \, .$$

Poněvadž pak soubor čísel racionálných a irracionálných tvoří spojitý systém hodnot, jsou funkce definované funkcionální rovnicí (I′) resp. (II′) spojité funkce argumentu x — čímž problém předložený řešen.

Mají tudíž funkce $f(x)$, definované funkcionální rovnicí (I′) resp. (II′), nutně tvar

$$(a') \qquad f(x) = ax$$

resp.

$$(b') \qquad f(x) = A^x \, ,$$

kdež a značí zcela libovolnou, A však libovolnou positivní konstantu; neboť pro každou hodnotu a mezi $-\infty$ a $+\infty$, resp. každou hodnotu A mezi 0 a $+\infty$ splněna jest rovnice

$$a(x + y) = ax + ay$$

resp.

$$A^{x+y} = A^x \, . \, A^y$$

identicky a pokaždé zůstává funkce ax, resp. A^x reálnou a spojitou.

Poznámka. Relace (b') nabyti lze snadno následujícím způsobem. Logarithmujeme-li obě strany rovnice (II′) v systému o positivní basi A′, obdržíme vztah

$$Lf(x + y) = Lf(x) + Lf(y) \, ,$$

z něhož dle uvedeného řešení rovnice (I′) plyne výraz

$$Lf(x) = x \, . \, Lf(1) \, ,$$

a přejdeme-li od logarithmů k číslům, reálná funkce

$$f(x) = A^x \, .$$

Řešení funkcionálních rovnic (III′) a (IV′). — Podobné methody, jíž užito k řešení rovnic (I′) a (II′), použiti lze i při řešení těchto dvou; rychleji však dojde se cíle, převedou-li se rovnice (III') a (IV') substitucí $x = A^{Lx}$, kdež L značí logarithmus v systému o basi A, A > 0, na tvar

$$f(A^{Lx+Ly}) = f(A^{Lx}) \, . \, f(A^{Ly})$$

resp.

$$f(A^{Lx+Ly}) = f(A^{Lx}) + f(A^{Ly}),$$

t. j. na formu obdobnou formám (II') resp. (I').

Ježto v rovnicích těchto čísla Lx a Ly nabyti mohou jakékoliv positivní neb negativní hodnoty, platí pro všechny možné reálné hodnoty proměnné x a y relace

$$f(A^{x+y}) = f(A^x) \, . \, f(A^y)$$

resp.

$$f(A^{x+y}) = f(A^x) + f(A^y),$$

a tudíž jich sukcessivním použitím pro hodnoty x_1, x_2, ... x_n vztahy

$$f(A^{x_1+x_2+\cdots+x_n}) = f(A^{x_1}) \, . \, f(A^{x_2}) \ldots f(A^{x_n})$$

resp.

$$f(A^{x_1+x_2+\cdots+x_n}) = f(A^{x_1}) + f(A^{x_2}) + \ldots + f(A^{x_n}),$$

odtud pak za supposice $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = x$ výrazy

$$f(A^{nx}) = [f(A^x)]^n$$

resp.

$$f(A^{nx}) = nf(A^x),$$

a pro $x = 1$ hodnoty

$$f(A^n) = [f(A)]^n$$

resp.

$$f(A^n) = nf(A);$$

vzhledem k předchozímu platí stejně

$$f(A^{Lx}) = [f(A)]^{Lx}$$

resp.

$$f(A^{Lx}) = f(A) \, . \, Lx,$$

anebo — což jest totéž —

$$f(x) = x^{\mathrm{L}f(A)}$$

resp.

$$f(x) = f(\mathrm{A}) \,.\, \mathrm{L}x\,.$$

Relace tyto odvozeny byly pomocí substituce $x = \mathrm{A}^{\mathrm{L}x} = \mathrm{A}^z$ za podmínky, že z zůstane číslo reálné; to vyžaduje [viz řešení rovnice (II′)], aby $\mathrm{A} > 0$, a má za následek, že i $x > 0$, vzhledem ku $x = \left(\mathrm{A}^{\frac{z}{2}}\right)^2$. Může tudíž x značiti proměnnou, nabývající pouze positivních hodnot.

Obdobně si počínajíce jako při řešení rovnic (I′) a (II′), snadno nahlédneme, že poslední relace platí pro jakékoliv positivní racionálné i irracionálné číslo x.

Jsou tudíž funkce $f(x)$, definované funkcionální rovnicí (III′) resp. (IV′), vždy a nutně tvaru

$$(c') \qquad f(x) = x^m$$

resp.

$$(d') \qquad f(x) = a\mathrm{L}x\,,$$

kdež a, m značí zcela libovolnou konstantu, L pak logarithmus v soustavě o libovolné basi $\mathrm{A} > 0$.

Reálné a spojité funkce, definované funkcionálními rovnicemi

$$f_1(x+y) = f_1(x) + f_1(y)\,,$$
$$f_1(x+y) = f_1(x) \,.\, f_1(y)\,,$$
$$f_1(xy) = f_1(x) \,.\, f_1(y)\,,$$
$$f_1(xy) = f_1(x) + f_1(y)\,,$$

jsou elementární funkce

$$f_1(x) = ax \quad \textit{pro} \quad -\infty < x < +\infty\,,$$
$$f_1(x) = \mathrm{A}^x \quad \textit{pro} \quad -\infty < x < +\infty \;\; a \;\; \mathrm{A} > 0\,,$$
$$f_1(x) = x^m \quad \textit{pro} \quad 0 \leqq x < +\infty\,,$$
$$f_1(x) = a \,.\, {}^{A}\mathrm{L}x \quad \textit{pro} \quad 0 < x < +\infty \;\; a \;\; \mathrm{A} > 0\,,$$

kdež a, m, A značí ostatně zcela libovolné konstanty.

K úplnému řešení problému 1. zbývá tedy ještě ukázati, že funkce $af_1(x) + b$ resp. $af_1(x)$ jsou jedinými analytickými funkcemi, hovícími žádaným podmínkám.

Sukcessivním použitím vzorců (I) resp. (II) pro argumenty $x_1, x_2, \ldots, x_n$ obdržíme rovnice

$$f(x_1)+f(x_2)+\ldots+f(x_n)=(n-1)f(0)+f(x_1+x_2+\ldots+x_n)$$

resp.

$$f(x_1) \cdot f(x_2) \ldots f(x_n)=[f(0)]^{n-1} \cdot f(x_1+x_2+\ldots+x_n),$$

a stanovením $x_1=x_2=\cdots=x_n=x$ vztahy

$$nf(x)=(n-1)f(0)+f(nx)$$

resp.

$$[f(x)]^n=[f(0)]^{n-1} \cdot f(nx),$$

z nichž jde pro $x=1$

$$nf(1)=(n-1)f(0)+f(n)$$

resp.

$$[f(1)]^n=[f(0)]^{n-1} \cdot f(n)$$

čili

$$f(x)=[f(1)-f(0)]x+f(0)$$

resp.

$$f(x)=f(0) \cdot \left[\frac{f(1)}{f(0)}\right]^x,$$

značí-li x číslo z přirozené řady 1, 2, 3, . . ., anebo konečně

$$\left.\begin{array}{ll}(a) & f(x)=a'x+b' \\ \text{resp.} & \\ (b) & f(x)=a' \cdot \mathrm{A}^x\end{array}\right\} x=1,2,3, \ldots,$$

kdež a', b', A jsou prozatím neznámé konstanty.

V případě $b'=0$ resp. $a'=1$, t. j. $f(0)=0$ resp. $f(0)=1$ máme výrazy

$$f_1(x)=a'x$$

resp.

$$f_1(x)=\mathrm{A}^x,$$

známé to již výsledky; při tom značí A libovolnou positivní konstantu. Funkce $f_1(x)$ jsou jediné definované rovnicí (I′) resp. (II′); avšak relace (a) a (b) ukazují jasně, že rovnicím (I) a (II) hoví jedině výrazy v podstatě své shodné s funkcemi $f_1(x)$, totiž výrazy $af_1(x)+b$ a $af_1(x)$, kdež a, b jsou neznámé dosud konstanty. Bylo však již ukázáno, že rovnicím (I) a (II) skutečně vyhovují funkce $af_1(x)+b$ a $af_1(x)$, nechť a, b jsou jakékoliv konstanty.

Jest tudíž řešením funkcionální rovnice (I) resp. (II) výraz

$$f(x) = ax + b$$

resp.

$$f(x) = a\mathrm{A}^x,$$

kdež a a b jsou zcela libovolné, A však libovolná kladná konstanta.

Obdobně jako při řešení rovnic (III′) a (IV′) převedou se rovnice (III) a (IV) substitucí $x = \mathrm{A}^{\mathrm{L}x}$, kdež L značí logarithmus v soustavě o basi A, na tvar

$$f(\mathrm{A}^{\mathrm{L}x}) \,.\, f(\mathrm{A}^{\mathrm{L}y}) = f(1) \,.\, f(\mathrm{A}^{\mathrm{L}x+\mathrm{L}y})$$

resp.

$$f(\mathrm{A}^{\mathrm{L}x}) + f(\mathrm{A}^{\mathrm{L}y}) = f(1) + f(\mathrm{A}^{\mathrm{L}x+\mathrm{L}y}),$$

t. j. na formu obdobnou formám (II) resp. (I).

V těchto rovnicích mohou čísla Lx a Ly nabyti jakékoliv positivní neb negativní hodnoty; platí tedy pro všechny možné reálné hodnoty proměnné x a y relace

$$f(\mathrm{A}^x) \,.\, f(\mathrm{A}^y) = f(1) \,.\, f(\mathrm{A}^{x+y})$$

resp.

$$f(\mathrm{A}^x) + f(\mathrm{A}^y) = f(1) + f(\mathrm{A}^{x+y})$$

čili, značí-li $\mathrm{F}(x) = f(\mathrm{A}^x)$, rovnice

$$\mathrm{F}(x) \,.\, \mathrm{F}(y) = \mathrm{F}(0) \,.\, \mathrm{F}(x+y)$$

resp.

$$\mathrm{F}(x) + \mathrm{F}(y) = \mathrm{F}(0) + \mathrm{F}(x+y),$$

t. j. rovnice (II) resp. (I), jež mají za řešení

$$\mathrm{F}(x) = \mathrm{F}(0) \,.\, \left[\frac{\mathrm{F}(1)}{\mathrm{F}(0)}\right]^x$$

resp.

$$F(x) = [F(1) - F(0)]x + F(0),$$

a přejdeme-li zpět ku $f(A^x)$

$$f(A^x) = f(1)\left[\frac{f(A)}{f(1)}\right]^x$$

resp.

$$f(A^x) = [f(A) - f(1)]x + f(1).$$

Zavedše Lx za x, obdržíme vztahy

$$f(A^{Lx}) = f(1) \, . \left[\frac{f(A)}{f(1)}\right]^{Lx}$$

resp.

$$f(A^{Lx}) = [f(A) - f(1)]Lx + f(1),$$

anebo — což jest totéž —

$$f(x) = f(1) \, . \, x^{L[f(A)/f(1)]}$$

resp.

$$f(x) = [f(A) - f(1)] \, . \, Lx + f(1).$$

Výsledky tyto ukazují, že rovnicím (III) a (IV) opět hoví jedině funkce v podstatě své shodné s funkcemi $f_1(x)$, totiž výrazy ax^m a $aLx + b$, kdež a, b jsou neznámé dosud konstanty a L značí logarithmus v soustavě o libovolné basi $A > 0$; bylo však ukázáno, že jim de facto vyhovují funkce $af_1(x)$ a $af_1(x) + b$, kdež a, b značí zcela libovolné konstanty.

Funkce, hovící rovnici (III) resp. (IV), jest tudíž opět mocnina resp. logarithmus, t. j.

$$f(x) = ax^m$$

resp.

$$f(x) = aLx + b.$$

Tím problém řešen.

Jednoznačné a v libovolných mezích reálné proměnné x spojité funkce f(x) takové, že při jakékoliv funkci φ vyhovují rovnici

$$f(x)+f(y)=\varphi(x+y)$$

resp.

$$f(x)\,.\,f(y)=\varphi(x+y)\,,$$
$$f(x)\,.\,f(y)=\varphi(xy),$$
$$f(x)+f(y)=\varphi(xy),$$

jsou definovány funkcionální rovnicí

$$f(x)+f(y)=f(0)+f(x+y)$$

resp.

$$f(x)\,.\,f(y)=f(0)\,.\,f(x+y)\,,$$
$$f(x)\,.\,f(y)=f(1)\,.\,f(xy)\,,$$
$$f(x)+f(y)=f(1)+f(xy)\,,$$

a jsou vždy a jedině typu

$$f(x)=ax+b \qquad v\ mezích\ -\infty<x<+\infty$$

resp.

$$f(x)=a\mathrm{A}^x \qquad při\ \mathrm{A}>0\ a\ pro\ -\infty<x<+\infty\,,$$
$$f(x)=ax^m \qquad v\ mezích\ 0\leqq x<+\infty\,,$$
$$f(x)=a\,.\,{}^{A}\mathrm{L}x+b \qquad při\ \mathrm{A}>0\ a\ pro\ 0<x<+\infty\,,$$

kdež a, b, m, a, A značí ostatně zcela libovolné konstanty.

* * *

Problém 2. *Stanoviti komplexní funkce $f(x)=\varphi(x)+i\psi(x)$ reálné proměnné x tak, aby v libovolných reálných mezích proměnné x byly spojité a jednoznačné a pro každou reálnou hodnotu x a y hověly rovnici*

$$f(x+y)=f(x)+f(y) \tag{I'}$$

resp.

$$f(x+y)=f(x)\,.\,f(y)\,; \tag{II'}$$

a dále takové, jež v libovolných positivních mezích jsou spojité a pro každou reálnou positivnou hodnotu proměnných x a y hoví rovnici

$$f(xy)=f(x)\,.\,f(y) \tag{III'}$$

resp.

$$f(xy)=f(x)+f(y)\,. \tag{IV'}$$

Dosadíme-li do rovnice (I′) a (IV′) za $f(x)$ výraz

$$\varphi(x) + i\psi(x),$$

obdržíme relace

$$\varphi(x+y) + i\psi(x+y) = \varphi(x) + i\psi(x) + \varphi(y) + i\psi(y)$$
$$\varphi(xy) + i\psi(xy) = \varphi(x) + i\psi(x) + \varphi(y) + i\psi(y),$$

z nichž plynou, položíme-li koefficienty při $i = \sqrt{-1}$ sobě rovny, simultanní vztahy

$$\varphi(x+y) = \varphi(x) + \varphi(y)$$
$$\psi(x+y) = \psi(x) + \psi(y)$$

resp.

$$\varphi(xy) = \varphi(x) + \varphi(y)$$
$$\psi(xy) = \psi(x) + \psi(y).$$

Rovnice tyto řešeny byly v předchozím problému; funkce, jež jim vyhovují, jsou tvaru

$$\varphi(x) = x \, . \, \varphi(1) = ax$$
$$\psi(x) = x \, . \, \psi(1) = bx$$

resp.

$$\varphi(x) = \varphi(\mathrm{A}) \, . \, \mathrm{L}x = a\mathrm{L}x$$
$$\psi(x) = \psi(\mathrm{A}) \, . \, \mathrm{L}x = b\mathrm{L}x,$$

kdež a a b značí zcela libovolné konstanty, A libovolnou positivní konstantu a L logarithmus o basi A.

Funkce $f(x)$ definované rovnicí (I′) resp. (IV′) jsou tudíž funkce

$$f(x) = ax + ibx = (a + bi)\, x$$

resp.

$$f(x) = a\mathrm{L}x + ib\mathrm{L}x = (a + bi)\, \mathrm{L}x.$$

Ježto pak

$$f(1) = a + bi \text{ resp. } f(\mathrm{A}) = a + bi,$$

platí i pro komplexní funkce $f(x)$ vztah

$$f(x) = f(1)\, x$$

resp.

$$f(x) = f(\mathrm{A})\, \mathrm{L}x.$$

Funkce takto nabyté lze patrně obdržeti pouhou substitucí zcela libovolné imaginární konstanty $a + bi$ za reálnou konstantu a ve výrazech pro funkce $f(x)$, jež definovány byly týmiž rovnicemi v problému 1.

Sukcessivním použitím formulky (II') na hodnoty x_1, $x_2, \ldots, x_n$ a stanovením $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = x$ nabudeme výrazu

$$f(nx) = f(x)^n$$

a pro $x = 1$ resp. $x = \frac{1}{n}$ hodnoty

$$f(n) = [f(1)]^n = a^n \text{ resp. } f\left(\frac{1}{n}\right) = [f(1)]^{\frac{1}{n}},$$

odkudž plyne nutný požadavek $f(1) \gtrless 0$.

Značí-li a komplexní číslo, jehož trigonometrický tvar jest

$$a = A(\cos\alpha + i\sin\alpha)$$

— tudíž $A > 0$, α positivní neb negativní hodnota — obdržíme

$$f\left(\frac{1}{n}\right) = \sqrt[n]{a} = |\sqrt[n]{A}|.\left(\cos\frac{\alpha + 2k\pi}{n} + i\sin\frac{\alpha + 2k\pi}{n}\right)$$

a, značí-li m jakékoliv celé číslo,

$$f\left(\frac{m}{n}\right) = a^{\frac{m}{n}} = |A^{\frac{m}{n}}|.\left[\cos\frac{m}{n}(\alpha + 2k\pi) + i\sin\frac{m}{n}(\alpha + 2k\pi)\right],$$

kdež i k značí libovolné celistvé číslo. Pravá strana poslední rovnice jest závislá skutečně pouze na argumentu $\frac{m}{n}$, t. j.

$$f(x) = a^x,$$

značí-li x jakékoliv racionálné číslo.

Je-li φ_n racionálné číslo a $\xi = \lim \varphi_n$ při $n = \infty$ číslo irracionálné, platí zajisté

$$f(\varphi_n) = a^{\varphi_n} = |A^{\varphi_n}|.[\cos\varphi_n(\alpha + 2k\pi) + i\sin\varphi_n(\alpha + 2k\pi)];$$

roste-li nyní n do nekonečna, tu platí $\lim A^{\varphi_n} = A^{\xi}$, ale i

$$\lim \cos \varphi_n (\alpha + 2k\pi) = \cos \lim \varphi_n (\alpha + 2k\pi)$$
$$\lim \sin \varphi_n (\alpha + 2k\pi) = \sin \lim \varphi_n (\alpha + 2k\pi)$$

vzhledem na spojitost funkcí cosinusu a sinusu pro jakýkoliv
eálný argument; tím nabudeme pro $f(\xi)$ hodnoty
r

$$f(\xi) = |A^{\xi}| . [\cos \xi (\alpha + 2k\pi) + i \sin \xi (\alpha + 2k\pi)] = a^{\xi},$$

kdež k značí celistvé číslo.

Spojitá komplexní funkce reálného argumentu x, hovící funkcionální rovnici (II′), má tudíž formu

$$f(x) = a^x = |A^x| . [\cos x (\alpha + 2k\pi) + i \sin x (\alpha + 2k\pi)],$$

kdež $a = |A| . (\cos \alpha + i \sin \alpha)$ značí zcela libovolnou komplexní konstantu; neboť při jakémkoliv a platí identicky

$$a^x . a^y = a^{x+y}.$$

Trigonometrický tvar pro funkci $f(x) = a^x$ ukazuje, že $f(x)$ má hodnotu jednu, konečný neb nekonečný počet hodnot podle toho, je-li x číslo celistvé, lomené neb irracionálné.

Omezíme-li se na oblouky v mezích $-\pi < \alpha \leqq \pi$, pak zove se hodnota pro a^x, příslušící $k = 0$, hlavní hodnotou [1]) funkce a^x, t. j. hlavní hodnota funkce definované rovnicí (II′) jest

$$a^x = |A^x| . (\cos x\alpha + i \sin x\alpha), \quad -\pi < \alpha \leqq \pi.$$

Rovnici (II′) uveďme substitucí $x = A^{Lx}$ — $A > 0$ a L označení pro logarithmus v soustavě o basi A — na známou již formu

$$f(A^{Lx+Ly}) = f(A^{Lx}) . f(A^{Ly})$$

čili

$$f(A^{x+y}) = f(A^x) . f(A^y),$$

---

[1]) Název „hlavní hodnota“ (Hauptwerth) zavedl Weierstrass. Dle návrhu G. Björlinga Cauchy užíval názvu racine resp. logarithm, puissance „principale“. S Weierstrassovým označením obdobné jest anglické pojmenování „the principal branch“.

ježto v rovnici té Lx a Ly značiti mohou jakákoliv reálná čísla positivní a negativní, aneb konečně

$$F(x+y) = F(x) \, . \, F(y),$$

značí-li $F(x) = f(A^x)$.

Řešení rovnice této jest $F(x) = a^x$, takže obdržíme

$$f(A^x) = a^x,$$

a přejdeme-li k logarithmu Lx,

$$f(A^{Lx}) = a^{Lx} = |\,B\,|^{Lx} \, . \, [\cos\alpha + i \sin\alpha]^{Lx}$$

aneb — což jest totéž —

$$f(x) = x^{La} = x^{L|B|} \, . \, [\cos(\alpha Lx) + i \sin(\alpha Lx)].$$

Ježto $|\,B\,| > 0$, jsouc modulem komplexního čísla a, jest $L\,|\,B\,|$ jakékoliv reálné positivné neb negativné číslo; α jest rovněž zcela libovolné číslo reálné. Neboť pro každé reálné LB a α splněna jest relace

$$f(x) \, . \, f(y) = f(xy)$$

identicky.

Spojité komplexní funkce $f(x)$ reálného argumentu x, hovící funkcionálním rovnicím

$$\begin{aligned} f(x+y) &= f(x) + f(y), \\ f(x+y) &= f(x) \, . \, f(y), \\ f(xy) &= f(x) \, . \, f(y), \\ f(xy) &= f(x) + f(y), \end{aligned}$$

jsou funkce

$$\begin{aligned} f(x) &= (a+bi)\,x, \\ f(x) &= A^x \, . \, [\cos x\,(a+2k\pi) + i \sin x\,(a+2k\pi)], \\ f(x) &= x^a \, . \, [\cos(bLx) + i \sin(bLx)], \\ f(x) &= (a+bi) \, . \, Lx, \end{aligned}$$

kdež a, b značí zcela libovolné reálné, A libovolnou positivní konstantu reálnou, k celistvé reálné číslo a L logarithmus v soustavě o libovolné kladné basi.

Vzhledem k řešení problému 1. nahlédneme snadno, že *funkce*

$$f(x) = a + bx + (c + dx)\,i,$$
$$f(x) = aA^{x}\,.\,[\cos\{b + x\,(c + 2k\pi)\} + i \sin\{b + x\,(c + 2k\pi)\}],$$
$$f(x) = ax^{m}\,.\,[\cos\{bL\,(cx)\} + i \sin\{bL\,(cx)\}],$$
$$f(x) = a + bLx + [c + dLx]i$$

— *z nichž plynou hodnoty*

$$f(0) = a + ci,$$
$$f(0) = a\,[\cos b + i \sin b],$$
$$f(1) = a\,[\cos(bLc) + i \sin(bLc)],$$
$$f(1) = a + ci$$

a kdež a, b, c, d, m značí zcela libovolné reálné konstanty, k celistvé reálné číslo a L logarithmus v soustavě o kladné basi — jsou jediné komplexní funkce reálného argumentu, definované funkcionálními rovnicemi

$$f(x) + f(y) = f(0) + f(x + y),$$
$$f(x)\,.\,f(y) = f(0)\,.\,f(x + y),$$
$$f(x)\,.\,f(y) = f(1)\,.\,f(xy),$$
$$f(x) + f(y) = f(1) + f(xy),$$

a tudíž jediné výrazy, hovící relacím (1), (2), (3), (4) předchozího problému.

Příslušný důkaz jest úplné analogon důkazu v problému 1.

* * *

Problém 3. *Stanoviti spojité funkce $f(x)$ komplexního argumentu $x = \xi + i\eta$ tak, aby při libovolném x a y hověly funkcionální rovnici*

$$\text{(I}'\text{)} \qquad f(x + y) = f(x) + f(y)$$

resp.

$$\text{(II}'\text{)} \qquad f(x + y) = f(x)\,.\,f(y),$$
$$\text{(III}'\text{)} \qquad f(xy) = f(x)\,.\,f(y),$$
$$\text{(IV}'\text{)} \qquad f(xy) = f(x) + f(y).$$

Jednalo-li by se o komplexní funkce v nejširším smyslu [1]) slova toho, pak druhé z uvedených funkcionálních rovnic hověla by na př. funkce

$$f(x) = a^{\xi} . b^{\eta},$$

kdež a, b jsou libovolné komplexní konstanty

$$a = \mathrm{A} (\cos \alpha + i \sin \alpha)$$
$$b = \mathrm{B} (\cos \beta + i \sin \beta),$$

t. j. funkce

$$f(x) = \mathrm{A}^{\xi} \mathrm{B}^{\eta} . [\cos (\alpha\xi + \beta\eta) + i \sin (\alpha\xi + \beta\eta)];$$

neboť, značí-li $y = \xi_1 + i\eta_1$, jest $f(y) = a^{\xi_1} . b^{\eta_1}$ a relace

$$f(x) . f(y) = a^{\xi+\xi_1} . b^{\eta+\eta_1} = f(x+y)$$

ukazuje, že podmínce (II′) jest vyhověno.

Není-li však b zcela určitou funkcí konstanty a, není funkce $f(x) = a^{\xi} . b^{\eta}$ vůbec analytickou. Dlužno tudíž přibrati ještě tu podmínku, aby funkce definované rovnicemi (I′), (II′), (III′) a (IV′) byly *analytickými.*

Vzhledem k řešení rovnice (I′) v předchozích problémech můžeme předpokládati, že funkce rovnici této hovící jest tvaru

$$f(x) = a (\xi + i\eta) = ax,$$

kdež a značí libovolnou komplexní konstantu $\alpha + \beta i$; skutečně pak, značí-li opět $y = \xi_1 + \eta_1 i$, jest relací

$$f(x) + f(y) = a [\xi + \xi_1 + (\eta + \eta_1) i] = f(x+y)$$

verifikováno řešení $f(x) = ax$ pro komplexní a i x. Z učiněné pak supposice o $f(x)$, totiž býti analytickou, plyne, že

$$f(x) = \alpha\xi - \beta\eta + (\beta\xi + \gamma\eta) i$$

jest jedinou funkcí žádaných vlastností, jež hoví předložené funkcionální rovnici (I′).

---

[1]) Viz na př. *Cauchy*, Comptes rendus, Tome 32, p. 161. neb *Stolz*, Arithmetik, II. Theil, p. 82.

Jednoznačná analytická funkce $f(x)$ komplexního argumentu $x = \xi + i\eta$ má tu vlastnost, že každému nesingulárnímu bodu a přiřaditi lze positivní číslo δ takové, že pro všechny hodnoty x hovící podmínce $|x - a| < \delta$ příslušné hodnoty $f(x)$ vyjádřeny jsou konečnou neb nekonečnou potenční řadou argumentu $x—a$.

Máme tedy dle označení Weierstrassova

$$f(x) = \mathfrak{P}(x - a).$$

Jelikož z funkcionální rovnice (II′) plyne, že pro $x = 0$ jest $f(0) = 1$, tedy hodnotě konečné, zkusme, zdali by bylo možno funkci rovnici (II′) hovící vyjádřiti potenční řadou $\mathfrak{P}$ při $a = 0$, t. j. zda-li lze položiti

$$(1)\qquad f(x) = \mathfrak{P}(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n + \ldots.$$

Dosadíme-li za $f(x)$, $f(y)$ a $f(x+y)$ příslušné potenční řady do rovnice (II′) a provedeme-li násobení na pravé straně, obdržíme výraz

$$\begin{aligned} & a_0 + a_1(x+y) + a_2(x^2 + 2xy + y^2) + \ldots \\ & + (m+n)_m a_{m+n} x^m y^n + \ldots \\ & = a_0^2 + a_0 a_1 (x+y) + a_0 a_2 (x^2 + y^2) + a_1^2 xy + \ldots \\ & + a_m a_n x^m y^n + \ldots \end{aligned}$$

a ježto koëfficienty u $x^m y^n$ na obou stranách sobě rovnati se musejí [1]), jednoduchý vztah

$$(2)\qquad a_m a_n = \binom{m+n}{m} a_{m+n} \text{ při } \left.\begin{matrix} m \\ n \end{matrix}\right\} = 0, 1, 2, \ldots,$$

z něhož pro $m = n = 0$ plyne $a_0^2 = a_0$, t. j. $a_0 = 0$ neb $a_0 = 1$.

Předpoklad $a_0 = 0$ měl by však za následek $a_m = 0$, t. j. i $f(x) \equiv 0$, což jest nepřípustné; jest tudíž $a_0 = 1$.

Klademe-li $m = 1$, $n = 1, 2, 3, \ldots$, obdržíme rovnice

$$a_1^2 = 2a_2,\ a_1 a_2 = 3a_3, \ldots,\ a_1 a_{n-1} = n a_n, \ldots$$

[1]) Důkaz této věty viz na př.: *Stolz*, Arithmetik, I. Theil, p. 294.

a jich vzájemným násobením vzorec [1])

(3) $$a_n = \frac{a_1^n}{n!},$$

ježto žádné z čísel a_1, a_2, ... annullovati se nemůže.

Výraz (3) hoví de facto relaci (2) vzhledem k identitě

$$\binom{m+n}{m} = \frac{(m+n)!}{m!\,n!}.$$

Potenční řada $\mathfrak{P}(x)$ má tedy tvar

(4) $$\mathfrak{P}(x) = 1 + a_1 x + \frac{(a_1 x)^2}{2!} + \ldots + \frac{(a_1 x)^n}{n!} + \ldots$$

a konverguje absolutně pro jakékoliv konečné x. Dosazením $\mathfrak{P}(x)$ do rovnice (II') lze se přesvědčiti, že nalezená potenční řada jí vskutku vyhovuje a že jest tudíž jejím řešením, nechť a_1 značí jakoukoliv konstantu různou od nully.

Z rovnice (II') plyne hodnota $f(1) = a$, kdež a značí rovněž libovolnou konstantu; pro $x = 1$ vyplývá z potenční řady $\mathfrak{P}(x)$ souvislost mezi a a a_1, totiž

(5) $$\mathfrak{P}(1) = a = 1 + a_1 + \frac{a_1^2}{2!} + \ldots + \frac{a_1^n}{n!} + \ldots.$$

Jest však otázkou, zda-li existují takové hodnoty a_1, jež splňují rovnici (5); položíme-li $a_1 = 1$, obdržíme

$$\mathfrak{P}(1) = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \ldots + \frac{1}{n!} + \ldots = e,$$

kdež e značí basi přirozených logarithmů; hodnota $a_1 = 1$ hoví tedy relaci (5). Označíme-li příslušnou řadu $\mathfrak{P}(x)$ symbolem $\mathrm{E}(x)$, máme

(6) $$\mathrm{E}(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots,$$

dále

---

[1]) Srovnej *Studnička*, Výklady o funkcích monoperiodických. V Praze, 1892, p. 167—169.

$$(7) \qquad E(x) \, . \, E(y) = E(x+y)$$

a hodnoty

$$E(1) = e, \quad E(a_1) = a, \quad E(0) = 1.$$

Substitucí xi za x do rovnice (6) nabudeme relace

$$E(xi) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots + i\left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots\right)$$

čili stručně

$$(8) \qquad E(xi) = C(x) + iS(x),$$

kdež $C(x)$ a $S(x)$ značí konvergentní řady

$$(9) \qquad \begin{aligned} C(x) &= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots \\ S(x) &= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots . \end{aligned}$$

Je-li v $x = \xi + i\eta$ proměnná $\eta = 0$, obdržíme z (8) relaci

$$E(\xi i) = C(\xi) + iS(\xi);$$

jelikož však $C(\xi)$ a $S(\xi)$ při reálném ξ jsou vzhledem k jich definici rovnicemi (9) známé funkce $\cos\xi$ a $\sin\xi$, můžeme psáti

$$(10) \qquad E(\xi i) = \cos\xi + i\sin\xi = e^{i\xi};$$

definujeme-li pak funkce cosinus a sinus i pro komplexní argument x týmiž řadami, t. j. řadami (9), plyne z (8) vztah

$$(11) \qquad E(xi) = \cos x + i\sin x = e^{ix}.$$

Uvažujme nyní rovnici

$$E(x) = 1.$$

Dosadivše $\xi + i\eta$ za x, obdržíme pomocí relací (7) a (11) rovnice

$$E(\xi)\cos\eta = 1,\ E(\xi)\sin\eta = 0,$$

z nichž plyne

$$\eta = 2k\pi \text{ a } E(\xi) = 1, \text{ t. j. } \xi = 0.$$

Tím dojdeme výsledku

$$E(i\eta) = 1 \text{ při } \eta = 2k\pi$$

čili

$$E(2k\pi i) = 1 \text{ při } \pm k = 0, 1, 2, \ldots$$

a vzhledem k (7)

$$E(x + 2k\pi i) = E(x) \text{ pro } \pm k = 0, 1, 2, \ldots. \tag{12}$$

Jest tudíž funkce $E(x)$ periodická a sice o periodě $2\pi i$.

Jedná se nyní o řešení rovnice $E(a_1) = a$, kdež a značí komplexní konstantu $A(\cos\alpha + i\sin\alpha)$, $A > 0$. Jako při předchozím řešení obdržíme pomocí relací (7) a (11) z rovnice

$$E(a_1) = A(\cos\alpha + i\sin\alpha) \tag{13}$$

vztahy

$$E(\xi)\cos\eta = A\cos\alpha$$

$$E(\xi)\sin\eta = A\sin\alpha,$$

jich zdvojmocněním a sečtením

$$[E(\xi)]^2 = A^2, \text{ t. j. } E(\xi) = e^{\xi} = A$$

a logarithmováním v soustavě o basi e hodnotu

$$\xi = lA,$$

načež i rovnice

$$\cos\eta = \cos\alpha, \quad \sin\eta = \sin\alpha.$$

Je-li oblouk α v mezích $-\pi < \alpha \leqq \pi$, pak rovnicím posledním hoví patrně jen jediné $\eta = \alpha$.

Tím nabudeme pro kořen rovnice (13) výrazu

$$a_1 = lA + \alpha i;$$

vzhledem pak k relaci (12) hoví rovnici (13) jakožto kořeny hodnoty

$$a_1 = l\mathrm{A} + (\alpha + 2k\pi)i\,, \quad \pm k = 0\,,\ 1\,,\ 2\,,\ \ldots$$

čili stručně

$$a_1 = \mathrm{L}a = la + 2k\pi i\,.$$

Hodnota la zove se hlavní hodnotou logarithmu $\mathrm{L}a$.

Z rovnice (6) obdržíme, kladouce $a_1 x = x\mathrm{L}a$ za x, rovnici (4). Jest tudíž funkce

$$\mathfrak{P}(x) = \mathrm{E}(x\mathrm{L}a) = e^{x\mathrm{L}a} = a^x\,,$$

kdež $\mathrm{L}a$ značí libovolnou, ale zcela určitou hodnotu přirozeného logarithmu čísla a, jediným řešením funkcionální rovnice (II′).

Ježto pak

$$\mathrm{E}(x\mathrm{L}a) = \mathrm{E}(xla)\,.\,\mathrm{E}(2k\pi xi)\,,$$

můžeme též psáti

$$\mathfrak{P}(x) = a^x = \mathrm{E}(xla)\,.\,\mathrm{E}(2k\pi xi)\,.$$

Hodnota $\mathrm{E}(xla)$ zove se hlavní hodnotou exponentiely a^x.

Položíme-li

$$x = \xi + \eta i\,, \qquad a = \mathrm{A}(\cos\alpha + i\sin\alpha)\,, \qquad \alpha' = \alpha + 2k\pi$$

a

$$\mathrm{L}a = l\mathrm{A} + \alpha' i\,,$$

obdržíme

$$x\mathrm{L}a = \xi l\mathrm{A} - \eta\alpha' + (\xi\alpha' + \eta l\mathrm{A})i$$

a pro exponentielu a^x výraz

$$a^x = \mathrm{A}^{\xi} e^{-\eta\alpha'}\,.\,[\cos(\xi\alpha' + \eta l\mathrm{A}) + i\sin(\xi\alpha' + \eta l\mathrm{A})]\,.$$

Její hlavní hodnota dána jest týmž výrazem, zaměníme-li α' za α; neboť tím supponujeme $k = 0$.

Srovnáme-li výsledek tento s výrazem pro funkci

$$f(x) = a^{\xi}.\,b^{\eta}$$

na počátku této úvahy, shledáváme, že musí

$$B = e^{-(\alpha+2k\pi)} \text{ a } \beta = lA,$$

t. j.

$$b = e^{-(\alpha+2k\pi)} . (\cos lA + i \sin lA) = f(\alpha, A),$$

má-li funkce $a^{\xi} b^{\eta}$ býti analytickou funkcí argumentu $x = \xi + i\eta$ Poslední rovnice udává onen vztah mezi konstantou b a konstantou a, o němž se byla stala zmínka[1].

Z funkcionální rovnice komplexní funkce a^x plyne přímo, že funkci tuto lze rozvinouti v potenční řadu kol bodu $x = 0$, t. j. že $a^x = \mathfrak{P}(x)$. Neboť, je-li funkce tato vůbec analytickou, musí existovati aspoň jeden takový bod x_0, pro nějž by platil vývoj

$$a^x = \sum_0^\infty {}^{\varkappa} A_\varkappa (x - x_0)^\varkappa .$$

Položme $x - x_0 = y$, t. j. $x = y + x_0$; pomocí funkcionální rovnice (II′) obdržíme pro hodnoty tyto vztah

$$f(x) = f(y + x_0) = f(y) . f(x_0) = \sum_0^\infty {}^{\varkappa} A_\varkappa y^\varkappa$$

čili

$$f(y) = \frac{1}{f(x_0)} \sum_0^\infty {}^{\varkappa} A_\varkappa y^\varkappa ;$$

---

[1] Vztah ten jest následující:

Logarithmujeme-li rovnici $b = f(\alpha, A)$ v soustavě o basi e, obdržíme vzhledem ku $\cos(lA) + i \sin(lA) = e^{ilA}$ — berouce hlavní hodnoty —

$$lb = -(\alpha + 2k\pi) + ilA = i[lA + (\alpha + 2k\pi)i];$$

stejně platí

$$la = lA + \alpha i, \text{ tedy } lb = il(a . e^{2k\pi i}).$$

Jelikož pak $E(2k\pi i) = 1$, nabudeme vztahu

$$lb = ila = la^i,$$

t. j.

$$b = a^i .$$

Dosadivše hodnotu tuto do funkce $a^\xi b^\eta$, máme opět

$$a^\xi a^{i\eta} = a^{\xi + i\eta} = a^x$$

jakožto hledanou analytickou funkci.

jelikož pak $\frac{1}{f(x_0)}$ jest konstantou, platí zajisté pro libovolné komplexní číslo x řada dle potencí čísla x

$$f(x) = \frac{1}{f(x_0)} \cdot \sum_0^\infty {}_\varkappa A_\varkappa x^\varkappa ,$$

jak bylo dokázati.

Z relace této plyne dále, že funkce $f(x)$ jest v každém bodě x_0 rozvinutelna v potenční řadu typu $\Sigma A_\varkappa (x - x_0)^\varkappa$. Neboť funkcionální rovnice (II′), applikována na identitu

$$f(x) = f(x_0 + \overline{x - x_0}) ,$$

podává relaci

$$f(x) = f(x_0) \cdot f(x - x_0) = f(x_0) \sum_0^\infty {}_\varkappa A_\varkappa (x - x_0)^\varkappa ,$$

nechť x_0 jest jakákoliv hodnota, a ukazuje krom toho, že funkce a^x nemůže býti nikdy rovna nulle, neboť by pro každý kořen x_0 rovnice $f(x_0) = 0$ byla při jakémkoliv x splněna rovnice

$$f(x) = f(x_0) \cdot \sum_0^\infty {}_\varkappa A_\varkappa (x - x_0)^\varkappa = 0$$

identicky.

Funkce tato nestává se v celé rovině čísel $x = \xi + i\eta$, $|x| < M$, ani nekonečnou ani se neannulluje; jest tedy v celé rovině čísel x monogenní[1]).

Co se týče rovnice (III′), tu možno předpokládati se zřetelem k příslušným řešením v problémech předchozích, že jí vyhovovati bude funkce

$$f(x) = x^m ,$$

kdež však m značí libovolnou komplexní konstantu.

---

[1]) Název ten dle *Cauchyho*: „fonction monogène". *Briot* a *Bouquet* užívají pro tentýž pojem výrazu „fonction homolorphe"; *Weierstrass* pak „Funktion vom Charakter der ganzen Funktionen" aneb stručně „ganze Funktion".

Skutečně výraz tento vyhovuje rovnici (III'); neboť

$$x^{a+bi} \cdot y^{a+bi} = (xy)^a \cdot (xy)^{bi} = (xy)^{a+bi},$$

takže pro $f(x) = x^m$ jest funkcionální rovnice

$$f(xy) = f(x) \cdot f(y)$$

splněna identicky.

Jedná se však o to, zdali funkce tato jest i analytickou; aby jí byla, musí dle definice takovýchto funkcí býti schopna rozvoje v řadu dle potencí jistého argumentu $x - x_0$, t. j. musí býti definována řadou

$$f(x) = \mathfrak{P}(x - x_0) = \sum_0^\infty {}_\varkappa a_\varkappa (x - x_0)^\varkappa,$$

kdež x_0 jest neznámá dosud hodnota.

Pomocí identity

$$f(x) = f\left(x_0\left\{1 + \frac{x - x_0}{x_0}\right\}\right) = f(x_0) \cdot f\left(1 + \frac{x - x_0}{x_0}\right)$$

obdržíme, píšíce y místo $\frac{x - x_0}{x_0}$, řadu

$$f(1 + y) = \frac{1}{f(x_0)} \sum_0^\infty {}_\varkappa a_\varkappa x_0^\varkappa y^\varkappa$$

a z ní po substituci x za y a

$$b_\varkappa = \frac{a_\varkappa x_0^\varkappa}{f(x_0)},$$

přípustné vzhledem k tomu, že x_0 a $f(x_0)$ jsou konstanty, rozvoj

$$f(x) = \sum_0^\infty {}_\varkappa b_\varkappa x^\varkappa.$$

Konklusí tedy jest: Lze-li funkci $f(x)$ rozvinouti dle potencí argumentu $x - x_0$, lze $f(1 + x)$ rozvinouti v řadu dle potencí argumentu x. Jelikož pak $f(x) = x^m$, jest $f(1+x) = (1+x)^m$; jedná se tudíž o řadu dle potencí x pro binom $(1+x)^m$, je-li m libovolná komplexní konstanta.

Řešení problému tohoto, s velkými početními obtížemi spojeného, podal slavný Niels Henrik Abel[1]).

Analytickou funkcí komplexního argumentu x, hovící funkcionální rovnici (III'), jest tedy

$$f(x) = x^m$$

při libovolném stálém komplexním m.

Řešení funkcionální rovnice (IV').

Aby existovala analytická funkce $f(x)$ vyhovující relaci (IV'), musí pro jistý nesingulární bod x_0 býti definována konvergentní potenční řadou

$$f(x) = \mathfrak{P}(x - x_0) = a_0 + a_1(x - x_0) + \ldots + a_n(x - x_0)^n + \ldots,$$

kdež x_0 jest hodnota dosud neznámá. Za této supposice musí též se zřetelem k identitám

$$f(x) = f(x_0) + f\left(1 + \frac{x - x_0}{x_0}\right),$$

$$f(x) = b_0 + b_1 \frac{x - x_0}{x_0} + \ldots + b_n \left(\frac{x - x_0}{x_0}\right)^n + \ldots,$$

$$f(x_0) = a_0 = b_0, \text{ tedy i } f(x_0) = \mathfrak{P}(0) = b_0\,,$$

při čemž b_n značí hodnotu $a_n x_0^n$, platiti vztah

$$f(1 + y) = \sum_1^\infty {}_\varkappa b_\varkappa y^\varkappa$$

— klademe-li $y = \dfrac{x - x_0}{x_0}$ — a z této relace substitucí $y = x - 1$ potenční řada pro funkci $f(x)$, t. j.

---

[1]) *Abel,* Oeuvres complètes 1881, Tome I., p. 219—246.

$$f(x) = \sum_{1}^{\infty} {}_{\varkappa} b_{\varkappa}(x-1)^{\varkappa} = \mathfrak{P}(x \quad 1)\,;$$

jest tedy patrně oním hledaným nesingulárním bodem bod odpovídající hodnotě $x_0 = 1$. Odtud plyne: Lze-li funkci $f(x)$ rozvinouti dle potencí argumentu $x - x_0$, lze i $f(1 + x)$ rozvinouti v řadu dle potencí x.

Nahradivše v identitě

$$f(1 + x + y) = f(1 + x) + f\left(1 + \frac{y}{1 + x}\right)$$

funkce f příslušnými potenčními řadami, nabudeme relace

$$b_1(x + y) + b_2(x + y)^2 + \ldots + b_m(x + y)^m + \ldots$$
$$= b_1 x + b_2 x^2 + \ldots + b_n x^n + \ldots$$
$$+ b_1 \frac{y}{1 + x} + b_2\left(\frac{y}{1 + x}\right)^2 + \ldots + b_m\left(\frac{y}{1 + x}\right)^m + \ldots,$$

z níž po srovnání koefficientů na obou stranách u y^m dojdeme, použivše binomického theorému, vztahu

$$b_m + b_{m+1}(m + 1)_1 x + \ldots + b_{m+n}(m + n)_n x^n + \ldots$$
$$= b_m + (-m)_1 b_m x + (-m)_2 b_m x^2 + \ldots + (-m)_n x^n + \ldots.$$

Dle methody neurčitých koëfficientů shledáme, že tento vztah vyžaduje rovnici

$$b_{m+n}\,(m + n)_n = b_m\,(-m)_n$$

pro $m = 1, 2, 3, \ldots$; pro $m = 1$ máme

$$b_{n+1} = (-1)^n \frac{b_1}{n+1}\,;$$

dosadivše výsledek tento do rovnice předchozí, přesvědčíme se, že jest pokaždé splněna identicky, takže tento nekonečný počet rovnic neobsahuje žádného rozporu.

V konvergenční oblasti jest tedy potenční řadou

$$f(x) = b_1\left[x - 1 - \frac{(x-1)^2}{2} + \ldots + \frac{(-1)^{n-1}(x-1)^n}{n} + \ldots\right]$$

definována funkce, hovící funkcionální rovnici (IV′).

Ježto pak patrně

$$f(1+x) = b_1 . \sum_1^\infty{}_k (-1)^{k-1} . \frac{x^k}{k},$$

jest

$$e^{f(1+x)} = e^{b_1 . \Sigma (-1)^{k-1} . \frac{x^k}{k}}$$

při jakémkoliv b_1; kladouce $x = \xi$, t. j. $\eta = 0$, obdržíme relaci

$$e^{f(1+\xi)} = e^{b_1\left(\xi - \frac{\xi^2}{2} + \ldots\right)} = 1 + \beta_1\xi + \beta_2\xi^2 + \beta_3\xi^3 + \ldots.$$

Pak víme, že existuje zajisté taková reálná hodnota pro b_1, že splněna jest rovnice

$$e^{b_1\left(\xi - \frac{\xi^2}{2} + \ldots\right)} = 1 + \xi,$$

t. j. že

$$e^{f(1+\xi)} = 1 + \xi \equiv e^{l(1+\xi)}$$

čili

$$f(1+\xi) = l(1+\xi)$$ [1].

Hoví tudíž funkcionální rovnici (IV′) funkce

$$b_1 l(1+x) = b_1 . \sum_1^\infty{}_k (-1)^{k-1} . \frac{x^k}{k},$$

aneb, položíme-li

$$b_1 = \frac{1}{la} = \lg e,$$

kdež lg značí logarithmus o basi a,

---

[1]) Důkaz toho viz na př. *Thomae*, Elem. Theorie der Funktionen einer complexen Variabelen, 1880.

$$f(1+x) = \lg(1+x) = \lg e \,.\, \sum_1^\infty (-1)^{k-1} \,.\, \frac{x^k}{k},$$

t. j.

$$f(x) = \lg x.$$

Značí-li a libovolnou komplexní konstantu, hoví funkcionální rovnici (IV′) obecně funkce

$$f(x) = a \lg x.$$

Spojité analytické funkce komplexního argumentu x, hovící funkcionálním rovnicím (I′) resp. (II′), (III′), (IV′) jsou funkce

$$f(x) = ax$$

resp.

$$f(x) = a^x,$$
$$f(x) = x^m,$$
$$f(x) = a \,.\, {}^A\mathrm{L}x,$$

kdež a značí libovolnou komplexní konstantu a L logarithmus soustavy o reálné basi $A > 0$.

Se zřetelem na předchozí obdobná řešení nahlédneme snadno, že *funkce*

$$f(x) = ax + b$$

resp.

$$f(x) = b \,.\, a^x,$$
$$f(x) = a \,.\, x^m,$$
$$f(x) = a \,.\, \mathrm{L}x + b$$

jsou jediné analytické funkce konplexního argumentu $x = \xi + i\eta$, vyhovující rovnicím

$$\varphi(x+y) = f(x) + f(y)$$

resp.

$$\varphi(x+y) = f(x) \,.\, f(y),$$
$$\varphi(xy) = f(x) \,.\, f(y),$$
$$\varphi(xy) = f(x) + f(y);$$

při tom značí a, b, m zcela libovolné komplexní konstanty, L pak logarithmus v soustavě o kladné reálné basi.

* * *

II. Stanovení integrálů funkcí, hovících určitým podmínkám.

Hoví-li spojité funkce $\varphi(x, y)$ a $\psi(x, y)$ podmínce

$$(1) \qquad \frac{\partial \varphi(x, y)}{\partial y} = \frac{\partial \psi(x, y)}{\partial x}$$

a jsou-li i tyto derivace spojitými funkcemi, jest v platnosti relace *) (Cauchyova)

$$(2) \qquad \int_{x_0}^{x} [\varphi(x, y)]_{y_0}^{y} dx = \int_{y_0}^{y} [\psi(x, y)]_{x_0}^{x} dy.$$

Hoví-li spojité funkce $f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x)$ rovnici

$$(3) \qquad \Phi[\varphi(x, y)] = \mathrm{F}[f_1(x), f_1(y), \ldots, f_n(x), f_n(y)]$$

a jsou-li i parciálné derivace

$$\frac{\partial}{\partial y}\left[\Phi \frac{\partial \varphi}{\partial x}\right] = \frac{\partial}{\partial y}\left[\mathrm{F} . \frac{\partial \varphi}{\partial x}\right]$$
$$\frac{\partial}{\partial x}\left[\Phi \frac{\partial \varphi}{\partial y}\right] = \frac{\partial}{\partial x}\left[\mathrm{F} . \frac{\partial \varphi}{\partial y}\right]$$

funkcemi spojitými, pak platí

$$(4) \qquad \int_{x_0}^{x} \left[\mathrm{F} . \frac{\partial \varphi}{\partial x}\right]_{y_0}^{y} dx = \int_{y_0}^{y} \left[\mathrm{F} . \frac{\partial \varphi}{\partial y}\right]_{x_0}^{x} dy.$$

Rovnice (1) jest totiž splněna identicky; neboť ježto

$$\frac{\partial}{\partial y}\left[\mathrm{F} \frac{\partial \varphi}{\partial x}\right] = \frac{\partial \mathrm{F}}{\partial y} . \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \mathrm{F} . \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y}$$

a

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[\mathrm{F} \frac{\partial \varphi}{\partial y}\right] = \frac{\partial \mathrm{F}}{\partial x} . \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \mathrm{F} . \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y}$$

---

*) Viz na př. *Serret*, Cours de calcul différentiel et intégral, 4. Ed. 1894. Tome II. p. 114.

a ježto vzhledem ku (3) jest

$$\frac{\partial F}{\partial y} = \frac{d\Phi}{d\varphi} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial y}$$

a

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{d\Phi}{d\varphi} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial x},$$

plyne z relací těchto

$$\frac{\partial F}{\partial y} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial F}{\partial x} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial y}$$

a tudíž i

$$(5) \qquad \frac{\partial}{\partial y}\left[F \frac{\partial \varphi}{\partial x}\right] = \frac{\partial}{\partial x}\left[F \frac{\partial \varphi}{\partial y}\right].$$

Applikace relace (4).

1. *Stanoviti integrály spojitých funkcí $f(x)$ hovících rovnici*

$$\text{(I)} \qquad \Phi(x+y) = f(x) + f(y),$$

resp.

$$\text{(II)} \qquad \Phi(x+y) = f(x) \cdot f(y),$$

$$\text{(III)} \qquad \Phi(xy) = f(x) \cdot f(y),$$

$$\text{(IV)} \qquad \Phi(xy) = f(x) + f(y).$$

Jelikož jsou funkce $f(x)$ dle supposice spojité, jest patrně pokaždé i funkce F spojitou, rovněž funkce φ, $\frac{\partial \varphi}{\partial x}$, $\frac{\partial \varphi}{\partial y}$; ježto pak

$$\frac{\partial F}{\partial x} = f'(x) \text{ resp. } f(y) \cdot f'(x),$$

vyžaduje applikace Cauchy-ovy relace, aby pokaždé také derivace funkce $f(x)$ byla spojitou. Za těchto tedy supposicí použivše relace (4) obdržíme

$$\int_{x_0}^{x} [f(x) + f(y)]_{y_0}^{y} \, dx = \int_{y_0}^{y} [f(x) + f(y)]_{x_0}^{x} \, dy$$

resp.

$$\int_{x_0}^{x} [f(x) f(y)]_{y_0}^{y} \, dx = \int_{y_0}^{y} [f(x) f(y)]_{x_0}^{x} \, dy \,,$$

$$\int_{x_0}^{x} [f(x) f(y) \, y]_{y_0}^{y} \, dx = \int_{y_0}^{y} [f(x) f(y) \, x]_{x_0}^{x} \, dy \,,$$

$$\int_{x_0}^{x} [\{f(x) + f(y)\} \, y]_{y_0}^{y} \, dx = \int_{y_0}^{y} [\{f(x) + f(y)\} \, x]_{x_0}^{x} \, dy \,.$$

Z první z těchto rovnic plyne po krátké redukci

$$\frac{[f(y)]}{[y]} = \frac{[f(x)]}{[x]} = \mathrm{A},$$

kdež A značí patrně jistou konstantu, takže pro $x_0 = 0$ a pak pro $x = 1$ nabudeme výrazů

$$f(x) - f(0) = \mathrm{A}x$$
$$f(1) - f(0) = \mathrm{A};$$

integrujíce výraz $f(x) = f(0) + \mathrm{A}x$ obdržíme hledaný integrál.

Integrály funkcí hovících rovnici (I) mají tudíž tvar

$$\int f(x) \, dx = [f(1) - f(0)] \frac{x^2}{2} + f(0) \, x + \mathrm{C}$$

— kdež C značí arbitrární konstantu.

Z druhé rovnice vyplývá

$$\frac{\int_{x_0}^{x} f(x) \, dx}{f(x) - f(x_0)} = \frac{\int_{y_0}^{y} f(y) \, dy}{f(y) - f(y_0)} = \mathrm{A} \,,$$

t. j.

$$\int_{x_0}^{x} f(x) \, dx = \mathrm{A} \, [f(x)]_{x_0}^{x} \,;$$

differencujíce relaci tuto dle horní proměnné meze x, obdržíme, kladouce $x = 0$, hodnotu

$$A = \frac{f(0)}{f'(0)},$$

a tudíž pro integrál funkcí, hovících rovnici (II), výraz typu

$$\int f(x)\,dx = \frac{f(0)}{f'(0)}\,f(x) + C.$$

Rovnice třetí poskytuje především vztah

$$[yf(y)]_{y_0}^{y} \cdot \int_{x_0}^{x} f(x)\,dx = [xf(x)]_{x_0}^{x} \cdot \int_{y_0}^{y} f(y)\,dy,$$

z něhož plyne

$$\frac{\int_{x_0}^{x} f(x)\,dx}{[xf(x)]_{x_0}^{x}} = \frac{\int_{y_0}^{y} f(y)\,dy}{[yf(y)]_{y_0}^{y}} = A,$$

t. j.

$$\int_{x_0}^{x} f(x)\,dx = A\,[xf(x)]_{x_0}^{x};$$

z derivace výrazu tohoto dle proměnné x plyne příkladně pro $x = 1$ hodnota

$$A = \frac{f(1)}{f(1) + f'(1)}.$$

Jsou tedy integrály funkcí, hovících rovnici (III), vždy tvaru

$$\int f(x)\,dx = \frac{f(1)}{f(1) + f'(1)}\,xf(x) + C.$$

Rovnice čtvrtá podává vztah

$$(y - y_0) \cdot \int_{x_0}^{x} f(x)\,dx + (x - x_0) \cdot [yf(y)]_{y_0}^{y}$$
$$= (x - x_0) \cdot \int_{y_0}^{y} f(y)\,dy + (y - y_0) \cdot [xf(x)]_{x_0}^{x},$$

z něhož plyne

$$\frac{\int_{x_0}^{x} f(x)\,dx - [xf(x)]_{x_0}^{x}}{x - x_0} = \frac{\int_{y_0}^{y} f(y)\,dy - [yf(y)]_{y_0}^{y}}{y - y_0} = \mathrm{A}$$

čili

$$\int_{x_0}^{x} f(x)\;dx = [xf(x) + \mathrm{A}x]_{x_0}^{x}.$$

Z derivace relace této dle x obdržíme, kladouce za x přípustnou konstantu, na př. $x = 1$,

$$\mathrm{A} = -f'(1).$$

Integrály funkcí, hovících rovnici (IV), mají tedy nutně tvar

$$\int f(x)\,dx = xf(x) - f'(1)\,x + \mathrm{C}.$$

Příkladem buď $f(x) = al(x) + b$; ze vzorce posledního vychází

$$\int f(x)\;dx = ax\,.\,l(x) + (b - a)\,x + \mathrm{C}.$$

Výsledků právě nabytých dojíti lze — ovšem za příslušných supposicí — velice stručně následujícím způsobem.

Parciálným differencováním rovnic (I), (II), (III) a (IV) z první stati, problému 1., dle y obdržíme, kladouce $y = 0$ resp. $y = 1$, vztahy

(6) $$f'(x) = f'(0) \text{ čili } xf'(x) = f'(0)\,x$$

resp.

(7) $$f(x) = \frac{f(0)}{f'(0)}\,f'(x),$$

(8) $$f(x) = \frac{f(1)}{f'(1)}\,xf'(x),$$

(9) $$xf'(x) = f'(1),$$

z nich pak integrováním a to (6)

$$xf(x) - \int f(x)\,dx = f'(0)\frac{x^2}{2} + C,$$

t. j.

$$\int f(x)\,dx = x\left[f(x) - f'(0)\frac{x}{2}\right] + C;$$

ze (7) plyne

$$\int f(x)\,dx = \frac{f(0)}{f'(0)} f(x) + C,$$

z (8)

$$\int f(x)\,dx = \frac{f(1)}{f'(1)}\{xf(x) - \int f(x)\,dx\},$$

t. j.

$$\int f(x)\,dx = \frac{f(1)}{f(1) + f'(1)}\,xf(x) + C$$

a z (9)

$$xf(x) - \int f(x)\,dx = f'(1)\,x + C,$$

t. j.

$$\int f(x)\,dx = xf(x) - f'(1)\,x + C.$$

2. *Stanoviti integrál spojitých funkcí $f(x)$ hovících rovnici*

$$\Phi(x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2}) = f(x) + f(y). \tag{10}$$

Z rovnice této plynou pro hodnotu $y = 0$ vztahy

$$\Phi(x) = f(0) + f(x)$$
$$\Phi'(x) = f'(x)$$

a parciálným derivováním dle y pro $y = 0$

$$f'(x) = \frac{f'(0)}{\sqrt{1-x^2}}. \tag{11}$$

V případě tomto jest

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x} = \sqrt{1-y^2} - \frac{xy}{\sqrt{1-x^2}}$$
$$\frac{\partial\varphi}{\partial y} = \sqrt{1-x^2} - \frac{xy}{\sqrt{1-y^2}};$$

příslušná rovnice (4) má tedy tvar

$$\int_{x_0}^{x}\left[\left\{f(x)+f(y)\right\}\left\{\sqrt{1-y^2}-\frac{xy}{\sqrt{1-x^2}}\right\}\right]_{y_0}^{y} dx$$
$$=\int_{y_0}^{y}\left[\left\{f(x)+f(y)\right\}\left\{\sqrt{1-x^2}-\frac{xy}{\sqrt{1-y^2}}\right\}\right]_{x_0}^{x} dy\,.$$

Označíme-li výraz na levé straně rovnice této $\Psi(x, y)$, plyne vzájemnou záměnou argumentů x a y výraz na straně pravé, takže obdržíme charakteristický vztah

$$\Psi(x, y) = \Psi(y, x),$$

t. j. funkce $\Psi(x, y)$ jest symmetrickou.

Použijeme jistých dvou vět o funkcích symmetrických, totiž

α) je-li symmetrická funkce $\Psi(x, y)$ rovna výrazu

$$\psi_1(x, y) + \psi_2(x, y)$$

a je-li i funkce $\psi_1(x, y)$ symmetrickou, musí též funkce $\psi_2(x, y)$ býti symmetrickou;

β) je-li symmetrická funkce $\Psi'(x, y)$ rovna výrazu

$$\psi_3(x) + \psi_4(y)\,,$$

musí rozdíl $\psi_3(x) - \psi_4(x)$ rovnati se konstantě.

Rozvedeme-li výraz $\Psi(x, y)$, shledáme, že symmetrickou funkcí $\psi_1(x, y)$ jest výraz

$$[x]\,.\,[f(y)\sqrt{1-y^2}] + [y]\,.\,[f(x)\sqrt{1-x^2}] - [x]\,.\,[y]\,.\,f(0)$$

a tudíž že následkem toho pro symmetrickou funkci

$$\Psi'(x, y) = \frac{\psi_2(x, y)}{[\sqrt{1-x^2}][\sqrt{1-y^2}]} = \frac{\int_{x_0}^{x} f(x)\,dx}{[\sqrt{1-x^2}]} + \frac{[yf(y)]}{[\sqrt{1-y^2}]}$$

platiti musí

$$\psi_3 - \psi_4 = \frac{\int\limits_{x_0}^{x} f(x)\, dx}{[\sqrt{1-x^2}]} - \frac{[xf(x)]}{[\sqrt{1-x^2}]} = \mathrm{A},$$

kdež A značí konstantu a velké závorky, že výrazy v nich obsažené dlužno bráti v mezích x, x_0 resp. y, y_0.

Z této poslední rovnice vyplývá hodnota integrálu funkce $f(x)$, totiž

$$\int\limits_{x_0}^{x} f(x)\, dx = \left[xf(x) + \mathrm{A}\sqrt{1-x^2}\,\right]_{x_0}^{x};$$

z derivace dle x obdržíme pro $x = 0$

$$\mathrm{A} = f'(0),$$

takže jakožto typ integrálů funkcí hovících rovnici (10) máme výraz

$$\int f(x)\, dx = xf(x) + f'(0)\sqrt{1-x^2} + \mathrm{C}.$$

Rovnici (10) hoví při libovolném stálém A a B každá funkce $f(x) = \mathrm{A} \arcsin x + \mathrm{B}$; jest tudíž v případě $\mathrm{A} \lesseqgtr 0$, $\mathrm{B} \lesseqgtr 0$ — vzhledem ku $f'(0) = \mathrm{A}$ — příslušným integrálem výraz

$$\int f(x)\, dx = x(\mathrm{A} \arcsin x + \mathrm{B}) + \mathrm{A}\sqrt{1-x^2} + \mathrm{C}.$$

Násobíce rovnici (11) proměnnou x a integrujíce pak, obdržíme vztah

$$xf(x) - \int f(x)\, dx = -f'(0)\sqrt{1-x^2} + \mathrm{C}$$

čili

$$\int f(x)\, dx = xf(x) + f'(0)\sqrt{1-x^2} + \mathrm{C}.$$

3. *Stanoviti integrál spojitých funkcí $f(x)$ hovících rovnici*

$$\Phi\left(\frac{x+y}{1-xy}\right) = f(x) + f(y). \tag{13}$$

Z rovnice této plyne pro $y = 0$

$$\Phi(x) = f(0) + f(x),$$

t. j.

$$\Phi'(x) = f'(x).$$

Parciálným derivováním rovnice (13) dle y obdržíme, kladouce $y = 0$, výraz

$$\Phi'(x) = f'(x) = \frac{f'(0)}{1 + x^2}. \tag{14}$$

Stručně dojdeme integrálu funkce $f(x)$, násobíce tuto relaci proměnnou x a integrujíce ji, t. j.

$$xf(x) - \int f(x)\,dx = f'(0)\frac{1}{2}\,l\,(1 + x^2) + C$$

čili

$$\int f(x)\,dx = xf(x) - f'(0)\,l\sqrt{1 + x^2} + C.$$

Rovnici (13) hoví každá funkce

$$f(x) = A \operatorname{arctg} x + B,$$

značí-li A a B libovolné konstanty.

Jest tedy v našem případě $-f'(0) = A -$

$$\int f(x)\,dx = x(A \operatorname{arctg} x + B) - A\,l\sqrt{1 - x^2} + C.$$

4. *Stanoviti integrál funkce* $F(x) = f_1(x) f_2(x)$, *hovící rovnici*

$$\Phi(xy) = f_1(x) f_1(y)\,[f_2(x) + f_2(y)]. \tag{15}$$

Funkce $\Psi(x, y)$ dána jest v tomto případě výrazem

$$\Psi(x, y) = \int_x^x \left[f_1(x) f_1(y)\, y\,\{f_2(x) + f_2(y)\}\right]_{y_0}^{y} dx,$$

jejž uvedeme na tvar

$$\frac{\Psi(x, y)}{\int\limits_{x_0}^{x} f_1(x)\, dx \,.\, [y f_1(y)]_{y_0}^{y}} = \frac{\int\limits_{x_0}^{x} f_1(x) f_2(x)\, dx}{\int\limits_{x_0}^{x} f_1(x)\, dx} + \frac{[y f_1(y) f_2(y)]}{[y f_1(y)]}.$$

Je-li možno položiti $\int\limits_{x_0}^{x} f_1(x)\, dx = a\, [x f_1(x)]_{x_0}^{x}$, jest levá strana a tudíž i pravá symmetrickou funkcí, a pak musí

$$(16) \qquad \frac{\int\limits_{x_0}^{x} f_1(x) f_2(x)\, dx}{\int\limits_{x_0}^{x} f_1(x)\, dx} - \frac{[x f_1(x) f_2(x)]}{[x f_1(x)]} = \text{konstantě A}.$$

Vzhledem k tomu, že funkce $f_1(x)$, jejíž integrál jest typu $a x f_1(x)$, hoví rovnici $\varphi(xy) = f_1(x) \,.\, f_1(y)$, jest volba této funkce za $f_1(x)$ v rovnici (15) přípustnou.

Z relace (16) obdržíme výraz

$$(17) \qquad \int\limits_{x}^{x} f_1(x) f_2(x)\, dx = \mathrm{A} \int\limits_{x_0}^{x} f_1(x) dx + [a x f_1(x) f_2(x)]_{x_0}^{x}$$
$$= [a x f_1(x) \{f_2(x) + \mathrm{A}\}]_{x_0}^{x}$$

z derivace rovnice (17) plyne příkladně pro $x = 1$ hodnota

$$\mathrm{A} = -a f'_2(1),$$

načež obdržíme

$$(18) \qquad \int f_1(x) f_2(x)\, dx$$
$$= \frac{f_1(1)}{f_1(1) + f'_1(1)}\, x f_1(x) \left[f_2(x) - \frac{f_1(x) f'_2(1)}{f_1(1) + f'_1(1)} \right] + \mathrm{C},$$

ježto z řešení 1. problému II. stati víme, že konstanta a má hodnotu

$$a = \frac{f'(1)}{f(1) + f'(1)}.$$

Rovnici (15) hoví při libovolném stálém A, B každá funkce

$$F(x) = f_1(x) f_2(x) = Ax^m . \lg Bx ;$$

jest tedy dle (18)

$$\int Ax^m \lg Bx \, dx = \frac{A}{m+1} x^{m+1} \left[\lg Bx - \frac{1}{m+1}\right] + C .$$

Odvození pozoruhodných rovnic pro komponenty rychlosti ve drahách planet a komet.

Napsal

Dr. **Gustav Gruss** v Praze.

Eulerova věta pro parabolu

$$(r' + r + \varkappa)^{\frac{3}{2}} - (r' + r - \varkappa)^{\frac{3}{2}} = 6k(t' - t)$$

a tím více všeobecnější věta *Lambertova* pro kuželosečky

$$\mu'(r' + r + \varkappa)^{\frac{3}{2}} - \mu(r' + r - \varkappa)^{\frac{3}{2}} = 6k(t' - t) ;$$

$$\mu = \frac{\varepsilon - \sin \varepsilon}{\sin^3 \frac{1}{2} \varepsilon}, \quad \mu' = \frac{\varepsilon' - \sin \varepsilon'}{\sin^3 \frac{1}{2} \varepsilon'};$$

$$\sin^2 \frac{1}{2} \varepsilon = \frac{r' + r + \varkappa}{4a}, \quad \sin^2 \frac{1}{2} \varepsilon' = \frac{r' + r - \varkappa}{4a}$$

(r, r' jsou radie vektory pro doby t a t', $\varkappa$ tetiva spojující průvodiče r a r', a velká poloosa kuželosečky, k Gaussova konstanta attrakční) platila tak dlouho za *curiosum*, pokud výzkumy *Hamilton-Jacobi-ho* neobjevily klíče pro pozoruhodné věty a nové