Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky

Úlohy

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 20 (1891), No. 5, 269--284

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/108856

Při tomto označení pak bude

(3) $$(\alpha, \alpha') = \alpha j + \alpha' i,$$

neboť pravá strana zní

$$\alpha(1, 0) + \alpha'(0, 1) = (\alpha, 0) + (0, \alpha') = (\alpha, \alpha').$$

Vzorec (3) lze slovy takto vyjádřiti:

Každý komplex lze vyjádřiti linearně pomocí dvou základních komplexů:

$$j = (1, 0),\ i = (0, 1).$$

4. Komposice má další základní vlastnosť násobení:

(4) $$(a + b)\, c = ac + bc.$$

Levá strana je totiž

$$(\alpha + \beta,\ \alpha' + \beta')(\gamma, \gamma')$$
$$= (\alpha\gamma + \beta\gamma - \alpha'\gamma' - \beta'\gamma',\ \alpha\gamma' + \beta\gamma' + \alpha'\gamma + \beta'\gamma)$$
$$= (\alpha\gamma - \alpha'\gamma',\ \alpha\gamma' + \alpha'\gamma) + (\beta\gamma - \beta'\gamma',\ \beta\gamma' + \beta'\gamma)$$

a poslední výraz jest identicky $ac + bc$.

Z toho plyne pak obyčejným způsobem

$$(a + b)(c + d) = ac + bc + ad + bd.$$

Součin (komposiční) dvou, tří, čtyř ... stejných činitelů a znamenáme a^2, a^3, a^4 ..., takže máme

$$(\alpha, \alpha')^2 = (\alpha^2 - \alpha'^2,\ 2\alpha\alpha')$$
$$(\alpha, \alpha')^3 = (\alpha^3 - 3\alpha\alpha'^2,\ 3\bar{\alpha}^2\alpha' - \alpha'^3) \text{ atd.}$$

Zvláště bude $j^2 = j$, a obecně $j^n = j$, kdežto

$$i^2 = (0, 1)^2 = (-1, 0) = -j.$$

Ve vzorcích $i^2 = -j$, $j^2 = j$ *jsou obsaženy všecky komposiční zákony komplexův.* Neboť dle předešlé věty bude

$$(\alpha, \alpha')(\beta, \beta') = (\alpha j + \alpha' i)(\beta j + \beta' i)$$
$$= \alpha\beta j^2 + \alpha'\beta' i^2 + (\alpha\beta' + \alpha'\beta)\, ij$$
$$= (\alpha\beta - \alpha'\beta')\, j + (\alpha\beta' + \alpha'\beta)\, i$$
$$= (\alpha\beta - \alpha'\beta',\ \alpha\beta' + \alpha'\beta),$$

což právě jest výměrem komposice. (Dokončení.)

Úlohy.

Řešení úlohy 13.

(Zaslal p. *Karel Rosa,* stud. VII. tř. g. městské střední školy na Malé Straně v Praze.)

Položme $a + b = x$, $b + c = y$, $c + a = z$, potom výraz daný bude

$$
\begin{aligned}
&(x^2+y^2+z^2)^2-2(x^4+y^4+z^4)\\
=\;&2(x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2)-(x^4+y^4+z^4)\\
=\;&4x^2y^2-(x^2+y^2-z^2)^2\\
=\;&(2xy+x^2+y^2-z^2)(2xy-x^2-y^2+z^2)\\
=\;&[(x+y)^2-z^2][z^2-(x-y)^2]\\
=\;&(x+y+z)(x+y-z)(x-y+z)(-x+y+z).
\end{aligned}
$$

Dosadíme-li na místo x, y, z hořejší hodnoty, obdržíme konečně

$$2^4abc\,(a+b+c).$$

Řešení úlohy této zaslali pp.: *Jos. Malíř* ze VII. tř. g. v Chrudimi, *Em. Hlavatý, Jos. Hanuš, A. Čapek, Jan Frynta* ze VII. tř. r., *Jos. Čeřovský, J. Špalek* ze VI. tř. r. a *Václav Komberec* z V. tř. r. v Hr. Králové, *Karel Günther* a *Frant. Beroušek* ze VII. tř. r. v Karlíně, *Jan Křižanovský* z VIII. tř. g. v Litomyšli, *Jos. Dykast* a *Adolf Vincík* ze VI. tř. r. v Rakovníku, *Zdeněk Tobolka* ze VII. tř. g. v Žitné ulici v Praze, *Arnošt Rosa, Tomáš Frenzl, Jan Záhorský* a *Aug. Hoffmann* z VIII. tř. g. a *Ant. Zelinka* ze VII. tř. g. měst. střední školy na Malé Straně v Praze, *Goth. Nehasil* ze VII. tř., *Gust. Zd. Procházka* a *Zdeněk J. Sláma* ze VI. tř. česk. real. v Praze, *Vladimír Janků* ze VII. tř. akad. g. v Praze, *Ant. Plánička* ze VI. tř. g. v Čes. Budějovicích, *Jos. Finger* ze VII. tř. g. v Příbrami, *Max V. Popper* z VIII. tř. g. v Písku, *Lad. Janík, Jul. Ottava* a *Alois Liška* ze VII. tř. g. v Kroměříži a *Fr. Římský* ze VII. tř. g. v Přerově.*)

Řešení úlohy 14.

(Zaslal p. *Frant. Římský*, stud. VII. tř. g. v Přerově.)

Položíme-li $\qquad x^{-x}=y,$

přechází rovnice daná v tuto:

$$108y^3-139y^2+32y-1=0,$$

jejíž jeden kořen jest patrně

$$y_1=1.$$

*) Dva řešitelé úlohy této se zapomněli podepsati.

Dělíme-li rovnicový čtyřčlen součinitelem kořenovým $y-1$, pak bude

$$108y^2 - 31y + 1 = 0,$$

a odtud vypočítáme

$$y = \frac{31 \pm 23}{216}$$

čili

$$y_2 = \frac{1}{4}, \quad y_3 = \frac{1}{27}.$$

Dáme-li hodnotám y podobu

$$y_1 = 1^{-1}, \quad y_2 = 2^{-2}, \quad y_3 = 3^{-3},$$

poznáváme, že k nim přísluší

$$x_1 = 1, \quad x_2 = 2, \quad x_3 = 3.$$

Správné řešení úlohy této zaslali pp.: *Maxmilián Pick* ze VII. tř. g. v Něm. Brodě, *Vlad. Janků* ze VII. tř. akad. gymn. v Praze, *Jan Křižanovský* z VIII. tř. g. v Litomyšli, *Frant. Beroušek* a *Karel Günther* ze VII. tř. r. v Karlíně, *Rudolf Trenkler* z VIII. tř. g., *Josef Malíř* a *Frant. Novotný* ze VII. tř. gymn. v Chrudimi, *Lad. Janík*, *Augustin Ozynula*, *A. Liška*, *Jan Matoušek* ze VII. tř. a *Vítězslav Kulendík* ze VI. tř. g. v Kroměříži, *Ant. Zelinka*, *Karel Rosa* ze VII. tř. g., *Arnošt Rosa*, *Tomáš Frenzl* a *Jan Záhorský* z VIII. tř. g. městské střední šk. na Malé Straně v Praze, *Goth. Nehasil* ze VII. tř., *J. Jindra*, *Gust. Zd. Procházka* a *Zdeněk J. Sláma* ze VI. tř. české real. v Praze, *Antonín Tauš*, priv. stud. v Praze, *Otakar Studnička* z VIII. tř. g. a *Karel Fritsche* ze VII. tř. g. v Příbrami a *Jos. Dykast* ze VI. tř. r. v Rakovníku.

Řešení úlohy 15.

(Zaslal p. *Jan Křižanovský*, stud. VIII. tř. g. v Litomyšli.)

Dány-li jsou rovnice

(1) $$x^3 + y^3 + x^2 + y^2 = ax,$$

$$(2) \qquad 3(x+y)+2=\frac{a}{x},$$

násobme (2) součinem xy a přičtěme ku (1); tím obdržíme

$$(x+y)^3+(x+y)^2=a(x+y).$$

Odtud plyne buď

$$x+y=0, \quad x_1=\frac{a}{2}, \quad y_1=-\frac{a}{2},$$

aneb

$$(x+y)^2+(x+y)=a;$$

ve spojení s rovnicí (2) najdeme pak

$$x_{2,3}=\frac{2a}{1\pm 3\sqrt{1+4a}}$$

$$y_{2,3}=\frac{1+4a\mp\sqrt{1+4a}}{1\pm 3\sqrt{1+4a}}.$$

Správné řešení úlohy této zaslali pp.: *Arnošt Rosa* z VIII. tř. g., *Antonín Zelinka* a *Karel Rosa* ze VII. tř.g. měst. stř. šk. na Malé Straně v Praze, *Ladislav Janík* ze VII. tř. g. v Kroměříži, *Gothard Nehasil* ze VII. tř., *J. Jindra* a *Zdeněk J. Sláma* ze VI. tř. české realky v Praze, *Josef Čeřovský* ze VI. tř. r. v Hradci Králové, *Rudolf Trenkler* z VIII. tř. gymn. v Chrudimi, *Karel Günther* a *Frant. Beroušek* ze VII. tř. r. v Karlíně, *Frant. Novotný* ze VII. tř. gymn. v Českých Budějovicích a *Vladimír Janků* ze VII. tř. akad. gymn. v Praze.

Řešení úlohy 16.

(Zaslal p. *Josef Čeřovský,* stud. VI. tř. r. v Hradci Králové.)

Substitucí $\quad x=y\sqrt{a-1}$

nabude rovnice daná podoby

$$(a-1)y^3-ay+1=0$$

čili

$$(y-1)[(a-1)y^2+(a-1)y-1)]=0.$$

Kořeny této rovnice jsou

$$y_1 = 1, \quad y_{2,3} = \frac{-(a-1) \pm \sqrt{(a-1)(a+3)}}{2(a-1)}$$

a tudíž příslušná x:

$$x_1 = \sqrt{a-1}, \quad x_{2,3} = -\frac{1}{2}[\sqrt{a-1} \mp \sqrt{a+3}].$$

Jiné řešení úlohy 16.

(Zaslal p. *Fr. Novotný*, stud. VII. tř. g. v Českých Budějovicích.)

Položme $\sqrt{a-1} = c$, jest $a = c^2 + 1$, a rovnici danou lze psáti

$$x(x^2 - c^2) - (x - c) = 0,$$

tedy

$$x - c = 0,$$

$$x^2 + cx - 1 = 0,$$

odkud plynou hledané kořeny.

Správné řešení úlohy této zaslali pp.: *Otakar Studnička* z VIII. tř. a *Karel Fritsche* ze VII. tř. g. v Příbrami, *Vladimír Janků* ze VII. tř. akad. gymn. v Praze, *Rudolf Trenkler* z VIII. tř. g. a *Josef Malíř* ze VII. tř. g. v Chrudimi, *Frant. Beroušek* a *Karel Günther* ze VII. tř. r. v Karlíně, *Jan Křižanovský* z VIII. tř. g. v Litomyšli, *Arnošt Rosa*, *Jan Záhorský* z VIII. tř. g., *Karel Rosa* a *Ant. Zelinka* ze VII. tř. g. městské střední školy v Praze, *Jan Špalek* ze VI. tř. r. v Hradci Králové, *Lad. Janík*, *Aug. Ozynula*, *Vítězslav Kulendík* a *Jan Matoušek* ze VII. tř. g. v Kroměříži, *Gustav Zd. Procházka*, *Zdeněk J. Sláma* ze VI. tř. a *Goth. Nehasil* ze VII. tř. české real. v Praze, *Fr. Římský* ze VII. tř. g. v Přerově a *Ant. Tauš*, priv stud. v Praze.

Řešení úlohy 17.

(Zaslal p. *Arnošt Rosa*, stud. VIII. tř. g. městské střední školy na Malé Straně v Praze.)

Známo z goniometrie, že jest

$$\frac{\sin(\alpha - \beta)}{\cos\alpha \cos\beta} = \operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta.$$

Ze vzorce toho plyne řada rovnic

$$\frac{\sin(x_2 - x_1)}{\cos x_1 \cos x_2} = \operatorname{tg} x_2 - \operatorname{tg} x_1$$

$$\frac{\sin(x_3 - x_2)}{\cos x_2 \cos x_3} = \operatorname{tg} x_3 - \operatorname{tg} x_2$$

$$\dots\dots\dots$$

$$\frac{\sin(x_{n+1} - x_n)}{\cos x_n \cos x_{n+1}} = \operatorname{tg} x_{n+1} - \operatorname{tg} x_n.$$

Tvoří-li úhly $x_1, x_2, x_3, \dots, x_{n+1}$ řadu arithmetickou rozdílu α, jest

$$x_2 - x_1 = x_3 - x_2 = \dots = x_{n+1} - x_n = \alpha;$$

v případě tomto obdržíme sečtouce rovnice hořejší:

$$S \,.\, \sin\alpha = \operatorname{tg} x_{n+1} - \operatorname{tg} x_1 = \frac{\sin(x_{n+1} - x_1)}{\cos x_{n+1} \cos x_1}.$$

Jest tedy

$$S = \frac{\sin n\alpha}{\sin\alpha \cos x_1 \cos(x_1 + n\alpha)}.$$

Řešení úlohy této zaslali pp.: *Jan Záhorský* z VIII. tř. g. městské stř. školy na Malé Straně v Praze a *Vladimír Janků* ze VII. tř. akad. gymn. v Praze.

Řešení úlohy 18.

(Zaslal p. *Emanuel Hlavatý*, stud. VII. tř. r. v Hradci Králové.)

Ježto

$$\alpha_n = \frac{2R - \alpha_{n-1}}{2},$$

obdržíme, kladouce postupně

$$n = 1, 2, 3, 4, \dots,$$

řadu rovnic

$$2\alpha_1 = 2R - \alpha_0$$
$$2\alpha_2 = 2R - \alpha_1$$
$$2\alpha_3 = 2R - \alpha_2$$
$$\dots\dots$$
$$2\alpha_n = 2R - \alpha_{n-1}.$$

Násobíme-li druhou z těchto rovnic číslem -2, třetí $(-2)^2$, čtvrtou $(-2)^3$, ..., n-tou $(-2)^{n-1}$ a sečteme-li pak, nalezneme

$$2\,.\,(-2)^{n-1}\alpha_n$$
$$= 2R\,[1+(-2)+(-2)^2+(-2)^3+\ldots+(-2)^{n-1}]-\alpha_0$$

čili

$$\alpha_n = \frac{2R}{3}\cdot\frac{(-2)^n-1}{(-2)^n}+\frac{\alpha_0}{(-2)^n}.$$

Roste-li n do nekonečna, jest

$$\lim\frac{(-2)^n-1}{(-2)^n} = 1-\frac{1}{(-2)^n} = 1,\quad \lim\frac{\alpha_0}{(-2)^n} = 0$$

a tudíž

$$\lim\alpha_n = \frac{2R}{3} = 60^0.$$

Správné řešení úlohy této podali pp.: *Vladimír Janků* ze VII. tř. akad. gymn. v Praze, *Jan Frynta*, *Jos. Hanuš, A. Čapek* ze VII. tř. r. a *Jos. Čeřovský* ze VI. tř. r. v Hradci Králové, *Ladislav Janík* ze VII. tř. g. v Kroměříži, *Goth. Nehasil* ze VII. tř., *Gustav Zd. Procházka*, *Zdeněk J. Sláma* a *J. B. Kavan* ze VI. tř. české realky v Praze.

Řešení úlohy 19.

(Zaslal p. *Karel Günther*, stud. VI. tř. r. v Karlíně.)

Označme

$$\sphericalangle\, CAB' = ACB' = \psi,\quad \sphericalangle\, BCA' = CBA' = \lambda.$$

Rozeznávati jest tyto hlavní případy:

1. Bod C′ padne vně $\triangle$ ABC na tu stranu od AB, na které není ABC,

2. Bod C′ padne vnitř $\triangle$ ABC,

3. „ „ „ vně $\triangle$ ABC na tu stranu od AB, na které jest $\triangle$ ABC.

V 1. případě jest buď $\varphi + A > 90^0$ nebo $\varphi + A < 90^0$, dle čehož jest v platnosti buď rovnice

$$A + \varphi + \psi = B + \psi + \lambda = C + \lambda + \psi = 180^0,$$

z nichž jde

$$\varphi = C, \quad \psi = B, \quad \lambda = A$$

a $\triangle A'B'C'$ jest obepsán kružnici obepsané $\triangle ABC$, nebo

$$A + \varphi - \psi = B + \varphi - \lambda = C - \psi - \lambda = 0,$$

z nichž jde

$$\varphi = C - 90, \quad \psi = 90 - B, \quad \lambda = 90 - A$$

a body A', B', C' splynou se středem kružnice $\triangle ABC$ obepsané.

V 2. případě jest v platnosti rovnice

$$\varphi + \psi - A = \psi + \lambda - B = \lambda + \varphi - C = 0,$$

z nichž jde

$$\varphi = 90 - C, \quad \psi = 90 - B, \quad \lambda = 90 - A$$

a body A', B', C' splynou jako před tím se středem kružnice obepsané $\triangle ABC$.

Ve 3. případě jest v platnosti rovnice

$$A + \psi - \varphi = B + \lambda - \varphi = 180 - C - \lambda - \psi = 0$$

a tedy

$$\varphi = A + B, \quad \psi = B, \quad \lambda = A;$$

$\triangle A'B'C'$ jest obepsán kružnici obepsané $\triangle ABC$.

Řešení úlohy této zaslali pp.: *Rudolf Trenkler* z VIII. tř. g. a *Jos. Malíř* ze VII. tř. g. v Chrudimi, *Frant. Beroušek* ze VII. tř. r. v Karlíně, *Jan Křižanovský* z VIII. tř. g. v Litomyšli, *Frant. Římský* ze VII. tř. gymn. v Přerově, *Em. Hlavatý*, *Jos. Hanuš*, *Jind. Vít*, *A. Čapek* ze VII. tř. r., *Josef Čeřovský* a *Jan Špalek* ze VI. tř. r. v Hradci Králové, *Goth. Nehasil* ze VII. tř. a *Gustav Procházka* ze VI. tř. české real. v Praze, *Vladimír Janků* ze VII. tř. akad. gymn. v Praze, *Jan Záhorský*, *Arnošt Rosa* z VIII. tř. g. a *Karel Rosa* ze VII. tř. gymn. městské střední školy na Malé Straně v Praze a *Alois Liška* ze VII. tř. g. v Kroměříži.

Řešení úlohy 20.

(Zaslal p. *Boh. Vávra*, stud. VII. tř. g. ve Spálené ulici v Praze.)

a) Výšky trojúhelníka *abc* vepsaného v kružnici K protínejtež při náležitém prodloužení kružnici K v bodech dalších

a', b', c'. Známe-li tři body, sestrojíme trojúhelník abc, rozpůlíme-li úhly

$$\alpha = b'a'c', \quad \beta = c'b'a', \quad \gamma = a'c'b';$$

přímky půlící tyto úhly protínají kružnici K v žádaných bodech a, b. c.

Důkaz: Protíná-li $\overline{cc'}$ stranu $\overline{ab}$ v bodě m, jest

$$\sphericalangle bmc = \sphericalangle mbc' + \sphericalangle mc'b$$

čili

$$\sphericalangle bmc = \frac{\alpha}{2} + \frac{\beta + \gamma}{2} = R,$$

pročež $cc' \perp ab'$. Dle obdoby jest též

$$aa' \perp bc, \quad bb' \perp ac.$$

b) Je-li sestrojiti trojúhelník $a'b'c'$, jehož osy úhlové protínají kružnici opsanou K podruhé v bodech a, b, c, prodlužme výšky trojúhelníka abc až k dalším průsekům s K; průsečíky tyto jsou vrcholy trojúhelníka žádaného.

Důkaz plyne přímo z obrazce, který případ a) znázorňuje a který laskavý čtenář sám pořídíti dovede.

Správné řešení úlohy této podali pp.: *Rudolf Trenkler* z VIII. tř., *Jos. Malíř* ze VII. tř. g. v Chrudimi, *Antonín Plánička* ze VI. tř. g. v Č. Budějovicích, *Frant. Beroušek* ze VII. tř. r. v Karlíně, *Vladimír Janků* ze VII. tř. akad. g. v Praze, *L. Červenka* ze VII. tř. r. v Pardubicích, *Goth. Nehasil* ze VII. tř., *Jaroslav Jindra* a *Zdeněk J. Sláma* ze VI. tř. české real. v Praze, *Václav Komberec* z V. tř. r., *A. Čapek*, *Emanuel Hlavatý* a *Jan Frynta* ze VII. tř. r. v Hradci Králové, *Zdeněk Tobolka* ze VII. tř. g. v Žitné ulici v Praze, *Jan Křižanovský* z VIII. tř. g. v Litomyšli, *Maxmilian Pick* ze VII. tř. gymn. v Něm. Brodě, *Karel Rosa* ze VII. tř. g. a *Arnošt Rosa* z VIII. tř. g. městské střední školy na Malé Straně v Praze, *Otakar Studnička* z VIII. tř. g. v Příbrami, *Frant. Římský* ze VII. tř. g. v Přerově, *Lad. Janík*, *A. Liška*, *Jan Matoušek* a *Jul. Ottava* ze VII. tř. g. v Kroměříži.

Řešení úlohy 21.

(Zaslal pan *Otakar Studnička,* stud. VIII. tř. g. v Příbrami.)

Jmenujeme-li konce přídavků C, D a P patu kolmice z vrcholu O na přeponu spuštěné, jest

$$\cot\varphi = \frac{DP}{OP}, \quad \cot\psi = \frac{PC}{OP},$$

tedy
$$\cot\varphi + \cot\psi = \frac{2 \,.\, AB}{OP}.$$

Ježto $\overline{OP} = \overline{OA} \,.\, \sin\alpha = \overline{AB} \cos\alpha \,.\, \sin\alpha,$

bude
$$\cot\varphi + \cot\psi = \frac{4}{\sin 2\alpha} = \frac{4}{\sin 2\,(90 - \alpha)}.$$

Správné řešení úlohy této podali pp.: *Karel Fritsche* ze VII. tř. g. v Příbrami, *Goth. Nehasil* ze VII. tř., *J. Jindra, Gustav Zd. Procházka* a *Zd. J. Sláma* ze VI. tř. české real. v Praze, *Rudolf Trenkler* z VIII. tř., *Jos. Malíř* a *Fr. Polák* ze VII. tř. gymn. v Chrudimi, *Frant. Myslivec* a *Frant. Mosler* ze VII. tř. g. v Opavě, *Ant. Zelinka*, *Karel Rosa* ze VII. tř. g., *Jan Záhorský* a *Arnošt Rosa* z VIII. tř. g. městské střední šk. na Malé Straně v Praze, *Emanuel Hlavatý*, *Jan Frynta*, *Josef Čeřovský*, *Ant. Čapek* ze VII. tř. a *Jan Špalek* ze VI. tř. r. v Hradci Králové, *Jos. Dykast* a *Adolf Vincík* ze VI. tř. r. v Rakovníku, *Frant. Beroušek* a *Karel Günther* ze VII. tř. r. v Karlíně, *Vladimír Janků* ze VII. tř. akad. gymn. v Praze, *Lad. Janík*, *Aug. Ozynula*, *Julius Ottava* a *Al. Liška* ze VII. tř. g. v Kroměříži, *Boh. Vávra* ze VII. tř. g. v Spálené ulici v Praze, *Fr. Novotný* ze VII. tř. g. v Českých Budějovicích, *Jan Křižanovský* z VIII. tř. g. v Litomyšli, *Frant. Římský* ze VII. tř. g. v Přerově, *Václav Hrnčíř* z VIII. tř. g. v Roudnici a *Jos. Ipser* z VIII. tř. g. v Novém Bydžově.

Řešení úlohy 22.

(Zaslal p. *František Beroušek,* stud. VII. tř. r. v Karlíně.)

Položíme-li $\frac{OB}{OC} = n$, $\sphericalangle OAC = \alpha''$, jest $\operatorname{cotg}\alpha'' = n \operatorname{cotg}\alpha$ a tudíž, užijeme-li výsledku úlohy 21.,

$$\frac{\operatorname{cotg}\alpha - \operatorname{cotg}\alpha'}{\operatorname{cotg}\varphi + \operatorname{cotg}\psi} = \frac{\operatorname{cotg}\alpha - \operatorname{cotg}(\alpha - \alpha'')}{4:\sin 2\alpha}$$

$$= \frac{\sin 2\alpha}{4}\left(\operatorname{cotg}\alpha - \frac{1 + n\operatorname{cotg}^2\alpha}{(n-1)\operatorname{cotg}\alpha}\right) = \frac{\sin 2\alpha}{4}\cdot\frac{1}{(1-n)\sin^2\alpha\operatorname{cotg}\alpha}$$

$$= \frac{1}{2(1-n)}.$$

Řešení úlohy této zaslali pp.: *Karel Günther* ze VII. tř. r. v Karlíně, *Lad. Janík* ze VII. tř. g. v Kroměříži, *Rud. Trenkler* z VIII. tř. a *Jos. Malíř* ze VII. tř. g. v Chrudimi, *Jan Křižanovský* z VIII. tř. g. v Litomyšli, *Emanuel Hlavatý* ze VII. tř. r. v Hradci Králové, *Goth. Nehasil* ze VII. tř. a *Zdeněk J. Sláma* ze VI. tř. české realky v Praze, *Arnošt Rosa* z VIII. tř. a *Karel Rosa* ze VII. tř. g. městské střední šk. na Malé Straně v Praze, *Frant. Římský* ze VII. tř. g. v Přerově, *Vladimír Janků* ze VII. tř. akad. g. v Praze a *Julius Ottava* ze VII. tř. g. v Kroměříži.

Řešení úlohy 23.

(Zaslal p. *Václav Hrnčíř*, stud. VIII. tř. g. v Roudnici.)

Označíme-li úhlopříčny u a v, strany sousední x a y a úhel jimi sevřený α, jest

$$u^2 = x^2 + y^2 - 2xy\cos\alpha$$

$$v^2 = x^2 + y^2 + 2xy\cos\alpha,$$

tedy

$$v^2 - u^2 = 4xy\cos\alpha,$$

tudíž

$$\cos\alpha = \frac{m^2}{4k^2}.$$

Správné řešení úlohy této zaslali pp.: *Jos. Malíř*, *Frant. Polák* ze VII. tř. a *Rudolf Trenkler* z VIII. tř. g. v Chrudimi, *Emanuel Hlavatý*, *Jind. Vít*, *A. Čapek*, *Jos. Hanuš* ze VII. tř. a *Josef Čeřovský* ze VI. tř. r. v Hradci Králové, *Frant. Beroušek* a *Karel Günther* ze VII. tř. r. v Karlíně, *Fr. Novotný* ze VII. tř. g. v Českých Budějovicích, *Al. Liška*, *Lad. Janík*, *Aug. Ozynula* a *Jul. Ottava* ze VII. tř. g. v Kroměříži, *Jan*

Křižanovský z VIII. tř. g. v Litomyšli, *L. Červenka* ze VII. tř. r. v Pardubicích, *Frant. Mosler* ze VII. tř. g. v Opavě, *Arnošt Rosa*, *Jan Záhorský* z VIII. tř., *Karel Rosa* a *Ant. Zelinka* ze VII. tř. g. městské střední šk. na Malé Straně v Praze, *Goth. Nehasil* ze VII. tř., *Zdeněk J. Sláma* a *Gustav Zd. Procházka* ze VI. tř. české realky v Praze, *Vladimír Janků* ze VII. tř. akad. gymn. v Praze, *Frant. Římský* ze VII. tř. g. v Přerově, *O. Studnička* z VIII. tř. g. v Příbrami a *Jos. Ipser* z VIII. tř. g. v Novém Bydžově.

Řešení úlohy 24.

(Zaslal p. *Goth. Nehasil,* stud. VII. tř. české realky v Praze.)

Kružnice dané rovnicemi

$$x^2 + y^2 + 2x = 1 + \sqrt{3}$$
$$x^2 + y^2 - 2x = 1 - \sqrt{3}$$

protínají se ve dvou bodech, jichž souřadnice

$$x_{1,2} = \frac{\sqrt{3}}{2}, \; y_{1,2} = \pm \frac{1}{2}.$$

Rovnice tečen v bodě (x_1, y_1) jsou

$$x_1 x + y_1 y + x + x_1 = 1 + \sqrt{3}$$
$$x_1 x + y_1 y - x - x_1 = 1 + \sqrt{3}$$

čili

$$x(2 + \sqrt{3}) + y = 2 + \sqrt{3}$$
$$-x(2 - \sqrt{3}) + y = 2 - \sqrt{3}.$$

Ježto jest

$$-(2 + \sqrt{3}) \cdot (2 - \sqrt{3}) = -1,$$

stojí tečny obě na sobě kolmo a kružnice dané protínají se v úhlu pravém.

Hledáme-li průsečíky přímky

$$y = \mathrm{A}x + b$$

s kružnicemi danými, dospějeme k rovnicím

$$(1 + \mathrm{A}^2)x^2 + 2(\mathrm{A}b \pm 1)x + b^2 - 1 \mp \sqrt{3} = 0.$$

Aby pak přímka ta byla tečnou obou kružnic, nutno vyhověti podmínkám

$$(Ab \pm 1)^2 - (1 + A^2)(b^2 - 1 \mp \sqrt{3}) = 0,$$

v nichž současně buď obě horní buď obě dolní znaménka platnost mají. Z podmínek těch plynou rovnice

$$A^2 - b^2 + 2 = 0$$

$$A^2\sqrt{3} + 2Ab + \sqrt{3} = 0,$$

z těchto pak vyloučením b

$$A^4 + 2A^2 - 3 = 0.$$

Pro společné vnější tečny (realné) jest

$$A = \pm 1$$

a tudíž tečny ty svírají úhel pravý.

Rovnice jich jsou

$$x \pm y - \sqrt{3} = 0.$$

Správné řešení úlohy této zaslali pp.: *Rudolf Trenkler* z VIII. tř. a *Josef Malíř* ze VII. tř. g. v Chrudimi, *Jan Křižanovský* z VIII. tř. g. v Lytomišli, *Frant. Mosler* a *Frant. Myslivec* ze VII. tř. g. v Opavě, *Maxmilián Pick* ze VII. tř. g. v Něm. Brodě, *Karel Günther* a *Frant. Beroušek* ze VII. tř. r. v Karlíně, *Aug. Ozynula*, *Julius Ottava* a *Lad. Janík* ze VII. tř. g. v Kroměříži, *Emanuel Hlavatý*, *A. Čapek* a *Jan Frynta* ze VII. tř. r. v Hradci Králové, *Václav Hrnčíř* z VIII. tř. g. v Roudnici, *Frant Římský* ze VII. tř. g. v Přerově, *Fr. Novotný* ze VII. tř. g. v Čes. Budějovicích, *Arnošt Rosa* a *Jan Záhorský* z VIII. tř. g. městské střední šk. na Malé Straně v Praze a *Vladimír Janků* z VIII. tř. akad. gymn. v Praze.

Řešení cenné úlohy z mathematiky.*)

Řešení I.

Z věty: „Vzdálenosti průseků sečné středem kružnice procházející s tečnou a s tětivou tečných od kteréhokoliv bodu na

*) Viz str. 167.

obvodě kruhu jsou k sobě v poměru stálém" (Jandečkova planimetrie str. 102., věta 10.) vychází na jevo

$$t_1 : u_1 = C_1A_3 : P_1A_3,$$

avšak poměr

$$C_1A_3 : P_1A_3 = \cos(C_1A_3P_1) = \cos\alpha_1,$$

tedy

$$t_1 : u_1 = \cos\alpha_1 \quad \text{čili} \quad t_1 = u_1 \cos\alpha_1,$$

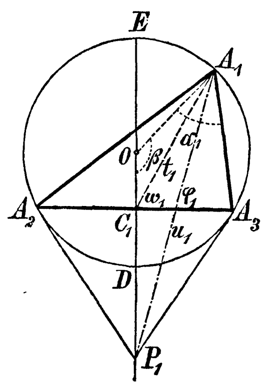
čímž jest první část tvrzení dokázána.

Z $\triangle A_1P_1C_1$ obdržíme užitím poučky sinusové

$$t_1 : u_1 = \sin(90 - \varphi_1) : \sin(90 + \omega_1)$$

čili $\qquad \cos\alpha_1 = \cos\varphi_1 : \cos\omega_1,$

z čehož $\qquad \cos\varphi_1 = \cos\alpha_1 \,.\, \cos\omega_1.$



Podobně dokázati lze správnost obou rovnic v tom případě, když body A_1 a P_1 jsou na téže straně přímky A_2A_3.

Řešení II.

Z $\triangle A_1C_1O$ vyplývá dle věty Carnotovy

$$t_1^2 = r^2 + OC_1^2 - 2rOC_1 \cos\beta$$

čili, poněvadž

$$OC_1 = r\cos\alpha_1 \text{ (z } \triangle A_3C_1O\text{, v němž úhel } C_1OA_3 = \alpha_1),$$

(1) $$t_1^2 = r^2(1 + \cos^2\alpha_1 - 2\cos\alpha_1\cos\beta).$$

Z $\triangle$ A_1OP_1 obdržíme dle téže věty

$$u_1^2 = r^2 + OP_1^2 - 2r\,OP_1 \cos\beta,$$

avšak z $\triangle$ OA_3P_1 jde $OP_1 = \dfrac{r}{\cos\alpha_1}$, tedy

$$u_1^2 = \frac{r^2}{\cos^2\alpha_1}(1 + \cos^2\alpha_1 - 2\cos\alpha_1\cos\beta). \tag{2}$$

Z (1) a (2) rovnice obdržíme

$$t_1^2 = u_1^2 \cos^2\alpha_1, \quad \text{tedy} \quad t_1 = u_1 \cos\alpha_1,$$

načež se druhá část tvrzení jako prvé dokáže.

Řešení III.

Ježto $A_3C_1 \perp OP_1$, platí o pravoúhlém $\triangle\, OA_3P_1$ úměra

$$OC_1 : OA_3 = OA_3 : OP_1,$$

avšak

$$OA_3 = OA_1,$$

tedy

$$OC_1 : OA_1 = OA_1 : OP_1,$$

ze kteréž úměry následuje, že

$$\triangle\, AOC_1 \sim \triangle\, A_1OP_1.$$

Tedy jest

$$t_1 : u_1 = OC_1 : OA_1$$

čili

$$t_1 : u_1 = OC_1 : OA_3 = \cos\alpha_1$$

a

$$t_1 = u_1 \cos\alpha_1 \quad \text{atd.}$$

Pan Frant. Machovec, professor vyšších real. škol v Karlíně, který úlohu tuto navrhl, uznal, že za řešení dostati mají ceny, výborem J. Č. M. vypsané, a to:

a) Za řešení úplná a v každé příčině vyhovující pánové:
Frant. Beroušek ze VII. tř. r. v Karlíně.
Lad. Červenka ze VII. tř. r. v Pardubicích.
Josef Ceřovský ze VI. tř. r. v Hradci Králové.
Bedřich Fořt ze VII. tř. r. na Malé Straně v Praze.
Jan Frynta ze VII. tř. r. v Hradci Králové.
Karel Günther ze VII. tř. r. v Karlíně.
Josef Hanuš ze VII. tř. r. v Hradci Králové.
Vl. Janků ze VII. tř. akad. gymn. v Praze.

Jar. Jindra ze VI. tř. české realky v Praze
V. Juva ze VII. tř. r. na Malé Straně v Praze.
Josef B. Kavan ze VI. tř. české realky v Praze.
Al. Liška ze VII. tř. g. v Kroměříži.
Frant. Masler ze VII. tř. g. v Opavě.
Goth. Nehasil ze VII. tř. české realky v Praze.
Aug. Ozynula ze VII. tř. g. v Kroměříži.
Max V. Popper z VIII. tř. g. v Písku.
K. Rektorys ze VII. tř. r. na Malé Straně v Praze.
Arn. Rosa z VIII. tř. g. na Malé Straně v Praze.
Václav Řepa z VIII. tř. g. v Č. Budějovicích.
K. Vaňouček ze VII. tř. r. v Pardubicích.

b) Za řešení správná pánové:

A. Čapek ze VII. tř. r. v Hradci Králové.
Em. Hlavatý ze VII. tř. r. v Hradci Králové.
Václ. Hrubý ze VII. tř. r. v Telči.
Artuš Kantor z VIII. tř. g. v Jičíně.
J. Křižanovský z VIII. tř. g. v Litomyšli.
V. Mácka z VII. tř. r. v Telči.
K. Mašek z Maasburgů ze VII. tř. r. v Hradci Králové.
Frant. Novotný z VIII. tř. g. v Č. Budějovicích.
Gust. Procházka ze VI. tř. české realky v Praze.
Karel Rosa ze VII. tř. g. na Malé Straně v Praze.
Jos. Rybka ze VII. tř. r. v Brně.
Jindřich Vít ze VII. tř. r. v Hradci Králové.
Zd. Sláma ze VI. tř. české realky v Praze.
Ant. Starosta ze VII. tř. r. v Brně.
Frant. Suchomel z VIII. tř. g. v Litomyšli.
Frant. Taberný ze VI. tř. r. v Brně.
Rud. Trenkler z VIII. tř. g. v Chrudimi.
Boh. Vávra z VIII. tř. g. ve Spálené ulici v Praze.
Bedř. Vejborný ze VII. tř. g. v Kroměříži.
J. Záhorský z VIII. tř. g. na Malé Straně v Praze.

Ostatní řešení, počtem 7, jsou buď nedokonalá anebo zcela nesprávná.