František Josef Studnička

O podstatě neurčitosti výrazů algebraických $\infty - \infty$, $\infty \cdot 0, \ldots$

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 22 (1893), No. 5, 321--324

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/108843

Příloha k Časopisu pro pěstování mathematiky a fysiky.

O podstatě neurčitosti výrazů algebraických

$\infty - \infty,\ \infty . 0, \ldots$

Pro studující napsal

prof. dr. F. J. Studnička.

Z dějin mathematiky známo, že zavedením pojmu infinitesimalního nastala nová, nanejvýš plodná aera jejího rozvoje, obrovský pokrok zahajující, jehož fáse jednotlivé dosud nejsou ještě vyčerpány.

Jest věcí podivnou, ale stále se v kulturní historii lidstva opakující, že každá nová idea potřebovala jistého času nežli se obecně ujala, a že délka tohoto času jest úměrna její důležitosti, jejímu obsahu a dosahu.

Jakož jsem jinde poznamenal, bylo 1500 let třeba, nežli se nepopíratelnou stala nauka o kulatosti země; a více nežli 1900 let leží mezi Archimedovou methodou exhaustní a Leibnicovým „triangulum characteristicum“, kterýmž zárodky infinitesimalní geometrie oplodněny a objasněny.

Řecká filosofie se svými důmyslnými Eleaty*) pěstovala pouze hru s pojmy nekonečně velkého a nekonečně malého co převratné hodnoty jeho, nechtějíc uznávati za veličinu skutečnou, co vší míře uniká, jsouc buď větší nežli největší, nebo menší nežli nejmenší veličina myslitelná, nedíc představitelná. A podobně se dálo i dále, takže právě pěstování filosofie, příznivé rozvoji theorie čísel, bylo nepříznivé vzniku a rozvoji infinitesimalního pojmu.

Velmi zajímavé byly by tedy dějiny tohoto druhdy podezřívaného infinitesimalního pojmu, kdyby se dopodrobna vystopoval v odvěkém rozvoji mathematickém od prvního vytčení jeho

*) Viz *Durdík* „Dějepisný nástin filosofie řecké“ pag. 50 seqq.

až na časy naše, kde nepřestal ještě býti předmětem důmyslných úvah;*) vyniklať by tu především na jevo s jedné strany souvislost jeho s pojmem jiným, jejž *měnivost* nazýváme, s druhé pak strany obdobnost jeho s podstatou pojmu *času* a *prostoru*.

Jakmile jednou brány do úvahy mathematické veličiny *proměnné*, byl pojem infinitesimalní nutným postulatem této měnivosti, zmenšování i zvětšování *bezmezného*, kterémuž se dostalo symbolického výrazu slovem *limes*, *mez*, takže se počalo psáti o proměnné veličině x do nekonečna bez přestání se zvětšující

$$\lim x = \infty^{**}), \quad \lim \frac{1}{x} = 0.^{***})$$

A tu se záhy poznalo, že s pojmem, označeným tímto symbolem ∞, jakož i s převratnou hodnotou jeho, symbolem $\bigcirc$ se značícím, nelze početní úkony tak prováděti jako s čísly konečnými; zvláště pak se poznalo a vytklo, že neplatí

při	*odčítání*	$a - a = 0$,	jestli	$a = \infty$,		
„	*násobení*	$0 \,.\, a = 0$,	„	„		
„	*dělení*	$a : a = 1$,	„	„	neb	$a = 0$,
„	*mocnění*	$a^0 = 1$,	„	„	„	„
		$1^a = 1$,†)	„	„ .		

*) Viz na př. *Bolzano* „Paradoxien des Unendlichen". Aus dem schriftlichen Nachlasse des Verfassers von Dr. *Fr. Příhonský*. I. Aufl. Leipzig, 1851. II. Aufl. Berlin, 1888.

**) Symbolu ∞ k označení čísla nekonečně velkého užil poprvé *John Wallis* r. 1665 ve spise svém „Tractatus de sectionibus conicis nova methodo expositis", kde praví na str. 297: „Esto ∞ nota numeri infiniti."

***) Jakmile pro číslice stanovena dvojí hodnota, *původní* neb *daná* a *odvozená* nebo *místní*, bylo nutno zavésti symbol „prázdnoty", udávající tedy značkou, že místo není číslicí vyplněno. A tím v Indii již *před* r. 600 po Kr. zvolen kroužek $\bigcirc$, naše znamení nully. *Maximus Planudes*, v Benátkách od r. 1327—53 co vyslanec Andronika Palaeologa st. meškající, příležitostně tu praví: „*τιθέασι δὲ καὶ ἕτερόν τι σχῆμα ὃ καλοῦσι τζίφραν κατ᾽ Ἰνδοὺς σημαῖνον οὐδέν· καὶ τὰ ἐννέα σχήματα καὶ αὐτὰ Ἰνδικά ἐστιν· ἡ δὲ τζίφρα γράφεται οὕτως* $\bigcirc$." Naše infinitesimální nulla jest však původu jiného.

†) Nejvíce námitek činěno proti tomu, že $1^\infty = 1$ jen ve *zvláštních* případech, všeobecně pak jest významu neurčitého; tvrdiliť i mathema-

Abychom objasnili podstatu neurčitosti této, uvažme, že číslo nekonečně velké jest *nezvětšitelné* i *nezmenšitelné* číslem konečným, že se tedy nemění neboli nezvětší i nezmenší, přidá-li se k němu jakékoli číslo konečné, *zvětšitelné* i *zmenšitelné* číslem konečným.

Značí-li tedy ω číslo nekonečně velké, α pak číslo nekonečně malé, takže

$$\lim \omega = \infty\,, \tag{1}$$

$$\lim \alpha = 0\text{*}), \tag{2}$$

a k číslo *konečné* libovolné, positivní neb negativní, bude naše základní ustanovení vyjádřeno vzorcem

$$\omega = \omega + k\text{**}), \tag{3}$$

z čehož plyne přímo

$$\infty - \infty = k. \tag{4}$$

Z této stanovené základní relace plynou pak ostatní.

Majíce na zřeteli, že tu ω na jedné i druhé straně značí *totéž*, obdržíme stejné stejným dělíce, z relace (3) napřed

$$\frac{\omega}{\omega} = \frac{\omega}{\omega} + \frac{k}{\omega}\,,$$

načež poznáme, že v případě mezním

$$0 = \frac{k}{\infty}\,, \tag{5}$$

z čehož plyne obrácením

$$\frac{k}{0} = \infty\,, \tag{6}$$

a odstraněním jmenovatele konečně

$$0 \,.\, \infty = k. \tag{7}$$

Z tohoto vzorce jde na jevo, že součin čísla α, majícího

---

tikové slavení, že stálým násobením jednotky nevznikne než jednotka, nehledíce k tomu, že v tomto případě 1 a ∞ jest významu limitního.

*) Abychom rozeznávali tuto nullu od „cifry“, symbolu to prázdnoty, mohli bychom ji nazvati *limitní* neb *infinitesimalní*, kdežto předešlá by pak slula *posiční* neb *arithmetickou*.

**) Brachylogicky se tu praví, že konečnost mizí proti nekonečnosti.

0 za limitu, s číslem ∞ za limitu majícím jest libovolné velikosti konečné k, takže pomocí logarithmů možná jej vyjádřiti vzorcem

$$l\alpha + l\omega = lk.$$

Nahradíme-li pak pomocí vzorce (5) a (6) tu ω, onde α příslušným výrazem, obdržíme v případě prvním

$$l\frac{k'}{\omega} + l\omega = lk,$$

kdež k' nesouvisí s konstantou libovolnou k, v případě pak druhém podobně

$$l\alpha + l\frac{k''}{\alpha} = lk,$$

z čehož poznáváme, jdouce od logarithmů nazpět, že

$$\frac{\infty}{\infty} = k_1, \tag{8}$$

a zároveň i se zřetelem k libovolné hodnotě k_2

$$\frac{0}{0} = k_2. \tag{9}$$

A podobně jde ze vzorce (7), zavedeme-li tam na levou stranu místo jednoho činitele přiměřený výraz logarithmický, napřed

$$\alpha \,.\, l\omega = l\omega^\alpha = k_3,$$
$$\alpha \,.\, l\alpha = l\alpha^\alpha = k_4,$$
$$\omega \,.\, l1 = l1^\omega = k_5,$$

a z toho tedy naopak, vrátíme-li se od logarithmů,

$$\infty^0 = k_6, \tag{10}$$
$$0^0 = k_7, \tag{11}$$
$$1^\infty = k_8, \tag{12}$$

kdež arci k_i neznačí hodnoty identické, nýbrž různé.

Jde tedy z úvahy této na jevo, že neurčitost sedmi výrazů, vyjádřených vzorci (4), (7), (8), (9), (10), (11), (12), založena jest v *nezvětšitelnosti* čísla ω.

A jiných neurčitostí téhož rázu není.