Pavol Brunovský

Об аналитическом конструировании регуляторов с неквадратическим минимизируемым функционалом

Časopis pro pěstování matematiky, Vol. 90 (1965), No. 3, 290--310

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/108756`

Časopis pro pěstování matematiky, roč. 90 (1965), Praha

ОБ АНАЛИТИЧЕСКОМ КОНСТРУИРОВАНИИ РЕГУЛЯТОРОВ С НЕКВАДРАТИЧЕСКИМ МИНИМИЗИРУЕМЫМ ФУНКЦИОНАЛОМ

ПАВОЛ БРУНОВСКИ (Pavol Brunovský), Братислава

(Поступило в редакцию 20/V 1964 г.)

В [1] и [2] рассматривается следующая основная задача аналитического конструирования регуляторов:

Дана линейная регулируемая система

$$\dot{\eta}_i = \sum_{j=1}^{n} b_{ij}\eta_j + m_i\xi\,, \quad i = 1, 2, \ldots, n \tag{1}$$

в векторной записи

$$\dot{\eta} = B\eta + m\xi$$

и квадратичная форма $V(\eta_1, \ldots, \eta_n, \xi)$. О системе (1) предполагается, что она управляема, т.е. что векторы $m, Bm, \ldots, B^{n-1}m$ линейно независимы. К данным начальным условиям $\hat{\eta}_1, \ldots, \hat{\eta}_n$ ищутся функции $\xi(t), \eta_1(t), \ldots, \eta_n(t)$ на интервале $\langle 0, \infty)$, удовлетворяющие системе (1), условиям

$$\eta_i(0) = \hat{\eta}_i, \; \lim_{t\to\infty} \eta_i(t) = 0\,, \quad i = 1, 2, \ldots, n \tag{2}$$

и придающие интегралу

$$J(\xi) = \int_0^\infty V(\eta_1(t), \ldots, \eta_n(t))\,\mathrm{d}t$$

минимальное из значений, которые он может принимать при произвольном измеримом ограниченном управлении $\bar{\xi}(t)$ и соответствующем ему решении $\bar{\eta}_1(t), \ldots, \bar{\eta}_n(t)$ системы (1), удовлетворяющем условиям (2).

Эту задачу будем в соответствии с заданной функцией называть задачей (V).

В [2] показано, что при некоторых дополнительных предположениях о функции V из существования решения задачи (V) при произвольных началных условиях следует его однозначность, и что управление ξ, дающее решение задачи (V), является линейной функцией η, не зависящей от начальных условий. В [2] тоже приведены достаточные условия существования решения задачи (V).

В [3] и [4] путем построения формальных рядов рассматривается задача (V) в случае аналитической функции V.

В настоящей статье будем рассматривать задачи, аналогичные задачам, рассмотренным в [2] в случае, когда V не является квадратичной и даже ни аналитической.

Будем предполагать, что заданная функция $V(\eta_1, \ldots, \eta_n, \xi)$ удовлетворяет следующим предположениям:

1. $V(\eta, \xi)$ определена для всех η, ξ и является положительно определенной, т.е. $V(0, 0) = 0$ и $V(\eta, \xi) > 0$ если $|\eta| + |\xi| > 0$ [1]).

2. $V(\eta, \xi)$ – два раза непрерывно дифференцируемая функция по всем своим переменным для $|\eta| < \varepsilon_1$, $\varepsilon_1 > 0$ и для всех ξ, удовлетворяющая условиям:

а) $\dfrac{\partial V(0, 0)}{\partial \xi} = 0\,, \quad \dfrac{\partial V(0, 0)}{\partial \eta} = 0\,,$ [2])

б) $\dfrac{\partial V(0, \xi)}{\partial \xi} \neq 0 \quad$ при $\quad \xi \neq 0\,,$

в) $\dfrac{\partial^2 V(0, 0)}{\partial \xi^2} > 0\,.$

3. Уравнение

$$\frac{\partial V(\eta, \xi)}{\partial \xi} + \zeta = 0$$

имеет для $|\eta| < \varepsilon_1$ и для всех ζ однозначно определенное непрерывно дифференцируемое решение

$$\xi = \gamma(\eta_1, \ldots, \eta_n, \zeta)$$

4. Для $|\eta| < \varepsilon_1$ и произвольного ξ имеют место соотношения

а) $\left|\dfrac{\partial V(\eta, \xi)}{\partial \xi}\right| \leqq u_\xi(\eta) + v_\xi(\eta)\, V^\sigma(\eta, \xi),\ \sigma > 0,$

б) $\left|\dfrac{\partial V(\eta, \xi)}{\partial \eta}\right| \leqq u_\eta(\eta) + v_\eta(\eta)\, V^\varrho(\eta, \xi),\ 0 < \varrho \leqq 1$

где $u_\xi, v_\xi, u_\eta, v_\eta$ – непрерывные функции $\eta_1, \ldots, \eta_n$ и $u_\xi(0) = u_\eta(0) = 0$.

---

[1]) Если $X = (x_{ij})$, $i = 1, \ldots, n$, $j = 1, \ldots, r$ — $n \times r$-мерная матрица, то положим

$$|X| = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{r} |x_{ij}|.$$

[2]) Если $f(x_1, \ldots, x_n)$ — дифференцируемая функция от n переменных $x_1, \ldots, x_n$, то обозначим через $\partial f/\partial x$ вектор с компонентами $\partial f/\partial x_1, \ldots, \partial f/\partial x_n$.

На основании предположения 2 можно каждой функции V отнести квадратичную форму

$$\tilde{V} = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\eta_i\eta_j + \sum_{i=1}^{n} a_i\eta_i\xi + \alpha\xi^2 = (A\eta, \eta) + (a, \eta)\,\xi + \alpha\xi^2\,,$$

где

$$a_{ij} = \frac{1}{2}\frac{\partial^2 V(0,0)}{\partial\eta_i\partial\eta_j}\,, \quad a_i = \frac{\partial^2 V(0,0)}{\partial\eta_i\partial\xi}\,, \quad \alpha = \frac{1}{2}\frac{\partial^2 V(0,0)}{\partial\xi^2}\,, \tag{3}$$

$$A = (a_{ij}),\ a = (a_j),\quad i, j = 1, \ldots, n\,.$$

Теорема 1. *Пусть выполняются предположения 1—4. Пусть существует такое $\varepsilon_2 > 0$, что задача (V) имеет решение при $|\hat{\eta}| < \varepsilon_2$, и пусть задача $(\tilde{V})$ имеет решение для произвольного $\hat{\eta}$. Тогда существует такое $\delta > 0$, что решение задачи (V) определено однозначно для $|\hat{\eta}| < \delta$ и что управление ξ, дающее решение задачи (V), выражается как функция η независимо от начального условия $\hat{\eta}$, $|\hat{\eta}| < \delta$.*

К доказательству теоремы 1 нам понадобятся 3 леммы.

Лемма 1. *Пусть $x(t)$ — решение дифференциальной системы*

$$\dot{x} = Ax + f(t) \tag{4}$$

на интервале $\langle 0, \infty)$ и пусть выполнены следующие предположения:

1° *A — постоянная комплексная матрица вида*

$$A = \begin{pmatrix} A_1, & 0, & \ldots, & 0 \\ 0, & A_2, & \ldots, & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0, & \ldots, & 0, & A_p \end{pmatrix}$$

где A_ν, $\nu = 1, \ldots, p$ — квадратные матрицы с характеристическими числами α_ν и $\alpha_\nu \neq \alpha_\mu$ при $\nu \neq \mu$.

2° *$f(t)$ — комплексная векторная функция, интегрируемая на интервале $\langle T_0, T\rangle$ при любом $T > T_0$, удовлетворяющая ограничению*

$$|f(t)| \leqq f_1(t) + f_2(t) \quad \text{при} \quad t \in \langle T_0, \infty)$$

где $f_1(t), f_2(t)$ — неотрицательные интегрируемые на интервале $\langle T_0, T\rangle$ функции при любом $T > T_0$ и

$$\lim_{t\to\infty} f_1(t) = 0\,, \quad \int_0^\infty f_2^r(t)\,\mathrm{d}t < \infty \quad \text{для некоторого} \quad r \geqq 1\,.$$

Пусть для некоторого вектора l имеет место ограничение

$$|(l, x(t))| = \Big|\sum_{i=1}^{n} l_i\bar{x}_i(t)\Big| \leqq g_1(t) + g_2(t) \quad \text{при} \quad t \in \langle T_0, \infty)\,, \tag{5}$$

где $g_1(t), g_2(t)$ *– неотрицательные и интегрируемые на интервале* $\langle T_0, T\rangle$ *функции при любом* $T > T_0$ *и*

$$\lim_{t\to\infty} g_1(t) = 0\,, \quad \int_0^\infty g_2^s\,(t)\,\mathrm{d}t < \infty \quad \textit{для некоторого} \quad s > 0\,.$$

Обозначим через $l_{(\nu)}, x_{(\nu)}$ *векторы, составленные из компонент векторов* l, x, *соответствующих матрице* A_ν. *Тогда*

$$\lim_{t\to\infty} \left(l_{(\nu)}, x_{(\nu)}(t)\right) = 0\,, \quad \nu = 1, \ldots, p\,.$$

Доказательство. Вариацией постоянных ([6], гл. 3, § 3) получаем

$$x(t) = e^{A(t-t_0)}\,x(t_0) + \int_{t_0}^t e^{A(t-\tau)}\,f(\tau)\,\mathrm{d}\tau\,.$$

Отсюда следует

$$\begin{aligned}(7)\qquad (l, x(t)) &= \left(l, e^{A(t-t_0)}\,x(t_0) + \int_{t_0}^t e^{A(t-\tau)}\,f(\tau)\,\mathrm{d}\tau\right) = \\ &= \left(e^{A^*(t-t_0)}\,l, x(t_0) + \int_{t_0}^t e^{A(t_0-\tau)}\,f(\tau)\,\mathrm{d}\tau\right) = \\ &= \left(e^{A^*(t-t_0)}\,l, x(t_0) + \int_0^{t-t_0} e^{-A\tau}\,f(t_0+\tau)\,\mathrm{d}\tau\right) = \\ &= \left(e^{A^*(t-t_0)}\,l, x(t_0)\right) + \left(e^{A^*(t-t_0)}\,l, \int_0^{t-t_0} e^{-A\tau}\,f(t_0+\tau)\,\mathrm{d}\tau\right),\end{aligned}$$

где звездочкой отмечено транспонирование.

Положим

$$F_1(t_0) = \sup_{t\in\langle t_0, t_0+1\rangle} f_1(t)\,, \quad F_2(t_0) = \int_0^1 f_2^r(t_0+\tau)\,\mathrm{d}\tau\,, \quad M = \max_{t\in\langle 0,1\rangle} \left|e^{-At}\right|.$$

Из предположения 2° получаем

$$(8)\qquad \lim_{t_0\to\infty} F_1(t_0) = \lim_{t_0\to\infty} F_2(t_0) = 0\,.$$

Для $t \in \langle t_0, t_0+1\rangle$, пользуясь неравенством Гёльдера, получаем

$$\begin{aligned}\left|\left(e^{A^*(t-t_0)}\,l, \int_0^{t-t_0} e^{-A\tau}\,f(t_0+\tau)\,\mathrm{d}\tau\right)\right| &\leqq \left|e^{A^*(t-t_0)}\right| . \left|l\right| . \int_0^1 \left|e^{-A\tau}\right| . \left|f(t_0+\tau)\right|\,\mathrm{d}\tau \leqq \\ &\leqq M^2 |l| \left[\int_0^1 f_1(t_0+\tau)\,\mathrm{d}\tau + \int_0^1 f_2(t_0+\tau)\,\mathrm{d}\tau\right] \leqq \\ &\leqq M^2 |l| \left\{F_1(t_0) + \left[\int_0^1 f_2^r(t_0+\tau)\,\mathrm{d}\tau\right]^{1/r}\right\} \leqq M^2 |l|\,[F_1(t_0) + F_2^{1/r}(t_0)]\,.\end{aligned}$$

Из (5) и (7) следует

$$(9)\qquad \left|\left(e^{A^*(t-t_0)}\,l,\,x(t_0)\right)\right| \leqq \left|(l,\,x(t))\right| + \left|\left(e^{A^*(t-t_0)}\,l,\,\int_0^{t-t_0} e^{-A\tau} f(t_0+\tau)\,\mathrm{d}\tau\right)\right| \leqq$$
$$\leqq g_1(t) + g_2(t) + M^2|l|\left[F_1(t_0) + F_2^{1/r}(t_0)\right].$$

Положим

$$G(t_0) = \sup_{t\in\langle t_0,t_0+1\rangle} g_1(t) + M^2|l|\left[F_1(t_0) + F_2^{1/r}(t_0)\right].$$

Тогда из предположения 2°, (8) и (9) получается

$$(10)\qquad \lim_{t_0\to\infty} G(t_0) = 0\,;$$

$$\left|\left(e^{A^*(t-t_0)}\,l,\,x(t_0)\right)\right| \leqq G(t_0) + g_2(t) \quad \text{при} \quad t\in\langle t_0,\,t_0+1\rangle\,,$$

что можно записать в виде

$$(11)\qquad \left|\left(e^{A^*t}\,l,\,x(t_0)\right)\right| \leqq G(t_0) + g_2(t_0+t) \quad \text{при} \quad t\in\langle 0,\,1\rangle\,.$$

Из предположения 1° получаем

$$(12)\qquad \left(e^{A_\nu^*t}l_{(\nu)},\,x_{(\nu)}(t_0)\right) = \sum_{j=0}^{m_\nu} c_{\nu j}(t_0)\,t^j e^{\alpha_\nu t}\,,$$

$$\left(e^{A^*t}l,\,x(t_0)\right) = \sum_{\nu=1}^{p}\left(e^{A_\nu^*t}l_{(\nu)},\,x_{(\nu)}(t_0)\right) = \sum_{\nu=1}^{p}\sum_{j=0}^{m_\nu} c_{\nu j}(t_0)\,t^j e^{\alpha_\nu t}\,,$$

где m_ν – степень элементарного делителя матрицы A_ν высшей кратности ([8], § 58).

Покажем, что

$$(13)\qquad \lim c_{\nu j}(t_0) = 0\,,\quad \nu = 1,\ldots,p\,,\quad j = 0,\ldots,m_\nu\,.$$

Предположим обратное. Тогда существует последовательность $\{t_k\}$ $t_k\to\infty$ такая, что $\sum_{\nu=1}^{p}\sum_{j=0}^{m_\nu}|c_{\nu j}(t_k)|>\sigma>0$. Положим $c_k = (c_{10}(t_k),\ldots,c_{1m_1}(t_k),\ldots,c_{p0}(t_k),\ldots,$ $\ldots,c_{pm_p}(t_k))$. Тогда

$$(14)\qquad \left\||c_k|^{-1}\,c_k\right| = 1$$

и потому из последовательности $|c_k|^{-1}\,c_k$ можно выбрать сходящуюся. Обозначин через $c = (c_{10},\ldots,c_{1m_1},\ldots,c_{p0},\ldots,c_{pm_p})$ ее предел. Последовательность $|c_k|^{-1}\sum_{\nu=1}^{p}\sum_{j=0}^{m_\nu} c_{\nu j}(t_k)\,t^j e^{\alpha_\nu t}$ сходится для $t\in\langle 0,\,1\rangle$ равномерно к функции $\sum_{\nu=1}^{p}\sum_{j=0}^{m_\nu} c_{\nu j}t^j e^{\alpha_\nu t}$. Но из (11) получаем

$$|c_k|^{-s}\int_0^1\Big|\sum_{\nu=1}^{p}\sum_{j=0}^{m_\nu}c_{\nu j}(t_k)\,t^j e^{\alpha_\nu t}\Big|^s\,\mathrm{d}t \leqq |c_k|^{-s}\int_0^1[G(t_k)+g_2(t_k+t)]^s\,\mathrm{d}t \leqq$$

$$\leqq \delta^{-s}\Big\{\int\limits_{\substack{t\in\langle 0,1\rangle\\ G(t_k)\geqq g_2(t_k+t)}}[G(t_k)+g_2(t_k+t)]^s\,\mathrm{d}t+\int\limits_{\substack{t\in\langle 0,1\rangle\\ G(t_k)<g_2(t_k+t)}}[G(t_k)+g_2(t_k+t)]^s\,\mathrm{d}t \leqq$$

$$\leqq \delta^{-s}\Big\{\int_0^1[2G(t_k)]^s\,\mathrm{d}t+\int_0^1[2g_2(t_k+t)]^s\,\mathrm{d}t\Big\}\leqq 2^s\delta^{-s}\Big[G^s(t_k)+\int_0^1 g_2^s(t_k+t)\,\mathrm{d}t\Big],$$

откуда, пользуясь (10) и (6), получим $\lim\limits_{k\to\infty}|c_k|^{-s}\int_0^1\Big|\sum\limits_{\nu=1}^{p}\sum\limits_{j=0}^{m_\nu}c_{\nu j}(t_k)\,t^j e^{\alpha_\nu t}\Big|^s\,\mathrm{d}t=0.$

Отсюда $\int_0^1\Big|\sum\limits_{\nu=1}^{p}\sum\limits_{j=0}^{m_\nu}c_{\nu j}t^j e^{\alpha_\nu t}\Big|^s\,\mathrm{d}t=0$, что возможно только тогда, если $\sum\limits_{\nu=1}^{p}\sum\limits_{j=0}^{m_\nu}c_{\nu j}\,.$ $.\,t^j e^{\alpha_\nu t}\equiv 0$ для $t\in\langle 0,1\rangle$. Так как функции $t^j e^{\alpha_\nu t}$ линейно независимы ([6], стр. 116 русского перевода), то получаем, $c_{\nu j}=0$ для $\nu=1,\ldots,p;\ j=0,\ldots,m_\nu$, что невозможно, так как из (14) следует $|c|=1$. Следовательно, выполняется (13). Подставив в (12) $t=0$ получаем $(l_\nu, x_{(\nu)}(t_0))=c_{\nu 0}(t_0)$. Пользуясь (13), получим отсюда $\lim\limits_{t_0\to\infty}(l_{(\nu)}, x_{(\nu)}(t_0))=\lim\limits_{t_0\to\infty}c_{\nu 0}(t_0)=0$, что и требовалось доказать.

Следсвтие. Пусть выполнены все предположения леммы 1, кроме предположения о виде матрицы A; будем считать, что матрица A – произвольная постоянная комплексная матрица. Тогда

$$\lim_{t\to\infty}(l, x(t))=0\,.$$

Для доказательства отметим, что предположение о виде матрицы использовалось только при доказательстве соотношения $(l_{(\nu)}, x_{(\nu)}(t_0))=c_{\nu 0}(t_0)$; но несмотря на вид матрицы A из доказательства леммы следует $(l, x(t_0))=\sum\limits_{\nu=1}^{p}c_{\nu 0}(t_0)$.

Пусть $\varphi(t)$ – непрерывная комплексная функция на интервале $\langle T_0,\infty)$. Введем обозначение

$$\varphi^{(k)}(t)=\max_{\tau\in\langle t-k,t+k\rangle}|\varphi(\tau)|\quad\text{для}\quad t\in\langle T_0+k,\infty)\,.$$

Лемма 2. *Пусть комплексные функции $x(t)$, $y(t)$ удовлетворяют для $t\in\langle T_0,\infty)$ уравнениям*

$$\begin{aligned}\dot{x}(t)&=y(t)+\alpha\,x(t)+f(t)\\ \dot{y}(t)&=z(t)+\alpha\,y(t)+g(t)\,,\end{aligned}\tag{15}$$

где α – комплексное число, $z(t)$ – непрерывная функция, $f(t)$, $g(t)$ – комплексные функции, интегрируемые на интервале $\langle T_0, T\rangle$ при любом $T>T_0$ и

$$\lim_{t\to\infty}f(t)=\lim_{t\to\infty}g(t)=0\,.\tag{16}$$

Пусть существует последовательность $\{t_\nu\}$, $t_\nu \to \infty$ *и число* $k > 0$ *такое, что*

$$\lim_{\nu\to\infty} |y(t_\nu)| > 0\,, \quad \lim_{\nu\to\infty} \frac{|y(t_\nu)|}{z^{(k)}(t_\nu)} > 0\,. \tag{17}$$

Тогда существует последовательность $\{t'_\nu\}$, $t'_\nu \to \infty$ *и число* $h > 0$ *такое, что*

$$\lim_{\nu\to\infty} |x(t'_\nu)| > 0\,, \quad \lim_{\nu\to\infty} \frac{|x(t'_\nu)}{|y^{(h)}(t'_\nu)|} > 0\,. \tag{18}$$

Доказательство. Положим $x = x_1 + ix_2$, $y = y_1 + iy_2$, $z = z_1 + iz_2$, $f = f_1 + if_2$, $g = g_1 + ig_2$, $\alpha = \alpha_1 + i\alpha_2$. Иля $y(t_\nu)$ возможны четыре случая:

$$y_1(t_\nu) \geqq 0\,, \quad |y_1(t_\nu)| \gtreqqless |y_2(t_\nu)|\,, \tag{19}$$

$$y_2(t_\nu) \geqq 0\,, \quad |y_2(t_\nu)| \gtreqqless |y_1(t_\nu)|\,, \tag{20}$$

$$y_1(t_\nu) \leqq 0\,, \quad |y_1(t_\nu)| \gtreqqless |y_2(t_\nu)|\,, \tag{21}$$

$$y_2(t_\nu) \leqq 0\,, \quad |y_2(t_\nu)| \gtreqqless |y_1(t_\nu)|\,. \tag{22}$$

По крайней мере один из этих случаев имеет место для бесконечного числа ν. Предположим, что такой случай – (19), и что последовательность $\{t_\nu\}$ уже так выбрана, что (19) имеет место для всех ν. Вариацией постоянных получаем из (15):

$$x(t) = x(t_\nu)\, e^{\alpha(t-t_\nu)} + \int_{t_\nu}^{t} e^{\alpha(t-\tau)}[f(\tau) + y(\tau)]\, d\tau = (x_1(t_\nu) + ix_2(t_\nu))\, e^{\alpha_1(t-t_\nu)} \times$$
$$\times [\cos\alpha_2(t - t_\nu) + i\sin\alpha_2(t - t_\nu)] + \int_{t_\nu}^{t} e^{\alpha_1(t-\tau)}[\cos\alpha_2(t-\tau) + i\sin\alpha_2(t-\tau)] \times$$
$$\times [f_1(\tau) + y_1(\tau) + i(f_2(\tau) + y_2(\tau))]\, d\tau\,.$$

Отсюда

$$x_1(t) = x_1(t_\nu)\, e^{\alpha_1(t-t_\nu)}\cos\alpha_2(t - t_\nu) - x_2(t_\nu)\, e^{\alpha_1(t-t_\nu)}\sin\alpha_2(t-t_\nu) +$$
$$+ \int_{t_\nu}^{t} e^{\alpha_1(t-\tau)}[\cos\alpha_2(t-\tau) y_1(\tau) - \sin\alpha_2(t-\tau) y_2(\tau)]\, d\tau +$$
$$+ \int_{t_\nu}^{t} e^{\alpha_1(t-\tau)}[\cos\alpha_2(t-\tau)\, f_1(\tau) - \sin\alpha_2(t-\tau)\, f_2(\tau)]\, d\tau = \Psi(t_\nu, t) + X(t_\nu, t)\,,$$

где

$$\Psi(t_\nu, t) = \int_{t_\nu}^{t} e^{\alpha_1(t-\tau)}[\cos\alpha_2(t-\tau)\, y_1(\tau) - \sin\alpha_2(t-\tau)\, y_2(\tau)]\, d\tau\,,$$

$$X(t_\nu, t) = x_1(t_\nu)\, e^{\alpha_1(t-t_\nu)}\cos\alpha_2(t-t_\nu) - x_2(t_\nu)\, e^{\alpha_1(t-t_\nu)}\sin\alpha_2(t-t_\nu) +$$
$$+ \int_{t_\nu}^{t} e^{\alpha_1(t-\tau)}[\cos\alpha_2(t-\tau)\, f_1(\tau) - \sin\alpha_2(t-\tau)\, f_2(\tau)]\, d\tau\,.$$

Из (15) получаем опять вариацией постоянных

$$y(t) = e^{\alpha(t-t_\nu)}\, y(t_\nu) + \int_{t_\nu}^{t} e^{\alpha(t-\tau)}[z(\tau) + g(\tau)]\, \mathrm{d}\tau\,.$$

Отсюда для $t \in \langle t_\nu, t_\nu + k\rangle$ получаем

$$|y(t)| \leqq |e^{\alpha(t-t_\nu)}| \,.\, |y(t_\nu)| + [z^{(k)}(t_\nu) + g^{(k)}(t_\nu)] \int_{t_\nu}^{t} |e^{\alpha(t-\tau)}|\, \mathrm{d}\tau \leqq$$

$$\leqq M\{|y(t_\nu)| + [z^{(k)}(t_\nu) + g^{(k)}(t_\nu)] \,.\, k\}\,,$$

где $M = \max\limits_{t\in\langle 0,k\rangle} |e^{\alpha t}|$.

Из (16) и (17) следует, что для достаточно больших ν существует $\kappa > 0$ такое, что

$$\frac{|y(t_\nu)|}{z^{(k)}(t_\nu) + g^{(k)}(t_\nu)} > \kappa\,.$$

Отсюда, следуя предположению (19), получаем

$$\frac{y_1(t_\nu)}{z^{(k)}(t_\nu) + g^{(k)}(t_\nu)} > \frac{\kappa}{2}\,.$$

Отсюда следует

(23) $$|y(t)| \leqq |y(t_\nu)| \,.\, M[1 + \kappa^{-1}k] = N|y(t_\nu)| \leqq 2N y_1(t_\nu)\,,$$

где $N = M[1 + \kappa^{-1}k] > 0$.

Имеем

$$\dot{y}_1 = z_1 + \alpha_1 y_1 - \alpha_2 y_2 + g_1(t)\,,$$

откуда для $t \in \langle t_\nu, t_\nu + k\rangle$ при помощи (23) получаем

$$y_1(t) = y_1(t_\nu) + \int_{t_\nu}^{t} \dot{y}_1(\tau)\, \mathrm{d}\tau \geqq y_1(t_\nu) - \int_{t_\nu}^{t} [z^{(k)}(t_\nu) + g^{(k)}(t_\nu) + 2N|\alpha|\, y_1(t_\nu)]\, \mathrm{d}\tau =$$

$$= y_1(t_\nu) - (2\kappa^{-1} + 2N|\alpha|)\, y_1(t_\nu)\,(t - t_\nu) = y_1(t_\nu)\,[1 - l(t - t_\nu)]\,,$$

где $l = 2\kappa^{-1} + 2N|\alpha| > 0$.

Аналогично получаем для $t \in \langle t_\nu, t_\nu + k\rangle$

$$|y_2(t)| \leqq y_1(t_\nu)\,[1 + l(t - t_\nu)]\,.$$

Для $t \in t_\nu + \min(\pi/2|\alpha_2|, k)$, следовательно, получаем

$$\begin{aligned}
\Psi(t_\nu, t) \geqq & \int_{t_\nu}^{t} e^{\alpha_1(t-\tau)} \cos \alpha_2(t-\tau)\, y_1(\tau)\, \mathrm{d}\tau - \int_{t_\nu}^{t} e^{\alpha_1(t-\tau)} \sin |\alpha_2|\,(t-\tau)\, |y_2(\tau)|\, \mathrm{d}\tau \geqq \\
& \geqq y_1(t_\nu) \left\{ \int_{t_\nu}^{t} e^{\alpha_1(t-\tau)} \cos \alpha_2(t-\tau)\, [1 - l(\tau - t_\nu)]\, \mathrm{d}\tau - \right. \\
& \left. - \int_{t_\nu}^{t} e^{\alpha_1(t-\tau)} \sin |\alpha_2|\,(t-\tau)\, [1 + l(\tau - t_\nu)]\, \mathrm{d}\tau \right\} = \\
& = y_1(t_\nu) \left\{ \int_{0}^{t-t_\nu} e^{\alpha_1(t-t_\nu-\tau)} \cos \alpha_2(t - t_\nu - \tau)\, [1 - l\tau]\, \mathrm{d}\tau - \right. \\
& \left. - \int_{0}^{t-t_\nu} e^{\alpha_1(t-t_\nu-\tau)} \sin |\alpha_2|\,(t - t_\nu - \tau)\, [1 + l\tau]\, \mathrm{d}\tau \right\} = \\
& = y_1(t_\nu)\, [\varphi_1(t - t_\nu) - \varphi_2(t - t_\nu)]\,,
\end{aligned}$$

где

$$\varphi_1(t) = \int_0^t e^{\alpha_1(t-\tau)} \cos \alpha_2(t-\tau)\, [1 - l\tau]\, \mathrm{d}\tau\,,$$

$$\varphi_2(t) = \int_0^t e^{\alpha_1(t-\tau)} \sin |\alpha_2|\,(t-\tau)\, [1 + l\tau]\, \mathrm{d}\tau\,.$$

Имеем $\varphi_1(0) = \varphi_2(0) = 0$, $\dot{\varphi}_1(0) = 1$, $\dot{\varphi}_2(0) = 0$, откуда следует, что существуют $a > 0$ и $0 < h < \frac{1}{2}k$ такие, что

$$\Psi(t_\nu, t_\nu + h) \geqq a y_1(t_\nu) \tag{24}$$

для произвольных достаточно больших ν.

Пусть теперь

$$\lim_{\nu \to \infty} |x(t_\nu)| \,.\, |y(t_\nu)|^{-1} = 0\,. \tag{25}$$

Тогда для достаточно больших ν

$$|X(t_\nu, t_\nu + h)| < \frac{a}{4} |y(t_\nu)| \leqq \frac{a}{2} y_1(t_\nu)\,. \tag{26}$$

Из (23), (24) и (26) следует

$$x_1(t_\nu + h) \geqq a\, y_1(t_\nu) - \frac{a}{2} y_1(t_\nu) \geqq \frac{a}{2} y_1(t_\nu) \geqq N^{-1} y^{(h)}(t_\nu + h)\,.$$

Отсюда получаем

$$\liminf_{\nu \to \infty} |x(t_\nu + h)|\, [y^{(h)}(t_\nu + h)]^{-1} \geqq \liminf_{\nu \to \infty} x_1(t_\nu + h)\, |y^{(h)}(t_\nu + h)|^{-1} \geqq N^{-1} > 0\,.$$

Отсюда и из (17) вытекает $\liminf_{\nu\to\infty} |x(t_\nu + h)| > 0$. Следовательно, последовательность $\{t'_\nu\}$ можно выбрать из последовательности $\{t_\nu + h\}$.

Если (25) не выполняется, то из (23) следует

$$\limsup_{\nu\to\infty} |x(t_\nu)| \, [y^{(k)}(t_\nu)]^{-1} \geqq N^{-1} \limsup_{t\to\infty} |x(t_\nu)| \, |y(t_\nu)|^{-1} > 0$$

и, следовательно, последовательность $\{t'_\nu\}$ можно выбрать из последовательности $\{t_\nu\}$.

Тем самым лемма доказана в случае, когда для бесконечно многих ν имеет место (19). В остальных случаях лемму можно доказать аналогично, заменив, если нужно, $x_1(t)$ через $x_2(t)$ и оценку (24) оценкой сверху с отрицательным a.

Лемма 3. *Пусть $y(t)$ — решение дифференциальной системы*

$$\dot{y} = Dy + g(t),$$

где D — постоянная комплексная матрица, $g(t)$ — комплексная векторная функция, интегрируемая на интервале $\langle T_0, T\rangle$ при любом $T > T_0$ и

$$\lim_{t\to\infty} g(t) = 0.$$

Пусть для некоторого вектора m

$$\lim_{t\to\infty} (m, y(t)) = 0.$$

Тогда

$$\lim_{t\to\infty} (m, \dot{y}(t)) = 0.$$

Доказательство. Существует неособая матрица C такая, что $CDC^{-1} = A$ имеет каноническую Жорданову форму ([8], § 58). Положим $l = C^{*-1}m$, $f(t) = Cg(t)$, $x(t) = Cy(t)$. Тогда выполняются условия леммы 1, и поэтому

$$\lim (l_{(\nu)}, x_{(\nu)}(t)) = 0, \quad \nu = 1, \ldots, p. \tag{27}$$

Пусть A_ν содержит первые s строк и столбцов матрицы A. A_ν имеет вид

$$A_\nu = \begin{bmatrix} A_{\nu,\sigma_1} & . & \ldots & 0 \\ 0 & A_{\nu,\sigma_2} & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & A_{\nu,\sigma_r} \end{bmatrix}$$

где 0 — нулевые матгицы,

$$A_{\nu,\sigma_i} = \begin{bmatrix} \alpha_\nu & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 1 & \alpha_\nu & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 & \alpha_\nu \end{bmatrix} \quad i = 1, \ldots, r$$

матрица типа $\sigma_i \times \sigma_i$ и $\sigma_1 \geqq \sigma_2 \geqq \ldots \geqq \sigma_r$, $\sigma_1 + \ldots + \sigma_r = s$. Положим

$$(28) \qquad u_\mu(t) = \sum_{k=1}^{\sigma_1-\mu} l_{k+\mu}\bar{x}_k(t) + \sum_{k=\sigma_1+1}^{\sigma_2-\mu} l_{k+\mu}\bar{x}_k(t) + \ldots + \sum_{k=\sigma_{r-1}+1}^{\sigma_r-\mu} l_{k+\mu}\bar{x}_k(t)\,.$$

Следуя (27), имеем

$$(29) \qquad u_0(t) = \sum_{j=1}^{s} l_j\bar{x}_j(t) = (l_{(\nu)}, x_{(\nu)}(t)) \to 0 \quad \text{при} \quad t \to \infty\,.$$

Далее имеем

$$(30) \qquad u_{\sigma_1}(t) \equiv 0\,,$$

так как для $\mu = \sigma_1$ все суммы в правой части (28) пусти. Имеем

$$\begin{aligned}
\dot{u}_\mu &= l_{1+\mu}\overline{(\alpha_\nu x_1 + f_1)} + \sum_{k=2}^{\sigma_1-\mu}\overline{(x_{k-1} + \alpha_\nu x_k + f_k)}\, l_{k+\mu} + \ldots + \\
&+ l_{\sigma_{r-1}+\mu+1}\overline{(\alpha_\nu x_{\sigma_{r-1}+1} + f_{\sigma_{r-1}+1})} + \sum_{k=\sigma_{r-1}+2}^{\sigma_r-\mu} l_{k+\mu}\overline{(x_{k-1} + \alpha_\nu x_k + f_k)} = \\
&= \bar{\alpha}_\nu\{\sum_{k=1}^{\sigma_1-\mu} l_{k+\mu}\bar{x}_k + \sum_{k=\sigma_1+1}^{\sigma_2-\mu} l_{k+\mu}\bar{x}_k + \ldots + \sum_{k=\sigma_{r-1}+1}^{\sigma_1-\mu} l_{k+\mu}\bar{x}_k\} + \\
&+ \sum_{k=1}^{\sigma_1-\mu-1} l_{k+\mu+1}\bar{x}_k + \ldots + \sum_{k=\sigma_{r-1}+1}^{\sigma_r-\mu-1} l_{k+\mu+1}\bar{x}_k + \sum_{\tau=1}^{r}\sum_{k=\sigma_{\tau-1}+1}^{\sigma_\tau-\mu} l_{k+\mu}\bar{f}_k = \\
&= \bar{\alpha}_\nu u_\mu + u_{\mu+1} + \varphi_\mu\,,
\end{aligned}$$

где

$$\varphi_\mu(t) = \sum_{\tau=1}^{r}\sum_{k=\sigma_{\tau-1}+1}^{\sigma_\tau-\mu} l_{k+\mu}\bar{f}_k \to 0 \quad \text{при} \quad t \to \infty\,.$$

Предположим, что $u_1(t) \to 0$ не выполняется. Тогда как следует из (30), существует такое μ_0, $1 \leqq \mu_0 < \sigma_1$, что $\limsup_{t\to\infty} |u_{\mu_0}(t)| > 0$, $u_{\mu_0+1}(t) \to 0$. Если подставлять в лемму 2 последовательно $x_1 = u_{\mu-1}$, $f_1 = \varphi_{\mu-1}$, $y = u_\mu$, $g_1 = \varphi_\mu$, $z_1 = u_{\mu+1}$ для $\mu = \mu_0, \mu_0 - 1, \ldots, 1$, то получим последовательно $\limsup_{t\to\infty} |u_\mu(t)| > 0$ для $\mu = \mu_0 - 1, \ldots, 0$, что в противоречии с (29). Имеем, следовательно, $u_1(t) \to 0$ и

$$(l_{(\nu)}, \dot{x}_{(\nu)}) = \dot{u}_0(t) = \bar{\alpha}_\nu u_0(t) + u_1(t) + \varphi_0(t) \to 0 \quad \text{при} \quad t \to \infty\,.$$

Суммируя через ν, получаем

$$(m, \dot{y}(t)) = (m, C^{-1}\dot{x}(t)) = (C^{*-1}m, \dot{x}(t)) = \sum_{\nu=1}^{p} (l_{(\nu)}, \dot{x}_{(\nu)}(t)) \to 0 \quad \text{при} \quad t \to \infty$$

что и требовалось доказать.

Доказательство теоремы 1. Пусть для начального условия $\hat{\eta}$ существует решение $\xi(t)$, $\eta(t)$ задачи (V). Тогда из принципа максимума ([5], § 24) следует существование n функций $\lambda_1(t), \dots, \lambda_n(t)$, удовлетворяющих дифференциальной системе

$$(31) \qquad \dot{\lambda}_i = \frac{\partial V(\eta(t), \xi(t))}{\partial \eta_i} - \sum_{j=1}^{n} b_{ji}\lambda_j\,, \quad i = 1, \dots, n$$

и таких, что функция

$$H(\eta(t), \lambda(t), \xi) = -\, V(\eta(t), \xi) + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i(t) \left[\sum_{j=1}^{n} b_{ij}\eta_j(t) + m_i\xi\right]$$

достигает для $\xi = \xi(t)$ своего максимума по ξ. Отсюда получаем, что должно выполняться равенство

$$(32) \qquad \frac{\partial H(\eta(t), \lambda(t), \xi(t))}{\partial \xi} = -\frac{\partial V(\eta(t), \xi(t))}{\partial \xi} + \sum_{i=1}^{n} m_i\lambda_i(t) = 0\,.$$

Обозначим через T_0 такое число, что $|\eta(t)| \leqq \varepsilon_1$ для $t \geqq T_0$. Пользуясь предположением 4, получаем из (32)

$$(33) \quad |(m, \lambda(t))| = \left|\frac{\partial V(\eta(t), \xi(t))}{\partial \xi}\right| \leqq u_\xi(\eta(t)) + v_\xi(\eta(t))\, V^\sigma(\eta(t), \xi(t)) \quad \text{для} \quad t \geqq T_0\,.$$

Из (2) следует

$$(34) \qquad \lim_{t\to\infty} u_\xi(\eta(t)) = 0\,;$$

$$(35) \quad \int_{T_0}^{\infty} [v_\xi(\eta(t))\, V^\sigma(\eta(t), \xi(t))]^{1/\sigma}\, \mathrm{d}t \leqq \max_{t\in\langle T_0,\infty\rangle} v_\xi^{1/\sigma}(\eta(t)) \,.\int_{T_0}^{\infty} V(\eta(t), \xi(t))\, \mathrm{d}t < \infty\,.$$

Из предположения 4 и (2) следует

$$(36) \quad \left|\frac{\partial V(\eta(t), \xi(t))}{\partial \eta}\right| \leqq u_\eta(\eta(t)) + v_\eta(\eta(t))\, V^\varrho(\eta(t), \xi(t)) \quad \text{при} \quad t \geqq T_0\,,$$

$$\lim_{t\to\infty} u_\eta(\eta(t)) = 0\,,$$

$$(37) \quad \int_{T_0}^{\infty} [v_\eta(\eta(t))\, V^\varrho(\eta(t), \xi(t))]^{1/\varrho}\, \mathrm{d}t \leqq \max_{t\in\langle 0,\infty\rangle} v_\eta^{1/\varrho}(t) \int_{T_0}^{\infty} V(\eta(t), \xi(t))\, \mathrm{d}t < \infty\,.$$

Из (34), (35), (36) и (37), пользуясь леммой 1, получаем

$$(38) \qquad \lim_{t\to\infty} (m, \lambda(t)) = 0\,.$$

Отсюда и из (32) получаем

$$(39) \qquad \lim_{t\to\infty} \frac{\partial V(\eta(t), \xi(t))}{\partial \xi} = 0\,.$$

Из предположения 2б и (39) следует, что

$$(40) \qquad \lim_{t\to\infty} \xi(t) = 0\,.$$

Из (2), (40) и предположения 2а следует

$$\lim_{t\to\infty} \frac{\partial V(\eta(t), \xi(t))}{\partial \eta} = 0 . \tag{41}$$

Пусть теперь $(B^\nu m, \lambda(t)) \to 0$, $0 \leqq \nu \leqq n-2$. Тогда из (41), пользуясь леммой 3, получаем

$$(B^\nu m, \dot\lambda(t)) \to 0 . \tag{42}$$

Но имеем

$$\left(B^\nu m, \dot\lambda(t)\right) = \left(B^\nu m, -B^*\lambda + \frac{\partial V(\eta(t), \xi(t))}{\partial \eta}\right) = -(B^{\nu+1} m, \lambda) + \left(B^\nu m, \frac{\partial V}{\partial \eta}\right)$$

откуда, пользуясь (41) и (42) получим $(B^{\nu+1} m, \lambda(t)) \to 0$. Так как имеет место (33), получим отсюда постепенно

$$(m, \lambda(t)) \to 0,\ (Bm, \lambda(t)) \to 0, \ldots, (B^{n-1} m, \lambda(t)) \to 0 .$$

По предположению об управляемости системы (1) векторы $m, Bm, \ldots, B^{n-1} m$ линейно независимы, и поэтому отсюда следует

$$\lim_{t\to\infty} \lambda(t) = 0 . \tag{43}$$

По предположению 3 имеет уравнение (32) при $t \geqq T_0$ единственное решение

$$\xi(t) = \gamma(\eta(t), (m, \lambda(t)))$$

и, следовательно, система функций $\eta_i(t)$, $\lambda_i(t)$ удовлетворяет при $t \geqq T_0$ дифференциальной системе

$$\begin{aligned} \dot\eta &= B\eta + m\gamma(\eta, (m, \lambda)) , \\ \dot\lambda &= -B^*\lambda + \frac{\partial V(\eta, \gamma(\eta, (m, \lambda)))}{\partial \eta} . \end{aligned} \tag{44}$$

Имеем

$$\gamma(\eta, (m, \lambda)) = \gamma(0, 0) + \left(\frac{\partial \gamma(0, 0)}{\partial \eta}, \eta\right) + \frac{\partial \gamma(0, 0)}{\partial \zeta}(m, \lambda) + \omega(\eta, \lambda) ,$$

где ω — непрерывно дифференцируемая функция своих переменных и $\omega(\eta, \lambda) = o(|\eta| + |\lambda|)$ [1]). По предположению 3 и (32) имеем

$$\frac{\partial \gamma(0, 0)}{\partial \eta} = -\frac{\dfrac{\partial^2 V(0, 0)}{\partial \xi \partial \eta}}{\dfrac{\partial^2 V}{\partial \xi^2}} = -\frac{a}{2\alpha} , \qquad \frac{\partial \gamma(0, 0)}{\partial \zeta} = \frac{1}{2\alpha} ,$$

причем a, α даются в (3).

---

[1]) Будем писать $f(x) = o(g(x))$, если $\lim\limits_{x\to 0} f(x)\, g^{-1}(x) = 0$.

Отсюда получаем

$$\xi(t) = \frac{1}{2\alpha}\left[(m, \lambda(t)) - (a, \eta(t)) + 2\alpha\omega(\eta, \lambda)\right]. \tag{45}$$

Аналогично имеем

$$\frac{\partial V(\eta(t), \gamma(\eta(t)\,(m, \lambda(t))))}{\partial \eta_i} = 2\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 V(0,0)}{\partial \eta_i \partial \eta_j}\,\eta_j(t) + \frac{\partial^2 V(0,0)}{\partial \eta_i \partial \xi}\,\gamma(\eta(t), (m, \lambda(t))) +$$
$$+ \tilde{\vartheta}_i(\eta(t), \gamma(\eta(t), (m, \lambda(t))) = 2\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\eta_j(t) - \frac{a_i}{2\alpha}\left[(m, \lambda(t)) - (a, \eta(t)) +\right.$$
$$\left. + 2\alpha\omega(\eta(t), \lambda(t))\right] + \tilde{\vartheta}_i(\eta(t), \gamma(\eta(t), (m, \lambda(t))))$$

где $\tilde{\vartheta}_i$ – непрерывно дифференцируемые функции переменных η, γ и $\tilde{\vartheta}_i(\eta, \gamma) = o(|\eta| + |\gamma|)$. Так как γ – непрерывно дифференцируемая функция λ, то $\tilde{\vartheta}(\eta, \gamma(\eta, (m, \lambda)))$ будет дифференцируеной функцией λ и будет выполняться $\tilde{\vartheta}(\eta, \gamma(\eta(m, \lambda))) = o(|\eta| + |\lambda|)$. Отсюда следует

$$\frac{\partial V(\eta(t), \gamma(\eta(t), (m, \lambda(t))))}{\partial \eta_i} = \sum_{j=1}^{n}\left(2a_{ij} - \frac{a_i a_j}{2\alpha}\right)\eta_j(t) + \tag{46}$$
$$+ \sum_{j=1}^{n} \frac{a_i m_j}{2\alpha}\,\lambda_j(t) + \vartheta_i(\eta(t), \lambda(t)),$$

где $\vartheta_i(\eta, \lambda) = \tilde{\vartheta}_i(\eta, \gamma(\eta(m, \lambda))) + a_i\omega(\eta, \lambda)$ – непрерывно дифференцируемые функции η, λ и $\vartheta_i(\eta, \lambda) = o(|\eta| + |\lambda|)$. Итак, систему (44) можно, следуя (45) и (46), записать в виде

$$\dot{\eta} = B\eta - \frac{m}{2\alpha}(a, \eta) + \frac{m}{2\alpha}(m, \lambda) + m\omega(\eta, \lambda), \tag{47}$$
$$\dot{\lambda} = 2A\eta - \frac{a}{2\alpha}(a, \eta) - B^*\lambda + \frac{a}{2\alpha}(m, \lambda) + \vartheta(\eta, \lambda).$$

В [2] показано, что при условии, что задача $(\tilde{V})$ имеет решение для всех $\hat{\eta}$, множество точек $2n$-мерного пространства, из которых выходят решения системы

$$\dot{\eta} = B\eta - \frac{m}{2\alpha}(a, \eta) + \frac{m}{2\alpha}(m, \lambda), \tag{48}$$
$$\dot{\lambda} = 2A\eta - \frac{a}{2\alpha}(a, \eta) - B^*\lambda + \frac{a}{2\alpha}(m, \lambda),$$

стермящиеся к нулю при $t \to \infty$, является n-мерным линейным подпространством, которое обозначим через X. X определяется системой линейных уравнений

$$P\eta + Q\lambda = 0, \quad \det Q \neq 0.$$

Из теорем 4.1, 4.2 гл. 13 и стр. 373 русского перевода из [6] следует, что существуют матрицы M, N такие, что матрица

$$\Pi = \begin{pmatrix} M & N \\ P & Q \end{pmatrix}$$

неособая и такая, что если положим

$$y = \begin{pmatrix} M & N \\ P & Q \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \eta \\ \lambda \end{pmatrix} \tag{49}$$

то решение системы (47) стремится к нулю при $t \to \infty$ тогда и только тогда, если оно в достаточно малой окрестности начала лежит на многообразии S, определенном уравнениями

$$y_i = \psi_i(y_1, \ldots, y_n), \quad i = n + 1, \ldots, 2n \tag{50}$$

где ψ_i – непрерывно дифференцируемые функции своих переменных в достаточно малой окрестности начала и

$$\psi_i(0, \ldots, 0) = 0, \quad i = 1, \ldots, n \tag{51}$$

$$\frac{\partial \psi_i(0, \ldots, 0)}{\partial y_j} = 0, \quad i = n + 1, \ldots, 2n, \quad j = 1, \ldots, n.$$

Следуя (49), можно систему уравнений (50) записать в виде

$$P\eta + Q\lambda = \psi(M\eta + N\lambda)$$

или

$$\Phi(\eta, \lambda) = P\eta + Q\lambda - \psi(M\eta + N\lambda) = 0. \tag{52}$$

Из (51) следует

$$\det \left(\frac{\partial \Phi_i(0, 0)}{\partial \lambda_j} \right) = \det Q \neq 0.$$

Отсюда, почьзуясь теоремой о неявных функциях ([7], § 44), выводим, что система (52) имеет в некоторой окрестности $|\eta| + |\lambda| \leqq \kappa$, $\kappa > 0$ начала $2n$-мерного пространства единственное решение

$$\lambda = \varphi(\eta), \tag{53}$$

которое непрерывно дифференцируемо, и $\varphi(0) = 0$.

Ввиду предположения теоремы имеет задача (V) решение для $|\hat{\eta}| < \varepsilon_2$. κ можно взять настолько малым, что $\kappa \leqq \min\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\}$. Тогда в области $|\eta| \leqq \kappa$

определена функция

$$W(\eta) = \int_0^\infty V(\eta(t), \xi(t))\, \mathrm{d}t\,,$$

где $\eta(t), \xi(t)$ – решение задачи (V) для начального условия $\hat{\eta} = \eta$.

Докажем, что

$$\lim_{\eta \to \infty} W(\eta) = 0\,. \tag{54}$$

Обозначим через Σ_T множество точек η, для которых существует управление $\tilde{\xi}(t)$, $|\tilde{\xi}(t)| \leqq 1$, переводящее решение $\tilde{\eta}(t)$ системы (1) из точки η в начало за время, не превосходящее T (т.е. $\tilde{\eta}(0) = \eta$, $\tilde{\eta}(T) = 0$). Согласно [5], стр. 152, Σ_T является для $T > 0$ компактом, содержащим начало координат как свою внутреннюю точку. Для произвольного $\eta \in \Sigma_T$ имеем

$$W(\eta) \leqq \int_0^\infty V(\tilde{\eta}(t), \tilde{\xi}(t))\, \mathrm{d}t = \int_0^T V(\tilde{\eta}(t), \tilde{\xi}(t))\, \mathrm{d}t \leqq T \max_{|\xi| \leqq 1, \eta \in \Sigma_T} V(\eta, \xi)\,. \tag{55}$$

Очевидно, $\Sigma_{T'} \subset \Sigma_T$ для $T' < T$, откуда следует $\max\limits_{|\xi| \leqq 1, \eta \in \Sigma_{T'}} V(\eta, \xi) \leqq \max\limits_{|\xi| \leqq 1, \eta \in \Sigma_T} V(\eta, \xi)$.

Отсюда и из (55) следует, что к произвольному $\mu > 0$ существует такое $T > 0$, что $W(\eta) < \mu$ при $\eta \in \Sigma_T$; так как Σ_T содержит начало как свою внутреннюю точку, следует отсюда (54).

Положим

$$S' = S \cap \{(\eta, \lambda) : |\eta| + |\lambda| = \kappa\} = \{(\eta, \varphi(\eta)) : |\eta| + |\varphi(\eta)| = \kappa\}\,,$$

$$S'_\eta = \{\eta : (\eta, \varphi(\eta)) \in S'\}\,, \quad h = \min_{\eta \in S_\eta'} |\eta|\,.$$

Очевидно, $h > 0$, так как в противоположном случае мы имели бы $0 \in S'_\eta$; отсюда мы получили бы, что многообразие S содержит кроме точки $(0, 0)$ тоже другую точку $(0, \lambda)$, $\lambda \neq 0$, что противоречит (53).

Обозначим через R подмножество точек η множества S'_η таких, что решение $(\eta(t), \lambda(t))$ системы (44) с начальным условием $(\eta, \varphi(\eta))$ удовлетворяет неравенству $|\eta(t)| + |\lambda(t)| \leqq \kappa$ для $t \geqq 0$. Так как решение $(\eta(t), \lambda(t))$ системы (44), начинающееся на S', стремится к нулю при $t \to \infty$, существует такое $T \geqq 0$, что $(\eta(T), \lambda(T)) \in S'$, $|\eta(t)| + |\lambda(t)| \leqq \kappa$ при $t \geqq T$; отсюда следует, что $\eta(T) \in R$. Итак, R не пусто; из непрерывной зависимости решений системы (44) от начальных условий ([6], гл. 1, § 7) следует, что R компактно. Положим

$$\overline{W}(\eta) = \int_0^\infty V(\bar{\eta}(t), \bar{\xi}(t))\, \mathrm{d}t = \int_0^\infty V(\bar{\eta}(t), \gamma(\bar{\eta}(t), (m, \varphi(\bar{\eta}(t)))))\, \mathrm{d}t\,,$$

где $\bar{\xi}(t)$ определено уравнением (32) для $\bar{\eta}(t)$, $\bar{\lambda}(t)$, удовлетворяющих системе (44) и начальному условию $\bar{\eta}(0) \in R$, $\bar{\lambda}(0) = \varphi(\bar{\eta}(0))$.

Покажем, что существует такое $\mu > 0$, что $\overline{W}(\eta) \geqq \mu > 0$ при $\eta \in R$. Предположим обратное. Тогда существует последовательность $\{\eta^{(k)}\}$ $\eta^{(k)} \in R$ такая, что $\overline{W}(\eta^{(k)}) \to 0$. Так как R компактна, можно из последовательности $\{\eta^{(k)}\}$ выбрать сходящуюся. Обозначим через $\eta^{(0)}$ ее предел. Имеем $\eta^{(0)} \in R \in S'_\eta$ и потому $|\eta^{(0)}| \geqq h$; отсюда вытекает $\eta^{(0)} \neq 0$. Из положительной определенности функции V следует $\overline{W}(\eta^{(0)}) > 0$. Если обозначить через $(\eta^{(k)}(t), \lambda^{(k)}(t)) = (\eta^{(k)}(t), \varphi(\eta^{(k)}(t)))$ решение системы (44) с начальным условием $(\eta^{(k)}, \varphi(\eta^{(k)}))$, $k = 0, 1, \ldots$, то для достаточно большого T

$$(56) \qquad \int_0^T V(\eta^{(0)}(t), \gamma(\bar{\eta}^{(0)}(t), (m, \varphi(\eta^{(0)}(t))))) \, dt > \tfrac{1}{2}\overline{W}(\eta^{(0)}) .$$

С другой стороны, имеем

$$(57) \qquad \int_0^T V(\eta^{(k)}(t), \gamma(\eta^{(k)}(t), (m, \varphi(\bar{\eta}^{(k)}(t))))) \, dt \to 0 .$$

Но из непрерывной зависимости решений системы (44) от начальных условий следует $\eta^{(k)}(t) \to \eta^{(0)}(t)$ равномерно для $t \in \langle 0, T \rangle$. Это противоречит (56) и (57).

Из (54) следует, что существует такое δ, $0 < \delta < h$, что $W(\eta) < \mu$ для $|\eta| < \delta$. Покажем, что если $|\hat{\eta}| < \delta$ и $\xi(t)$, $\eta(t)$ – решение задачи (V) для начального условия $\hat{\eta}$ и $\lambda(t)$ удовлетворяет (31) и (32), то

$$(58) \qquad |\eta(t)| + |\lambda(t)| \leqq \kappa \quad \text{для} \quad t \geqq 0 .$$

Предположим обратное. Тогда для некоторого $t \geqq 0$ (58) не выполняется. Но так как имеет место (2) и (43), следует отсюда, что существует такое $T \geqq 0$, что $\eta(T) \in R$. Из (53) следует, что $\lambda(t) = \varphi(\eta(t))$ и, следовательно, и $\xi(t) = \gamma(\eta(t), (m, \varphi(t)))$ для $t \geqq T$. Отсюда следует

$$W(\eta) = \int_0^\infty V(\eta(t), \xi(t)) \, dt \geqq \int_0^\infty V(\eta(t), \xi(t)) \, dt = \overline{W}(\eta(T)) \geqq \mu ,$$

что противоречит определению числа δ.

Из (58) следует $\lambda(0) = \varphi(\hat{\eta})$ при $|\hat{\eta}| \leqq \delta$; тем определяются однозначно начальные условия и, следовательно, и все решение $(\eta(t), \lambda(t))$ системы (44); $\xi(t)$ определяется однозначно уравнением (32).

Так как каждое решение задачи (V) для начального условия $|\hat{\eta}| \leqq \delta$ целиком лежит на S и в области $|\eta| + |\lambda| \leqq \kappa$, то вектор $(\eta(t), \lambda(t))$ должен удовлетворять уравнению $\lambda = \varphi(\eta)$. Отсюда следует, что $\xi(t)$ дается формулой $\xi = \gamma(\eta, (m, \varphi(\eta)))$ и, следовательно, не зависит от начального условия. Тем и завершается доказательство теоремы 1.

Остается ответить на вопрос, существуют ли функции V, кроме квадратических, для которых можно доказать существование решения задачи (V). Следующая теорема показывает, что такие функции существуют.

Теорема 2. *Пусть система* (1) *управляема и пусть* V *имеет вид*

$$V(\eta, \xi) = V_1(\eta) + V_2(\eta)\,\xi + \sum_{j=1}^{r} c_j |\xi|^{p_j}, \quad 1 \leqq p_1 < p_2 < \ldots < p_r, \quad c_j \geqq 0 .$$

Пусть выполняются следующие предположения:

а) $V(\eta, \xi) \geqq \beta|\xi|^p$, $p \geqq p_r$, $p > 1$ *для всех* η, ξ

б) V_1, V_2 *— непрерывные функции n переменных* $\eta_1, \ldots, \eta_n$ *и* $V_1(0) = 0$, $V_2(\eta) > 0$ *для* $\eta \neq 0, \eta \in X_0$, *где* X_0 *— алгебраическая сумма инвариантных подпространств матрицы* B, *соответствующих характеристическим числам с нулевой вещественной частью,*

в) $\inf J(\xi) > -\infty$ *для любого начального условия* $\hat{\eta}$.

Тогда задача (V) *имеет решение для произвольного начального условио* η.

Доказательство. Возьмем некоторое начальное условие $\hat{\eta}$. Согласно [5], § 19, существует для произвольного начального условия управление $\xi(t)$, переводящее решение системы (1) в начало координат за конечное время и тем самым дающее функционалу $J(\xi)$ конечное значение. Отсюда и из предположения в) следует, что $\inf J(\xi)$ конечно.

Пусть $\{\xi_k(t)\}$ — такая последовательность управлений, что $\lim\limits_{k \to \infty} J(\xi_k) = \inf J(\xi)$. Обозначим через $\eta^{(k)}(t)$ решение системы (1) при управлении ξ_k. Из предположения а) следует,

$$\int_0^\infty |\xi_k(t)|^p \, \mathrm{d}t \leqq M < \infty \quad \text{для всех } k\,, \tag{59}$$

откуда получаем, что $\xi_k(t)$ содержится в ограниченной области пространства $L_p(0, \infty)$. Потому из последовательности $\{\xi_k(t)\}$ можно выбрать последовательность, слабо сходящуюся к функции $\xi(t) \in L_p(0, \infty)$ (см. [9], гл. 4, § 8). Пусть последовательность $\{\xi_k(t)\}$ уже так выбрана. Из теоремы 7 § 25 в [7] следует, что слабая сходимость в $L_p(0, \infty)$ влечет за собой слабую сходимость в $L_p(0, T)$ при любом $T > 0$. Отсюда получаем

$$\eta^{(k)}(t) = e^{Bt}\hat{\eta} + \int_0^t e^{B(t-\tau)} m \xi_k(\tau)\, \mathrm{d}\tau \to e^{Bt}\hat{\eta} + \int_0^t e^{B(t-\tau)} m \xi(\tau)\, \mathrm{d}\tau = \eta(t)\,.$$

Из (58) следует, что функции $\eta^{(k)}(t)$ равномерно ограничены и равностепенно непрерывны; итак, можно из них выбрать последовательность, равномерно сходящуюся к $\eta(t)$ в любом интервале $\langle 0, T \rangle$. Пусть последовательность $\xi_k(t)$, $\eta^{(k)}(t)$ уже так выбрана.

Покажем, что $\xi(t)$, $\eta(t)$ и есть решение задачи (V). Из равномерной сходимости $\eta^{(k)}(t)$ к $\eta(t)$ и равномерной ограниченности последовательности $\{\eta^{(k)}(t)\}$ следует, что $V_1(\eta^{(k)}(t)) \to V_1(\eta(t))$ и $V_2(\eta^{(k)}(t)) \to V_2(\eta(t))$ равномерно на любом интервале $\langle 0, T\rangle$. Отсюда получаем

$$\int_0^T V(\eta^{(k)}(t), \xi_k(t))\,\mathrm{d}t - \int_0^T V(\eta(t), \xi(t))\,\mathrm{d}t = \int_0^T [V_1(\eta^{(k)}(t)) - V_1(\eta(t))]\,\mathrm{d}t +$$
$$+ \int_0^T [V_2(\eta^{(k)}(t)) - V_2(\eta(t))]\,\xi_k(t)\,\mathrm{d}t + \int_0^T V_2(\eta(t))\,[\xi_k(t) - \xi(t)]\,\mathrm{d}t +$$
$$+ \sum_{j=1}^{n} c_j \left\{\int_0^T |\xi_k(t)|^{p_j}\,\mathrm{d}t - \int_0^T |\xi(t)|^{p_j}\,\mathrm{d}t\right\}.$$

Первый и второй члены в правой части стремятся к нулю, так как $V_i(\eta^{(k)}(t))$ сходятся равномерно к $V_i(\eta(t))$, $i = 1, 2$, и имеет место (58); третий член стремится к нулю, так как $\xi_k(t)$ слабо сходится к $\xi(t)$. Из теоремы 7 § 25 в [7] следует, что если $\xi_k(t)$ слабо сходится к $\xi(t)$ в $L_p(0, T)$, то $\xi_k(t)$ слабо сходится к $\xi(t)$ и в $L_{p_j}(0, T)$, $j = 1, \ldots, r$. Отсюда при помощи леммы 27 гл. 2 из [9] вытекает

$$\int_0^T |\xi(t)|^{p_j}\,\mathrm{d}t \leqq \liminf_{k\to\infty} \int_0^T |\xi_k(t)|^{p_j}\,\mathrm{d}t\,, \quad j = 1, \ldots, r\,.$$

Итак, имеем

$$\int_0^T V(\eta(t), \xi(t))\,\mathrm{d}t \leqq \liminf_{k\to\infty} \int_0^T V(\eta^{(k)}(t), \xi_k(t))\,\mathrm{d}t$$

при любом $T \geqq 0$, откуда следует

$$\int_0^\infty V(\eta(t), \xi(t))\,\mathrm{d}t \leqq \liminf_{k\to\infty} \int_0^\infty V(\eta^{(k)}(t), \xi_k(t))\,\mathrm{d}t\,.$$

Остается доказать, что $\lim_{t\to\infty} \eta(t) = 0$. Это можно сделать таким же образом, как в [2].

В заключение выражаю благодарность д-ру Я. Курцвейлю за постановку задачи и ценные примечания.

Литература

[1] *А. М. Летов:* Аналитическое конструирование регуляторов. Автоматика и телемеханика *21* (1960) № 4, 436—441.

[2] *Я. Курцвейль:* К аналитическому конструированию регуляторов. Автоматика и телемеханика *22* (1961) № 6, 688—695.

[3] *Э. Г. Альбрехт:* Об оптимальной стабилизации нелинейных систем. Прикладная математика и механика *25* (1961) № 5, 836—844.

[4] *В. И. Зубов:* К теории аналитического построения регуляторов. Автоматика и телемеханика *24* (1963) № 8, 1037—1041.

[5] *Л. С. Понтрягин, В. Г. Болтянский, Р. В. Гамкрелидзе, Е. Ф. Мищенко:* Математическая теория оптимальных процессов, Москва 1961.
[6] *E. A. Coddington, N. Levinson:* Theory of ordinary differential equations, New York-Toronto-London, 1955.
[7] *Л. А. Люстерник, В. И. Соболев:* Элементы функционального анализа, Москва 1951.
[8] *P. R. Halmos:* Finite dimensional vector spaces. Princeton.
[9] *N. Dunford, J. T. Schwartz:* Linear operators — Part I: General Theory. New York 1958.

Výťah

O ANALYTICKEJ KONŠTRUKCII REGULÁTOROV V PRÍPADE NEKVADRATICKÉHO MINIMIZOVANÉHO FUNKCIONÁLU

PAVOL BRUNOVSKÝ, Bratislava

Nech je daný regulačný systém

$$\dot{\eta}_i = \sum_{j=1}^{n} b_{ij}\eta_j + m_i\xi \quad i = 1, 2, \ldots, n \tag{1}$$

vo vektorovom tvare

$$\dot{\eta} = B\eta + m\xi$$

a funkcia $V(\eta_1, \ldots, \eta_n, \xi)$. Nech systém (1) je regulovateľný, tj. nech vektory m, $Bm, \ldots, B^{n-1}m$ sú lineárne nezávislé.

Základná úloha analytickej konštrukcie regulátorov môže byť formulovaná nasledovne (pozri [1]):

K danej počiatočnej podmienke $\hat{\eta}$ treba nájsť funkcie $\xi(t), \eta_1(t), \ldots, \eta_n(t)$, vyhovujúce systému (1) a podmienkam

$$\eta_i(0) = \hat{\eta}_i\,, \quad \lim_{t\to\infty} \eta_i(t) = 0\,, \quad i = 1, 2, \ldots, n$$

také, že integrál

$$J(\xi) = \int_0^\infty V(\eta_1(t), \ldots, \eta_n(t), \xi(t))\,\mathrm{d}t$$

nadobúda minimálnu hodnotu. Túto úlohu nazveme úlohou (V).

V [1] a [2] sa vyšetruje problém existencie a jednoznačnosti riešenia úlohy (V) v prípade, že V je kvadratická forma.

V tomto článku je ukázané, že za istých všeobecných predpokladoch o funkcii V, ktorá nemusí nutne byť kvadratická, z existencie riešenia úlohy (V) pre dostatočne malé počiatočné podmienky vyplýva jeho jednoznačnosť, pričom reguláciu ξ, dávajúcu riešenie úlohy (V), je možné nezávisle na počiatočnej podmienke vyjadriť ako funkciu η. Ďalej je ukázaná trieda nekvadratických funkcií V, pre ktoré existuje riešenie úlohy (V).

Summary

ON REGULATOR ANALYTICAL DESIGN IN THE CASE OF A NON-QUADRATIC MINIMIZED FUNCTIONAL

PAVOL BRUNOVSKÝ, Bratislava

There is given a control system

$$\dot{\eta} = \sum_{j=1}^{n} b_{ij}\eta_j + m_i\xi\,, \quad i = 1, \ldots, n\,, \tag{1}$$

in vector form

$$\dot{\eta} = B\eta + m\xi$$

and a function $V(\eta_1, \ldots, \eta_n, \xi)$. Let the system (1) be controllable, i.e. the vectors $m, Bm, \ldots, B^{n-1}m$ be linearly independent.

The basic problem of the analytical design of regulators (called as problem (V)) can be defined as follows (see [1]):

To a given initial value $\hat{\eta}$ functions $\xi(t), \eta_1(t), \ldots, \eta_n(t)$ satisfying the system (1) and the conditions

$$\eta_i(0) = \hat{\eta}_i\,, \quad \lim_{t\to\infty} \eta_i(t) = 0\,, \quad i = 1, \ldots, n$$

are to be found such that the value of the integral

$$J(\xi) = \int_0^\infty V(\eta_1(t), \ldots, \eta_n(t), \xi(t))\,\mathrm{d}t$$

is minimal.

In [1] and [2] the problem of the existence and uniqueness of the problem (V) is considered if V is a quadratic form.

In this paper it is shown that under some general assumptions about the function V, which need not be quadratic, the existence of the solution of the problem (V) for sufficiently small initial conditions implies its uniqueness and the fact that the control function ξ, giving the solution of the problem (V), can be expressed as a function of η which is independent of the initial condition. Also a class of nonquadratic functions V, for which the solution of the problem (V) exists, is given.