Miloš Novotný

Věta o konvoluci obrazů při Laplaceově transformaci

Časopis pro pěstování matematiky, Vol. 90 (1965), No. 3, 328--336

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/108747

Časopis pro pěstování matematiky, roč. 90 (1965), Praha

VĚTA O KONVOLUCI OBRAZŮ PŘI LAPLACEOVĚ TRANSFORMACI

MILOŠ NOVOTNÝ, Praha

(Došlo dne 13. června 1964)

Při technických aplikacích Laplaceovy transformace používá se dost často věty o tzv. konvoluci obrazů, přestože v běžných matematických monografiích o Laplaceově transformaci není tato věta buď vůbec uvedena nebo ji tam nalézáme za předpokladů natolik silných, že v praxi nemusí být splněny, a v trochu jiné podobě, než v jaké se ji v praxi užívá (viz [1], kap. VIII, § 6, věta IV_a^0). Tato práce obsahuje proto důkazy věty o konvoluci obrazů v jejím tradičním tvaru a za poměrně slabých předpokladů.

Tato práce předpokládá znalost základů teorie Laplaceovy transformace (viz [1], kap. III. až VIII.) a teorie Lebesgueovy míry a Lebesgueova integrálu (viz [2], kap. I. až VIII.). Měrou a integrálem myslíme všude Lebesgueovu míru a Lebesgueův integrál. Speciálně absolutně konvergentním integrálem myslíme Lebesgueův integrál podle obvyklé definice ([2], kap. III.) na rozdíl od nevlastního Lebesgueova integrálu podle zobecněné definice ([2], kap. VIII.), který může konvergovat i neabsolutně.

Věta 1. *Předpokládejme:*

1) *Množina* $M \subset \langle 0, +\infty)$ *má míru* 0.

2) *V okolí každého* $t \in \langle 0, +\infty) - M$ *má funkce* f *konečnou variaci.*

3) $f(t) = \frac{1}{2}[\lim_{\tau \to t-} f(\tau) + \lim_{\tau \to t+} f(\tau)]$ *pro všechna* $t \in \langle 0, +\infty) - M$.

4) *Integrál* $F(p) = \int_0^{+\infty} f(t)\, e^{-pt}\, \mathrm{d}t$ *absolutně konverguje pro* $x(f) < \operatorname{Re} p < +\infty$.

5) $x(f) < x < +\infty$ *a* $C(x)$ *je přímka s rovnicí* $z = x + iy$ *pro* $-\infty < y < +\infty$.

6) *Integrál* $\int_{C(x)} F(z)\, \mathrm{d}z$ *absolutně konverguje.*

7) *Integrál* $G(p) = \int_0^{+\infty} g(t)\, e^{-pt}\, \mathrm{d}t$ *absolutně konverguje pro* $x(g) < \operatorname{Re} p < +\infty$.

Potom pro všechna p, splňující nerovnost

(1) $$x(g) + x < \operatorname{Re} p < +\infty\,,$$

platí

(2) $$\int_0^{+\infty} f(t)\, g(t)\, e^{-pt}\, \mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi i} \int_{C(x)} F(z)\, G(p - z)\, \mathrm{d}z\,;$$

integrály na obou stranách (2) *absolutně konvergují.*

Důkaz: Omezme se na p, splňující (1). Označme $|C(x)|$ množinu všech komplexních z takových, že $z = x + iy$, kde $-\infty < y < +\infty$. Potom podle 6) a 7) konvergují integrály $\int_{-\infty}^{+\infty} |F(x + iy)|\, \mathrm{d}y$ a $\int_0^{+\infty} |g(t)|\, e^{-(\operatorname{Re} p - x)t}\, \mathrm{d}t$ a tedy také integrál

$\iint_{\substack{0 \leqq t < +\infty \\ -\infty < y < +\infty}} |F(x + iy)|\, |g(t)|\, e^{-(\operatorname{Re} p - x)t}\, \mathrm{d}t\, \mathrm{d}y$. Protože podle 4) a 7) $|F(z)\, g(t)\, e^{-(p-z)t}| =$ $= |F(x + iy)|\, |g(t)|\, e^{-(\operatorname{Re} p - x)t}$ pro všechna $z \in |C(x)|$ a skoro všechna $0 \leqq t < +\infty$, musí tedy integrál $\iint_{\substack{0 \leqq t < +\infty \\ z \in |C(x)|}} F(z)\, g(t)\, e^{-(p-z)t}\, \mathrm{d}t\, \mathrm{d}z$ absolutně konvergovat, takže podle Fubiniovy věty

(3) $$\int_0^{+\infty} g(t)\, e^{-pt} \left[\int_{C(x)} F(z)\, e^{tz}\, \mathrm{d}z \right] \mathrm{d}t = \iint_{\substack{0 \leqq t < +\infty \\ z \in |C(x)|}} F(z)\, g(t)\, e^{-(p-z)t}\, \mathrm{d}t\, \mathrm{d}z =$$
$$= \int_{C(x)} F(z) \left[\int_0^{+\infty} g(t)\, e^{-(p-z)t}\, \mathrm{d}t \right] \mathrm{d}z\,.$$

Z 1) až 5) plyne však podle věty o inversní transformaci k transformaci Laplaceově ([1], kap. VI., § 5, věta 2.), že

(4) $$\frac{1}{2\pi i} \int_{C(x)} F(z)\, e^{tz}\, \mathrm{d}z = f(t) \quad \text{pro skoro všechna} \quad t \in \langle 0, +\infty)\,,$$

a 7) a 1) dává vzorec

(5) $$\int_0^{+\infty} g(t)\, e^{-(p-z)t}\, \mathrm{d}t = G(p - z)\,.$$

Dosazením (4) a (5) do (3) dostaneme dokazovaný vzorec (2).

Absolutní konvergence integrálů na obou stranách (2) plyne ze (3) po dosazení (4) a (5).

Ve větě 1. předpokládáme poměrně málo o funkci g, ale zato poměrně mnoho o funkci f; zejména předpoklad 6) je dosti silný. Odvodíme proto ještě další větu, kde předpoklady o funkci g budou zesíleny, kdežto předpoklady o funkci f zeslabeny; zejména oslabíme předpoklad 6).

Věta 2. *Předpokládejme:*

1) *Množina* $M \subset \langle 0, +\infty)$ *má míru* 0.

2) *V okolí každého* $t \in \langle 0, +\infty) - M$ *má funkce* f *konečnou variaci.*

3) $f(t) = \frac{1}{2}[\lim_{\tau \to t-} f(\tau) + \lim_{\tau \to t+} f(\tau)]$ *pro všechna* $t \in \langle 0, +\infty) - M$.

4) *Integrál* $F(p) = \int_0^{+\infty} f(t)\, e^{-pt}\, \mathrm{d}t$ *konverguje absolutně pro* $x(f) < \mathrm{Re}\, p < < +\infty$.

5) $x(f) < x < +\infty$ *a* $C(x)$ *je přímka s rovnicí* $z = x + iy$ *pro* $-\infty < y < +\infty$.

6) *Jsou-li* t_1 *a* t_2 *libovolná čísla taková, že* $0 < t_1 \leqq t_2 < +\infty$, *nevlastní integrál* $\int_{-\infty}^{+\infty} F(x + iy)\, e^{ity}\, \mathrm{d}y$ *konverguje stejnoměrně pro všechna* $t_1 \leqq t < t_2$.

7) *Integrál* $\int_{C(x)} [F(z)/(p - z)]\, \mathrm{d}z$ *konverguje absolutně pro* $x < \mathrm{Re}\, p < +\infty$.

8) *Funkce* g *je omezená v intervalu* $\langle 0, t_1 \rangle$ *a absolutně spojitá v intervalu* $\langle t_1, t_2 \rangle$ *pro všechna* $0 < t_1 \leqq t_2 < +\infty$.

9) *Integrál* $\int_0^{+\infty} g'(t)\, e^{-pt}\, \mathrm{d}t$ *konverguje absolutně pro* $x(g') < \mathrm{Re}\, p < +\infty$.

Potom platí:

I. *Integrál* $G(p) = \int_0^{+\infty} g(t)\, e^{-pt}\, \mathrm{d}t$ *konverguje absolutně pro* $x(g') < \mathrm{Re}\, p < < +\infty$.

II. *Pro všechna* p, *splňující nerovnost*

$$\max [x(g') + x, x] < \mathrm{Re}\, p < +\infty\,, \tag{6}$$

je

$$\int_0^{+\infty} f(t)\, g(t)\, e^{-pt}\, \mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi i} \int_{C(x)} F(z)\, G(p - z)\, \mathrm{d}z\,, \tag{7}$$

kde integrál vlevo resp. vpravo může konvergovat i neabsolutně resp. konverguje absolutně.

Důkaz: Z 8), 9) a věty o obrazu derivace ([1], kap. VIII., § 1., věta 1.) plyne ihned I. Omezme se na p, splňující (6), a na $z \in |C(x)|$; přitom $|C(x)|$ je opět množina všech $z = x + iy$ takových, že $-\infty < y < +\infty$. Dále nechť t_1 a t_2 jsou libovolná čísla taková, že $0 < t_1 \leqq t_2 < +\infty$.

Podle 8) je funkce $g(t)\, e^{-(p-z)t}$ spojitá a splňuje vzorec $|g(t)\, e^{-(p-z)t}| = |g(t)| . e^{-(\mathrm{Re}\, p - x)t}$ pro $[t, z] \in \langle t_1, t_2 \rangle \times |C(x)|$. Protože pravá strana poslední rovnosti má podle 8) v $\langle t_1, t_2 \rangle$ integrál, je funkce $\int_{t_1}^{t_2} g(t)\, e^{-(p-z)t}\, \mathrm{d}t$ podle věty o spojitosti integrálu, závislého na parametru ([2], kap. VII., věta 107.) spojitá pro $z \in |C(x)|$. Podle 4), 5) a věty o derivaci obrazu ([1], kap. IV., § 1., věta 6.) je funkce F analytická pro $z \in |C(x)|$. Z toho a z předchozího plyne, že funkce $\int_{t_1}^{t_2} F(z)\, g(t)\, e^{-(p-z)t}\, \mathrm{d}t$ je spojitá a tedy měřitelná pro $z \in |C(x)|$.

Z (6) plyne $\mathrm{Re}\,(p - z) = \mathrm{Re}\, p - x > 0$ a tedy $p \neq z$ pro $z \in |C(x)|$. Podle 8) a věty o integraci po částech tedy dostáváme

$$\int_{t_1}^{t_2} g(t)\, e^{-(p-z)t}\, \mathrm{d}t = \left[- g(t)\, \frac{e^{-(p-z)t}}{p - z} \right]_{t=t_1}^{t=t_2} + \int_{t_1}^{t_2} g'(t)\, \frac{e^{-(p-z)t}}{p - z}\, \mathrm{d}t\,,$$

takže

$$(8) \qquad \left|\int_{t_1}^{t_2} g(t)\, e^{-(p-z)t}\, \mathrm{d}t\right| \leqq \frac{1}{|p-z|}\left[|g(t_1)|\, e^{-(\mathrm{Re}\,p-x)t_1} + |g(t_2)|\, e^{-(\mathrm{Re}\,p-x)t_2} + \right.$$
$$\left. + \int_{t_1}^{t_2} |g'(t)|\, e^{-(\mathrm{Re}\,p-x)t}\, \mathrm{d}t\right].$$

Podle (6)

$$(9) \qquad x(g') < \mathrm{Re}\,p - x < +\infty\,,$$

takže podle předpokladu 9) a věty o obrazu derivace ([1], kap. VIII., § 1., věta 1.)

$$g(t) = \underset{t\to+\infty}{o}\left[e^{(\mathrm{Re}\,p-x)t}\right].$$

Ke každému $\varepsilon \in (0, +\infty)$ existuje tedy $T \in \langle 0, +\infty)$ takové, že $|g(t)|\, e^{-(\mathrm{Re}\,p-x)t} < \varepsilon$ pro $T < t < +\infty$. Protože dále podle 8) je funkce g omezená v $\langle 0, T\rangle$, funkce $|g(t)|\, e^{-(\mathrm{Re}\,p-x)t}$ je omezená pro všechna $t \in \langle 0, +\infty)$. První dva členy hranaté závorky na pravé straně (8) jsou tedy omezené pro všechna $0 < t_1 \leqq t_2 < +\infty$. Z (8), (9) a 9) však plyne, že i poslední člen hranaté závorky na pravé straně je omezený pro všechna $0 < t_1 \leqq t_2 < +\infty$. Existuje tedy číslo $A \in (0, +\infty)$ takové, že

$$(10) \qquad \left|\int_{t_1}^{t_2} F(z)\, g(t)\, e^{-(p-z)t}\, \mathrm{d}t\right| \leqq A\left|\frac{F(z)}{p-z}\right|$$

pro všechna $0 < t_1 \leqq t_2 < +\infty$ a $z \in |C(x)|$.

Z (6) plyne $\mathrm{Re}\,(p-z) = \mathrm{Re}\,p - x > x(g')$ pro $z \in |C(x)|$, takže podle tvrzení I., které jsme už dokázali, integrál $\int_0^{+\infty} g(t)\, e^{-(p-z)t}\, \mathrm{d}t$ absolutně konverguje k výrazu $G(p-z)$. Proto

$$\lim_{\substack{t_1\to 0+\\ t_2\to+\infty}} \int_{t_1}^{t_2} F(z)\, g(t)\, e^{-(p-z)t}\, \mathrm{d}t = F(z)\int_0^{+\infty} g(t)\, e^{-(p-z)t}\, \mathrm{d}t =$$
$$= F(z)\, G(p-z) \quad \text{pro} \quad z \in |C(x)|\,.$$

Z toho všeho a ze 7) plyne podle jedné z vět o záměně limity a integrálu ([2], kap. III., věta 65.), že integrály $\int_{C(x)}[\int_{t_1}^{t_2} F(z)\, g(t)\, e^{-(p-z)t}\, \mathrm{d}t]\, \mathrm{d}z$ pro všechna $0 < t_1 \leqq t_2 < +\infty$ a

$$\int_{C(x)}\left[\int_0^{+\infty} F(z)\, g(t)\, e^{-(p-z)t}\, \mathrm{d}t\right]\mathrm{d}z = \int_{C(x)} F(z)\, G(p-z)\, \mathrm{d}z$$

konvergují absolutně, čímž je dokázána druhá část tvrzení II, a že

$$(12) \qquad \int_{C(x)} F(z)\, G(p-z)\, \mathrm{d}z = \int_{C(x)}\left[\int_0^{+\infty} F(z)\, g(t)\, e^{-(p-z)t}\, \mathrm{d}t\right]\mathrm{d}z =$$
$$= \lim_{\substack{t_1\to 0+\\ t_2\to+\infty}} \int_{C(x)}\left[\int_{t_1}^{t_2} F(z)\, g(t)\, e^{-(p-z)t}\, \mathrm{d}t\right]\mathrm{d}z\,.$$

Označme $C(x; y_1, y_2)$ úsečku s rovnicí $z = x + iy$ pro $y_1 \leqq y \leqq y_2$ a $|C(x; y_1, y_2)|$ množinu všech $z = x + iy$ takových, že $y_1 \leqq y \leqq y_2$, takže $|C(x; y_1, y_2)|$ je uzavřená část $|C(x)|$. Z analytičnosti F pro $z \in |C(x)|$ a z 8) plyne omezenost $F(z)\, g(t)\, e^{-(p-z)t}$ pro $[t, z] \in \langle t_1, t_2 \rangle \times |C(x; y_1, y_2)|$, takže integrál $\iint\limits_{\substack{t_1 \leqq t \leqq t_2 \\ z \in |C(x; y_1, y_2)|}} F(z)\, g(t)\, e^{-(p-z)t}\, dt\, dz$ absolutně konverguje a tedy podle Fubiniovy věty

$$(13) \qquad \int_{C(x;y_1,y_2)} \left[\int_{t_1}^{t_2} F(z)\, g(t)\, e^{-(p-z)t}\, dt \right] dz = \int_{t_1}^{t_2} \left[\int_{C(x;y_1,y_2)} F(z)\, g(t)\, e^{-(p-z)t}\, dz \right] dt\,.$$

Integrál za limitou na pravé straně (12) lze tedy napsat ve tvaru

(14)
$$\int_{C(x)} \left[\int_{t_1}^{t_2} F(z)\, g(t)\, e^{-(p-z)t}\, dt \right] dz = \lim_{\substack{y_1 \to -\infty \\ y_2 \to +\infty}} \int_{C(x;y_1,y_2)} \left[\int_{t_1}^{t_2} F(z)\, g(t)\, e^{-(p-z)t}\, dt \right] dz =$$
$$= \lim_{\substack{y_1 \to -\infty \\ y_2 \to +\infty}} \int_{t_1}^{t_2} \left[\int_{C(x;y_1,y_2)} F(z)\, g(t)\, e^{-(p-z)t}\, dz \right] dt\,.$$

Podle (13) jsou $\int_{C(x;y_1,y_2)} F(z)\, g(t)\, e^{-(p-z)t}\, dz$ pro všechna $-\infty < y_1 \leqq y_2 < +\infty$ měřitelné funkce proměnné t v intervalu $\langle t_1, t_2 \rangle$. Protože podle 6) integrál

$$\int_{C(x)} F(z)\, g(t)\, e^{-(p-z)t}\, dz = i g(t)\, e^{-(p-z)t} \int_{-\infty}^{+\infty} F(x + iy)\, e^{ity}\, dy$$

konverguje stejnoměrně pro všechna $t_1 \leqq t \leqq t_2$, platí

$$\lim_{\substack{y_1 \to -\infty \\ y_2 \to +\infty}} \int_{C(x;y_1,y_2)} F(z)\, g(t)\, e^{-(p-z)t} = \int_{C(x)} F(z)\, g(t)\, e^{-(p-z)t}\, dz$$

stejnoměrně pro všechna $t_1 \leqq t \leqq t_2$. Z toho a z existence integrálu na pravé straně (13) plyne podle jedné z vět o záměně limity a integrálu ([2], kap. III., věta 56.) vzorec

$$(15) \qquad \lim_{\substack{y_1 \to -\infty \\ y_2 \to +\infty}} \int_{t_1}^{t_2} \left[\int_{C(x;y_1,y_2)} F(z)\, g(t)\, e^{-(p-z)t}\, dz \right] dt =$$
$$= \int_{t_1}^{t_2} \left[\lim_{\substack{y_1 \to -\infty \\ y_2 \to +\infty}} \int_{C(x;y_1 y_2)} F(z)\, g(t)\, e^{-(p-z)t}\, dz \right] dt = \int_{t_1}^{t_2} \left[\int_{C(x)} F(z)\, g(t)\, e^{-(p-z)t}\, dz \right] dt\,,$$

kde vnitřní integrál na pravé straně může být i nevlastní.

Ze (14) a (15) plyne však

$$\int_{C(x)} \left[\int_{t_1}^{t_2} F(z)\, g(t)\, e^{-(p-z)t}\, dt \right] dz = \int_{t_1}^{t_2} \left[\int_{C(x)} F(z)\, g(t)\, e^{-(p-z)t}\, dz \right] dt\,,$$

kde vnitřní integrál na pravé straně může být i nevlastní, což dosazeno (12) dává

$$(16)\qquad \int_{C(x)} F(z)\, G(p-z)\,\mathrm{d}z = \lim_{\substack{t_1\to 0+\\ t_2\to+\infty}} \int_{t_1}^{t_2}\left[\int_{C(x)} F(z)\, g(t)\, e^{-(p-z)t}\,\mathrm{d}z\right]\mathrm{d}t =$$
$$= \int_0^{+\infty}\left[\int_{C(x)} F(z)\, e^{tz}\,\mathrm{d}z\right] g(t)\, e^{-pt}\,\mathrm{d}t,$$

kde vnitřní i vnější integrál na pravé straně mohou být i nevlastní.

Ale podle 1) až 5) a věty o inversní transformaci k transformaci Laplaceově ([1], kap. VI., § 5., věta 2.) $\int_{C(x)} F(z)\, e^{tz}\,\mathrm{d}z = 2\pi i f(t)$ pro skoro všechna $t \in \langle 0, +\infty)$, což dosazeno do (16) dává dokazovaný vzorec ve II. Tím je důkaz hotov.

Uveďme ještě dostačující podmínku proto to, aby byl splněn předpoklad 6) věty 2.:

Lemma 1. *Předpokládejme:*

1) *Jsou splněny předpoklady* 4) *a* 5) *věty* 2.

2) *Existuje* $Y_1 \in (0, +\infty)$ *takové, že funkce* $F_1(y) = \operatorname{Re} F(x+iy)$ *a* $F_2(y) = \operatorname{Im} F(x+iy)$ *jsou monotónní v intervalu* $(-\infty, -Y_1)$ *i v intervalu* $(Y_1, +\infty)$.

3) $\lim_{|y|\to+\infty} F(x+iy) = 0$.

Potom je splněn předpoklad 6) *věty* 2.

Důkaz: Zvolme libovolná t_1 a t_2 taková, že $0 < t_1 \leqq t_2 < +\infty$, a libovolné $\varepsilon \in (0, +\infty)$. Podle 2) a 3) existuje k tomuto ε takové $Y_2 \in (0, +\infty)$, že

$$(17)\qquad |F_k(y)| \leqq |F(x+iy)| < \tfrac{1}{16}\varepsilon t_1 \quad \text{pro} \quad Y_2 \leqq |y| < +\infty \quad (k = 1, 2)\,.$$

Pro všechna a a b taková, že $-\infty < a \leqq b < +\infty$, platí dále nerovnost

$$(18)\qquad \left|\int_a^b \varphi(ty)\,\mathrm{d}y\right| \leqq \frac{2}{t} \leqq \frac{2}{t_1}$$

pro všechna $t_1 \leqq t \leqq t_2$ a pro $\varphi(ty) = \sin ty$, nebo $\varphi(ty) = \cos ty$.

Označme nyní $Y = \max(Y_1, Y_2) = -\min(-Y_1, -Y_2)$. Potom pro všechna y_1 a y_2 taková, že buď $-\infty < y_1 \leqq y_2 < -Y$ nebo $Y < y_1 \leqq y_2 < +\infty$, dává 2) a druhá integrální věta o střední hodnotě ([2], kap. V., věta 101.) vzorec

$$\int_{y_1}^{y_2} F_k(y)\,\varphi(ty)\,\mathrm{d}y = F_k(y_1)\int_{y_1}^{\eta_k}\varphi(ty)\,\mathrm{d}y + F_k(y_2)\int_{\eta_k}^{y_2}\varphi(ty)\,\mathrm{d}y$$

pro jisté $\eta_k \in \langle y_1, y_2\rangle$ $(k = 1, 2)$, takže podle (17) a (18)

$$\left|\int_{y_1}^{y_2} F_k(y)\,\varphi(ty)\,\mathrm{d}y\right| < \frac{\varepsilon t_1}{16}\cdot\frac{2}{t_1} + \frac{\varepsilon t_1}{16}\cdot\frac{2}{t_1} = \frac{1}{4}\varepsilon$$

pro všechna $t_1 \leqq t \leqq t_2$ $(k = 1, 2)$ a tedy

$$\left| \int_{y_1}^{y_2} F(x + iy) \, e^{ity} \, \mathrm{d}y \right| = \left| \int_{y_1}^{y_2} F_1(y) \, e^{ity} \, \mathrm{d}y + i \int_{y_1}^{y_2} F_2(y) \, e^{ity} \, \mathrm{d}y \right| < \varepsilon$$

pro všechna $t_1 \leqq t \leqq t_2$. Z toho plyne podle Bolzano-Cauchyova kritéria, že nevlastní integrál $\int_{-\infty}^{+\infty} F(x + iy) \, e^{ity} \, \mathrm{d}y$ konverguje stejnoměrně pro všechna $t_1 \leqq \leqq t \leqq t_2$ a důkaz je hotov.

Pro úplnost uvedeme ještě dostačující podmínku pro to, aby funkce g byla absolutně spojitá v intervalu $\langle t_1, t_2 \rangle$:

Lemma 2. *Nechť je splněna aspoň jedna z těchto podmínek*:

1) *Funkce g má omezenou derivaci v intervalu $\langle t_1, t_2 \rangle$.*

2) *Funkce g splňuje v intervalu $\langle t_1, t_2 \rangle$ tzv. Lipschitzovu podmínku, tj. existuje $K \in \langle 0, +\infty)$ takové, že $|g(t'') - g(t')| \leqq K|t'' - t'|$ pro všechna $t', t'' \in \langle t_1, t_2 \rangle$.*

3) *Funkce g je spojitá a ryze monotónní v $\langle t_1, t_2 \rangle$ a obraz $g(N)$ množiny N bodů $t \in \langle t_1, t_2 \rangle$ takových, že $|g'(t)| = +\infty$, má míru* 0.

Potom funkce g je absolutně spojitá v $\langle t_1, t_2 \rangle$.

Důkaz: Že podmínka 2) je dostačující, plyne přímo z definice funkce absolutně spojité v $\langle t_1, t_2 \rangle$. Z podmínky 1) plyne podmínka 2). Konečně podmínka 3) je dostačující podle [3], cvičení 12. ke kap. IX.

Literatura

[1] *G. Doetsch:* Theorie und Anwendung der Laplace-Transformation, Berlin 1937.

[2] *V. Jarník:* Integrální počet, II. díl, Praha 1955.

[3] *И. П. Натансон:* Теория функций вещественной переменной, Москва 1957.

Резюме

ТЕОРЕМА О КОНВОЛЮЦИИ ОБРАЗОВ В ПРЕОБРАЗОВАНИИ ЛАПЛАСА

МИЛОШ НОВОТНЫ, (Miloš Novotný), Прага

В работе содержится формулировка и доказательство двух тоерем о т. наз. конволюции образов в преобразовании Лапласа, которые в монографиях о преобразовании Лапласа обыкновенно вообще не упоминаются или приводятся со слишком сильными предположениями, которые на практике не должны выполняться, и притом в несколько ином виде, чем требуется в приложениях (смотри [1], гл. VIII, § 6, теорема VIa). Речь идет о следующих теоремах:

Теорема 1. *Предположим:* 1) *Множество* $M \subset \langle 0, +\infty)$ *имеет меру* 0. 2) *В окресности каждой* $t \in \langle 0, +\infty) - M$ *имеет функция* f *конечное изменение.* 3) $f(t) = \frac{1}{2}[f(t-0) + f(t+0)]$ *для всех* $t \in \langle 0, +\infty) - M$. 4) *Интеграл* $F(p) = \int_0^{+\infty} f(t)\, e^{-pt}\, \mathrm{d}t$ *сходится абсолютно для* $x(f) < \operatorname{Re} p < +\infty$. 5) $x(f) < x < +\infty$ *и* $C(x)$ *есть прямая, определенная уравнением* $z = x + iy$ *для* $-\infty < y < +\infty$. 6) *Интеграл* $\int_{C(x)} F(z)\, \mathrm{d}z$ *абсолютно сходится.* 7) *Интеграл* $G(p) = \int_0^{+\infty} g(t)\, e^{-pt}\, \mathrm{d}t$ *абсолютно сходится для* $x(g) < \operatorname{Re} p < +\infty$. *Тогда для всех* p, *удовлетворяющих* (1), *выполнено* (2), *и интегралы в обеих частях* (2) *абсолютно сходятся.*

Теорема 2. *Предположим:* 1)–5) *как в теореме* 1. 6) *Если* t_1 *и* t_2 — *произвольные числа такие, что* $0 < t_1 \leqq t_2 < +\infty$, *несобственный интеграл* $\int_{-\infty}^{+\infty} F(x + iy)\, e^{ity}\, \mathrm{d}y$ *сходится равномерно для всех* $t_1 \leqq t \leqq t_2$. 7) *Интеграл* $\int_{C(x)} \cdot [F(z)/(p - z)]\, \mathrm{d}z$ *сходится абсолютно для* $x < \operatorname{Re} p < +\infty$. 8) *Функция* g *ограничена в интервале* $\langle 0, t_1 \rangle$ *и абсолютно непрерывна в интервале* $\langle t_1, t_2 \rangle$ *для всех* $0 < t_1 \leqq t_2 < +\infty$. 9) *Интеграл* $\int_0^{\infty} g(t)\, e^{-pt}\, \mathrm{d}t$ *сходится абсолютно для* $x(g) < \operatorname{Re} p < +\infty$. *Тогда:* I. *Интеграл* $G(p) = \int_0^{+\infty} g(t)\, e^{-pt}\, \mathrm{d}t$ *сходится абсолютно для* $x(g') < \operatorname{Re} p < +\infty$. II. *Для всех* p, *удовлетворяющих неравенству* (6), *выполнено* (7), *где интеграл в левой части, или же в правой части, может сходиться и неабсолютно, или же сходится абсолютно.*

В обеих этих теоремах разумеется мерой мера Лебега и интегралом интеграл Лебега. Специально абсолютно сходящимся интегралом разумеется определенный обыкновенным способом интеграл Лебега ([2], гл. III) в отличие от несобственного интеграла в смысле обобщенного определения ([2], гл. VIII), который может сходиться и неабсолютно.

Наконец, ва работе приведено следуещее достаточное условие для выполнения предположения 6) в теореме 2.: *Допустим:* 1) *Выполнены предположения* 4) *и* 5) *теоремы* 2. 2) *Существует* $Y_1 \in (0, +\infty)$ *такое, что функции* $F_1(y) = \operatorname{Re} F(x + iy)$ *и* $F_2(y) = \operatorname{Im} F(x + iy)$ *монотонны в интервале* $(-\infty, -Y_1)$ *и в интервале* $(Y_1, +\infty)$. 3) $\lim\limits_{|y| \to +\infty} F(x + iy) = 0$. *Тогда выполнено предположение* 6) *теоремы* 2.

Zusammenfassung

EIN SATZ VON DER FALTUNG DER BILDFUNKTION BEI DER LAPLACE-TRANSFORMATION

Miloš Novotný, Praha

In der vorliegenden Arbeit werden zwei Sätze formuliert und bewiesen, die die sogenannte Faltung der Bildfunktionen bei der Laplace-Transformation betreffen; diese Sätze sind in den gebräuchlichen Monographien über die Laplace-Transforma-

tion entweder überhaupt nicht erwähnt oder man findet sie zwar hier, aber unter zu starken Voraussetzungen, die in der Praxis nicht erfüllt sein müssen, und in einer etwas anderen Form als man sie in der Praxis benützt (siehe [1], Kap. VIII, § 6, Satz IVa). Es handelt sich um folgende Sätze:

Satz 1. *Wir setzen voraus*: 1) *Die Menge* $M \subset \langle 0, +\infty)$ *hat das Mass* 0. 2) *In der Umgebung jedes* $t \in \langle 0, +\infty) - M$ *hat die Funktion* f *eine endliche Variation.* 3) *Es ist* $f(t) = \frac{1}{2}[f(t - 0) + f(t + 0)]$ *für alle* $t \in \langle 0, +\infty) - M$. 4) *Das Integral* $F(p) = \int_0^{+\infty} f(t)\, e^{-pt}\, \mathrm{d}t$ *konvergiert absolut für* $x(f) < \operatorname{Re} p < +\infty$. 5) $x(f) < x < +\infty$ *und* $C(x)$ *ist eine Gerade von der Gleichung* $z = x + iy$ *für* $-\infty < y < +\infty$. 6) *Das Integral* $\int_{c(x)} F(z)\, \mathrm{d}z$ *konvergiert absolut.* 7) *Das Integral* $G(p) = \int_0^{\infty} g(t)\, e^{-pt}\, \mathrm{d}t$ *konvergiert absolut für* $x(g) < \operatorname{Re} p < +\infty$. *Für alle* p, *die* (1) *erfüllen, gilt dann* (2) *und die Integrale auf beiden Seiten von* (2) *konvergieren absolut.*

Satz 2. *Wir setzen voraus*: 1) *bis* 5) *wie im Satz* 1. 6) *Wenn* t_1 *und* t_2 *beliebige Zahlen sind, für die* $0 < t_1 \leqq t_2 < +\infty$ *ist, konvergiert das uneigentliche Integral* $\int_{-\infty}^{+\infty} F(x + iy)\, e^{ity}\, \mathrm{d}y$ *gleichmässig für alle* $t_1 \leqq t \leqq t_2$. 7) *Das Integral* $\int_{C(x)} [F(z)/(p - z)]\, \mathrm{d}z$ *konvergiert absolut für* $x < \operatorname{Re} p < +\infty$. 8) *Die Funktion* g *ist beschränkt im Intervall* $\langle 0, t_1\rangle$ *und absolut stetig im Intervall* $\langle t_1, t_2\rangle$ *für alle* $0 < t_1 \leqq t_2 \leqq +\infty$. 9) *Das Integral* $\int_0^{\infty} g'(t)\, e^{-pt}\, \mathrm{d}t$ *konveriert absolut für* $x(g') < \operatorname{Re} p < +\infty$. *Dann gilt*: *I. Das Integral* $G(p) = \int_0^{+\infty} g(t)\, e^{-pt}\, \mathrm{d}t$ *konvergiert absolut für* $x(g') < \operatorname{Re} p < +\infty$ *II. Für alle* p, *die die Ungleichung* (6) *erfüllen, gilt* (7), *wo das Integral auf der linken bzw. auf der rechten Seite auch nichtabsolut konvergieren kann bzw. absolut konvergiert.*

In beiden Sätzen verstehen wir unter dem Mass das Lebesguesche Mass und unter dem Integral das Lebesguesche Integral. Speziell haben wir beim absolut konvergierenden Integral das Lebesguesche Integral nach der üblichen Definition im Sinne ([2], kap. III) im Unterschied von dem uneigentlichen Integral nach der verallgemeinerten Definition ([2], kap. VII), das auch nicht absolut konvergieren kann.

Endlich ist im Artikel diese hinreichende Bedingung für die Gültigkeit der Voraussetzung 6) im Satze 2 angeführt: *Wir setzen voraus*: 1) *Es sind die Vorassetzungen* 4) *und* 5) *des Satzes* 2 *erfüllt.* 2) *Es existiert ein* $Y_1 \in (0, +\infty)$ *so, dass die Funktionen* $F_1(y) = \operatorname{Re} F(x + iy)$ *und* $F_2(y) = \operatorname{Im} F(x + iy)$ *im Intervall* $(-\infty, -Y_1)$ *und im Intervall* $(Y_1, +\infty)$ *monoton sind* 3) $\lim_{|y| \to +\infty} F(x + iy) = 0$. *Dann ist die Voraussetzung* 6) *des Satzes* 2 *erfüllt.*