Časopis pro pěstování matematiky

Úlohy a problémy

Časopis pro pěstování matematiky, Vol. 88 (1963), No. 2, 242

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/108737`

Časopis pro pěstování matematiky, roč. 88 (1963), Praha

ÚLOHY A PROBLÉMY

1. Je-li m přirozené číslo, pak označme $\alpha(m)$ ciferný součet čísla m (v desítkové soustavě). Nechť r a s jsou dvě přirozená čísla, o nichž platí $10^{r-1} < s < 10^r$. Rozhodněte, zda existuje limita

$$\lim_{k\to\infty} \alpha(s^k) .$$

Jiří Sedláček, Praha

2. Mějme dánu matici $\mathbf{A}$, která má n řádků a s sloupců. Její prvky (reálná čísla) označme a_{ij}, $i = 1, 2, \ldots, n$, $j = 1, 2, \ldots, s$. Vyberme z matice $\mathbf{A}$ m sloupců ($m < s$ je dané číslo) a z těchto sloupců sestavme novou matici $\mathbf{A}_1$. V každém řádku matice $\mathbf{A}_1$ vyberme maximální prvek a tyto prvky sečtěme. Chceme najít takových m sloupců, pro které je posledně zmíněný součet maximální (vzhledem ke všem $\binom{s}{m}$ možným výběrům sloupců z matice $\mathbf{A}$). Je otázka, lze-li tyto sloupce najít způsobem méně pracným, než vyzkoušením všech $\binom{s}{m}$ možností.

Úloha má některé *praktické aplikace*. Uveďme alespoň jednu z nich: Máme rozmístit m vysílačů (např. televizních) na $s > m$ předem vybraných vhodných míst (např. vrcholky kopců, místa, v nichž jsou zařízení, která lze adaptovat na vysílací stanice apod.) tak, aby byl zaručen nejlepší poslech co možná největšímu počtu obyvatel. Předpokládáme, že obyvatelstvo je soustředěno do n měst (sídlišť, oblastí). V i-tém městě nechť je v_i obyvatel. Pro každé město i, $i = 1, 2, \ldots, n$, nechť je udáno s nezáporných čísel a'_{ij}, která charakterizují předpokládaný příjem vysílače umístěného v j-tém místě v i-tém městě. Např. $a'_{ij} = 100$ značí dokonalý příjem, $a'_{ij} = 0$ příjem prakticky bezcenný apod. Předpokládejme ještě, že pro obyvatelstvo má význam pouze nejlépe slyšitelný vysílač (např. síť bude vysílat převážně stejné programy). Zaveďme proměnné $x_1, x_2, \ldots, x_s$, které nabývají pouze dvou hodnot: $x_j = 0$, když v místě j nebude postaven vysílač, $x_j = 1$, když v místě j bude vysílač, $j = 1, 2, \ldots, s$. Poslech v i-tém městě je pak charakterizován číslem

$$\max_j (a'_{ij}x_j) , \quad j = 1, 2, \ldots, s .$$

Násobíme-li toto číslo počtem obyvatel ve městě a sečteme-li tyto součiny za všechna města, dostaneme výraz, jehož maximalizací přes hodnoty x_j zaručíme co možná nejlepší poslech největšímu počtu obyvatel:

$$\sum_{i=1}^{n} v_i \max_j (a'_{ij}x_j) = \sum_{i=1}^{n} \max_j (a_{ij}x_j) ,$$

kde $a_{ij} = v_i a'_{ij}$. Úloha vede na nalezení $x_1, x_2, \ldots, x_s$, která mohou nabýt hodnot 0 nebo 1 a splňují omezení $\sum_{j=1}^{s} x_j = m$, takových, že $\sum_{i=1}^{n} \max_j (a_{ij}x_j)$ nabývá maxima. To je zřejmě jen jiná (ekvivalentní) formulace úlohy uvedené na začátku.

Miroslav Maňas, Praha