Časopis pro pěstování matematiky

František Kadeřávek

O plochách se snadno stanovitelnými křivkami největšího spádu vzhledem k dané rovině

*Časopis pro pěstování matematiky*, Vol. 78 (1953), No. 4, 341--346

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/108700

Časopis pro pěstování matematiky, roč. 78 (1953)

# O PLOCHÁCH SE SNADNO STANOVITELNÝMI KŘIVKAMI NEJVĚTŠÍHO SPÁDU VZHLEDEM K DANÉ ROVINĚ

FRANTIŠEK KADEŘÁVEK, Praha.

(Došlo dne 18. května 1953.) DT: 515.2

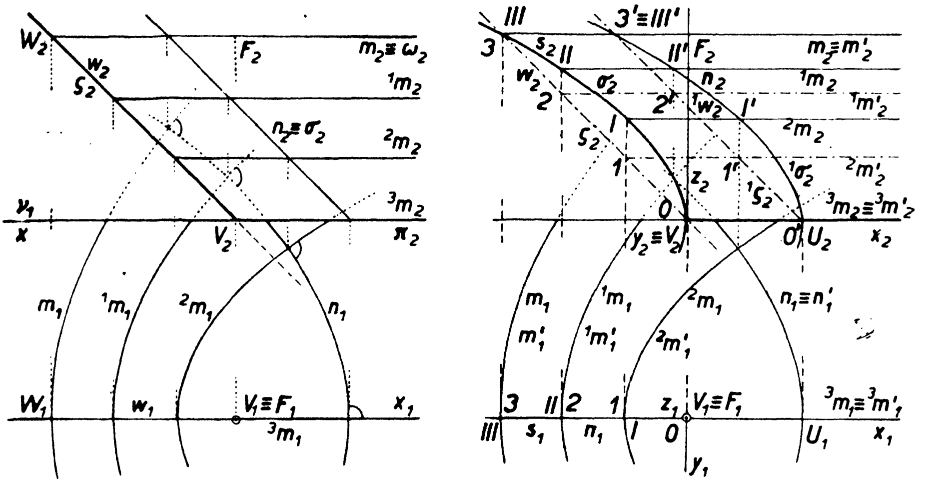
Při výkladech o křivkách největšího spádu vzhledem k dané rovině bývá používáno zpravidla triviálních příkladů. V následujícím bude poukázáno na jednoduché plochy, které dávají vhodný příklad křivek největšího spádu k zvolené rovině.

1. V obr. 1a zvolena byla v rovině $\omega \parallel \pi$ parabola $m$ o ohnisku $F$ a vrcholu $W$; $WF \parallel x$. Pata $V$ kolmice spuštěné z $F$ na $\pi$ použita byla jako vrchol kuželové plochy $\eta$ druhého stupně, procházející parabolou $m$. Je zřejmé, že prvé průměty řezů $m, {}^1m, {}^2m, \ldots$ v rovinách rovnoběžných s $\pi$ jsou koaxiální a konfokální kuželosečky s $m_1$ — dotýkají se totiž obrysu plochy $\eta$, který je tvořen isotropickými přímkami roviny $\pi$, procházejícími bodem $V_1$. Rovina $\sigma$ vedená rovnoběžně k nárysně promítací rovině $\varrho$ vrcholové přímky $w$ plochy $\eta$ — protne kuželovou plochu $\eta$ v parabole $n$, jejíž půdorys je z důvodů uvedených pro křivky ${}^1m, {}^2m, \ldots$ konfokální a koaxiální s těmito parabolami a proto je protíná vesměs v pravém úhlu. I jsou tu paraboly plochy $\eta$ položené v rovinách rovnoběžných s rovinou $\varrho$ křivkami největšího spádu dané plochy kuželové $\eta$ a to vzhledem k půdorysně $\pi$. Řezy plochy $\eta$ rovnoběžné s $\pi$ a s rovinou $\varrho$ dávají nárys ve dvou osnovách rovnoběžných přímek, půdorysy jejich jsou souosé paraboly o společném ohnisku.

Béře-li se v úvahu celá kuželová plocha $\eta$, jdoucí od vrcholu $V$ na obě strany, je každá ze souosých a společné ohnisko majících parabol v $\pi$ půdorysem jednoho řezu plochy $\eta$ rovnoběžného s $\pi$ a jedné z parabol největšího spádu plochy $\eta$ vzhledem k $\pi$.

2. Místo přímky $w$ (obr. 1b) z předešlého příkladu zvolme parabolu $s \equiv z^2 = -2qx$ $(q > 0)$; $y = 0$ a na ní zvolme vrcholy $0, I, II, III, \ldots$ parabol $m, {}^1m, {}^2m, \ldots$ rovnoběžných s $\pi$ a majících v půdoryse společnou osu a totéž ohnisko $F_1$. Vznikne tak plocha $\eta$, jejíž rovnice k daným osám souřadným $x, y, z$ je jednoduchá: $\eta \equiv q^2y^2 = 2qxz^2 + z^4$.

Spojme body $III\ 0$ přímkou $w$ a na ní vyhledejme body $0, 1, 2, 3, \ldots$, jejichž půdorysy spadají do bodů $0, I, II, III, \ldots$ a jimi veďme v rovinách rovnoběžných s průmětnou $\pi$ paraboly $m'$, ${}^1m'$, ${}^2m'$, ..., jejichž půdorysy splývají s půdorysy parabol $m$, ${}^1m$, ${}^2m$ ... plochy $\eta$. Tyto paraboly vyplní plochu $\eta'$, která byla uvažována v předcházejícím odstavci a která je plochou kuželovou. Rovina ${}^1\varrho \parallel \varrho \perp \nu$ protíná $\eta'$ v parabole $n'$, jejíž půdorys je kolmou trajektorií soustavy křivek $m$, ${}^1m$, ${}^2m$, ... a provedeme-li nad úsečkou $\overline{0'III'}$ parabolu $n_2$ shodnou a shodně položenou k $s_2$, je tato křivka nárysem křivky $n$ plochy $\eta$ a půdorys $n_1 \equiv n_1'$ je proto půdorysem křivky $n$ největšího spádu plochy $\eta$ vzhledem k půdorysně $\pi$. Je proto dovozeno, že *křivky největšího*




*a)* Obr. 1. *b)*

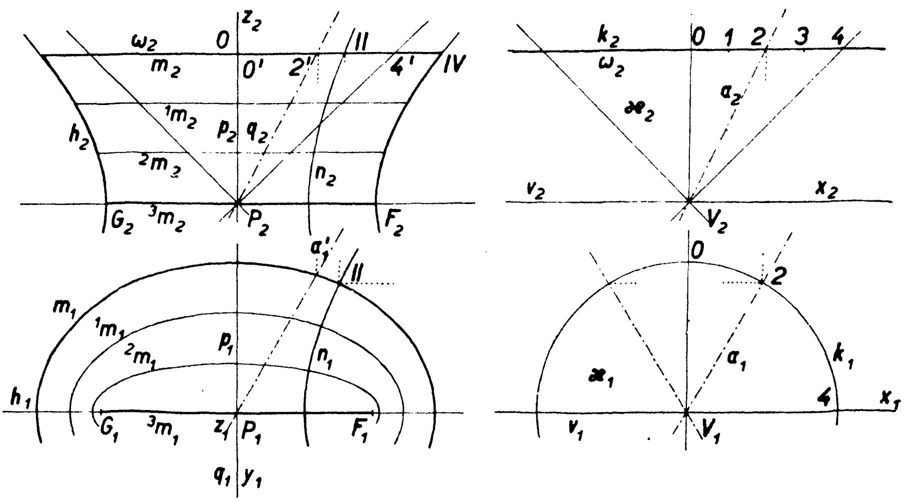
*spádu vzhledem k půdorysně $\pi$ pro uvažovanou plochu $\eta$ promítají se v půdoryse do konfokálních a koaxiálních parabol; jejich nárysy jsou souosé paraboly shodné a shodně položené s nárysem $s_2$ křivky $s$.*

Je-li bod $U$ průsečíkem křivky $n$ s přímkou ${}^3m$, je vidno, že křivka $n$ je proniková křivka dvou válcových parabolických ploch, které se v bodě $U$ a v úběžném bodě osy $x$ navzájem dotýkají. Proto se jejich proniková křivka rozpadá na dvě kuželosečky — paraboly o společném půdoryse v $n_1$. Platí pro plochu $\eta$ tohoto odstavce totéž, co platilo pro plochu uvažovanou v předcházejícím odstavci:

*Křivky největšího spádu vzhledem k rovině $\pi$ jsou rovinné. Jsou to paraboly o společné ose v ose $x$ a promítají se do $\pi$ do souosých a konfokálních parabol.*

Ve stranorysně jsou na uvažované ploše položeny dvě paraboly $z^2 = \pm qy$, $x = 0$, tedy o polovičním parametru toho, který přináleží parabole řídicí $s$. Tyto paraboly mají společnou osu v ose $y$ a dotýkají se svými vrcholy v počátku souřadnic. Parabola $s$ je pro plochu $\eta$ křivkou úžlabní, osa $x$, dvojná přímka plochy, jejím žlabem, stejně jako v předcházejícím odstavci přímka $w$ byla úžlabím nebo křivkou údolní a osa $x$ žlabem uvažované tam plochy.

3. Uvažovali jsme dvě plochy, na nichž řezy rovnoběžné s průmětnou $\pi$ se promítaly do soustavy souosých a konfokálních parabol. Zvolme nyní plochy, jejichž řezy rovnoběžné s rovinou $\pi$ se promítají do osnovy konfokálních kuželoseček, dotýkajících se dvou dvojin isotropických přímek, které procházejí body $F_1$, $G_1$ (obr. 2). Další zákon pro rozložení křivek samých v prostoru můžeme si zvoliti. Volme na př. ten, kdy vrcholy vedlejších os vyplňují dvě přímky




Obr. 2.

$p$, $q$, které jdou středem $P$ úsečky $\overline{FG} = 2e$, jsou položeny ve stranorysně $\mu$ a mají vzhledem k $\pi$ spád $\operatorname{tg} \varphi = +1$! Rovnice takto stanovené plochy $\eta$ jest

$$\eta \equiv -\frac{x^2}{z^2 + e^2} + \frac{y^2}{z^2} = 1$$

nebo

$$\eta \equiv z^4 + z^2 e^2 - z^2 x^2 - y^2 z^2 - e^2 y^2 = 0\,.$$

Pro $x = 0$ získává se mimo dvojiny přímek $p$, $q$ ještě dvojina imaginárně sdružených přímek $x = 0$; $z = \pm\, ie$. Osa $x \equiv v$ je dvojnou přímkou plochy; roviny jí proložené protínají plochu $\eta$ ještě v kuželosečkách, které, dotýkajíce se čtyř imaginárních rovin, jdoucích isotropickými přímkami určených ohnisky $F$ a $G$ a kolmých k rovině $\pi$, musí se nezbytně promítati do $\pi$ jako kuželosečky konfokální s průměty řezů plochy $\eta$, rovnoběžných s rovinou $\pi$ a jsou proto orthogonálními trajektoriemi těchto řezů a jsou tudíž i křivkami největšího spádu plochy $\eta$ vzhledem k rovině $\pi$. Obě přímky $p, q$ a dále hyperbola $y = 0$, $z^2 - x^2 + e^2 = 0$, jsou útvary úboční uvažované plochy a osa $x$ je jejím žlabem.

Podél úběžné kružnice plochy $\eta$, patřící do soustavy elips rovnoběžných s $\pi$ dotýká se plochy rotační plocha kuželová o vrcholu v bodě $P$, který půlí vzdálenost ohnisek $F$ a $G$. Na této úběžné kružnici leží úběžné body hyperbol největšího spádu, jsou proto jejich nárysy afinně sdružené směrem $x_2$ pro osu $z_2$.

Jednoduchý přímý důkaz je tento:

Vytkněme na ploše $\eta$ křivku $m$ v rovině $\omega$ rovnoběžné s $\pi$ a vedle vytkněme rotační plochu kuželovou $\varkappa$, mající vrchol $V$ v půdorysně a základnu $k$ v $\omega$. Poloměr kružnice $k$ je rovný vedlejší poloose elipsy $m$. Vyhledejme v náryse body *1, 2, 3, 4*, které rozdělují přímočarý nárys reálné části kružnice $k$ od středu ke krajnímu bodu na čtyři stejné díly. Jejich půdorysy jsou *1, 2, 3, 4* v $k_1$. Když jsme zvolili střed $P$ plochy $\eta$ a vrchol $V$ plochy kuželové $\varkappa$ v téže přímce $v \parallel x$, jsou roviny vedené přímkou $v$ a body *1, 2, 3, 4* kružnice $k$ ony roviny, které protínají plochu $\eta$ v hyperbolách největšího spádu vzhledem k rovině $\pi$. Rovnoběžky vedené body *1, 2, 3, 4* kružnice $k$ k ose $x$ vytyčují v křivce $m$ body *I, II, III, IV*, jimiž hledané hyperboly stejného spádu procházejí. Nárysy *I, II, III, IV* tvoří řadu podobnou k řadě *1, 2, 3, 4* v $k_2$. Asymptoty nárysů hyperbol spádových jdou bodem $P_2$ rovnoběžně ke spojnicím $V_2 1$, $V_2 2$, $V_2 3$, $V_2 4$ bodu $V_2$ s dělicími body v přímce $k_2$. I je řada $1'$, $2'$, $3'$, $4'$ v $m_2$ shodná s řadou *1, 2, 3, 4* v $k_2$ a proto jsou hyperboly určené asymptotami $P_2 1', \ldots$ a body $I', \ldots$ v $m_2$ afinně sdružené pro osu $z_2$ směrem $x_2$. Z křivek $n$ byla narýsována jen jedna, jdoucí bodem *II*.

Plocha $\eta$ je vzhledem k rovinám $\pi$, $\nu$, $\mu$ kolmo souměrná, bod $P$ je jejím středem a osy $x, y, z$ jsou jejími osami kolmé souměrnosti. Podél libovolné elipsy plochy $\eta$ dotýká se jí zborcená plocha 4°, mající osu v ose $z$ a řídící přímky jednu v ose $x$, druhou různoběžnou k $z$ a rovnoběžnou s osou $y$.

4. Zvolí-li se pro plochu $\eta$ místo zákona uvedeného v předešlém odstavci pravidlo, že vrcholy s $\pi$ rovnoběžných řezů plochy promítajících se do $\pi$ do konfokálních kuželoseček vyplňují v rovině $(x, z) \equiv \nu$ přímku jdoucí bodem $P$ a mající k $\pi$ spád $\operatorname{tg} \varphi = 1$, získáme plochu, která jsouc středová o středu v $P$ a o třech rovinách $\pi$, $\nu$, $\mu$ kolmé souměrnosti, má rovnici

$$\eta \equiv \frac{x^2}{z^2} - \frac{y^2}{y^2 e^2 - z^2} = 1,$$

čili

$$\eta \equiv (x^2 - z^2)(e^2 - z^2) = y^2 z^2 ,$$

či v jiném tvaru

$$\eta \equiv z^4 - z^2(x^2 + y^2 + e^2) + e^2 x^2 = 0 .$$

Pro $y = 0$ je určena na ploše dvojina přímek $y = 0$, $x = \pm z$, v nichž jsou vrcholy kuželoseček plochy, rovnoběžných s $\pi$ a dvě přímky $y = 0$, $z = \pm e$. V rovině $\mu$ je položena rovnoosá hyperbola $x = 0$, $z^2 - y^2 = e^2$ a dvojná přímka $x = 0$, $z = 0$. Tato plocha od roviny $\pi$ směrem vzhůru počíná osou $y$ jako dvojnou přímkou, v následujících s $\pi$ rovnoběžných rovinách má hyperboly; v rovině vzdálené od $\pi$ o úsečku $e$ má přímku kráterovou a nad touto rovinou jsou položeny elipsy, z nichž úběžná se ze středu $P$ plochy promítá stejně jako v případě předcházejícím rotační plochou kuželovou. Roviny, procházející osou $y$ protínají uvažovanou plochu v kuželosečkách, které tvoří pro plochu soustavu křivek největšího spádu vzhledem k rovině $\pi$ a promítají se do ní do kuželoseček konfokálních s průměty řezů rovnoběžných s rovinou $\pi$.

5. Výtvarné zákony pro polohu řezů plochy $\eta$ rovinami rovnoběžnými s $\pi$ v prostoru mohou být ovšem nejrůznější, ale předpokládáme-li stále, že tyto řezy se promítají do $\pi$ do konfokálních kuželoseček o stejné lineární výstřednosti $e$, pak bude platiti, že kolmé průměty jejich křivek největšího spádu vzhledem k $\pi$ na tuto rovinu jsou opět kuželosečky s vrstevnicovým plánem plochy $\eta$ konfokální. Povšimneme si z nich ještě této plochy:

Plocha $\eta$ má vrstevnicový plán v konfokálních kuželosečkách položených v $\pi$, spojnice ohnisek $FG \equiv x$, $\overline{FG} = 2e$! Předpokládejme, že vrcholy křivek plochy, položených v rovinách rovnoběžných s $\pi$ vyplňují kružnici popsanou nad úsečkou $\overline{FG}$ jako průměrem v rovině $\nu$ a počátek souřadnic položme do středu úsečky $\overline{FG}$! Získaná plocha má rovnici

$$\eta \equiv \frac{x^2}{e^2-z^2} - \frac{y^2}{z^2} = 1$$

nebo $\eta \equiv z^4 + z^2(x^2 + y^2 - e^2) - e^2y^2 = 0$, kde $e$ je polovina úsečky $\overline{FG}$. Osa $x$ je tu dvojnou přímkou a jí jdoucí roviny protínají $\eta$ v křivkách největšího spádu vzhledem k rovině $\pi$.

Je zřejmo, že pro plochy uvažované v 3. a 4. odstavci mohli bychom si zvolit geometrické místo vrcholů křivek rovnoběžných s $\pi$ v libovolné vhodné křivce a stále získáváme plochy, jejichž křivky největšího spádu vzhledem k půdorysně se promítají do této roviny do konfokálních kuželoseček, což možno prováděti i s plochou odstavce 2.

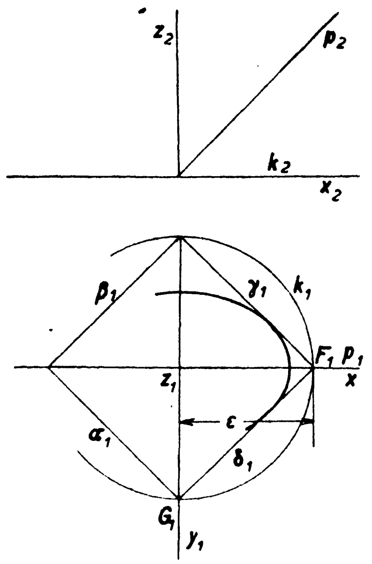
6. V předcházejících odstavcích byl půdorysný obrys uvažované plochy tvořen dvěma dvojinami imaginárně sdružených přímek. Můžeme nahraditi (obr. 3) tento předpoklad tím, že plocha je dána tečnými rovinami $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, $\delta$, které protínají roviny $\nu$ a $\mu$ v přímkách rovnoběžných s osou $z$ a od ní o úsečku $\varepsilon$ vzdálených. Vodorovné, s $\pi$ rovnoběžné řezy buďtež kuželosečky, které mají vrcholy na přímce $p$ položené v $\nu$, jdoucí počátkem souřadnic ve spádu tg $\varphi = 1$ vzhledem k půdorysně. Plocha $\eta$ je tu dána rovnicí

$$\eta \equiv \frac{x^2}{z^2} + \frac{y^2}{\varepsilon^2-z^2} = 1$$

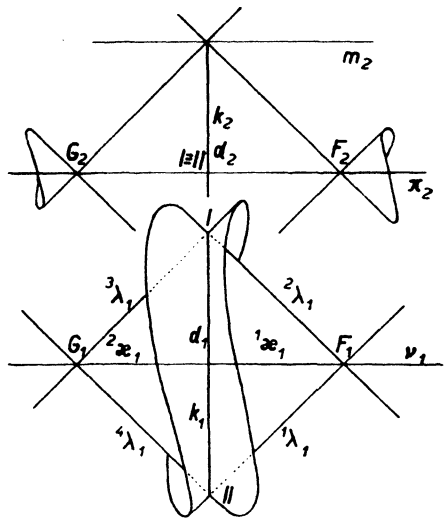
nebo

$$\eta \equiv z^4 + \varepsilon^2(x^2 - z^2) - z^2(x^2 - y^2) = 0\,.$$

Ježto body $F_1$, $G_1$ mají v tomto případě stejný význam, není třeba uvažovat zvlášť řídicí přímku plochy v $\mu$ jako případ zvláštní. Osa $y$ je tu dvojnou přímkou a roviny jí položené protínají plochu $\eta$ v kuželosečkách promítajících se do $\pi$ do osnovy, určené tečnami $\alpha_1$, $\beta_1$, $\gamma_1$, $\delta_1$, tedy téže osnovy, do níž se do $\pi$ promítají řezy plochy s $\pi$ rovnoběžné. Všechny tyto půdorysy kuželoseček mají v kružnici opsané v $\pi$ okolo počátku poloměrem $\varepsilon$ společnou orthoptickou kružnici $k$. Ve stranorysně leží na ploše kružnice o poloměru $\varepsilon$ a středu v počátku souřadnic, osa $y$ a přímky $y = 0$, $z = \pm\,\varepsilon$ jsou kráterové přímky této plochy.




Obr. 3.




Obr. 4.

Poznámka: Plochu uvedenou v odstavci 6 můžeme získati sečítáním. Zvolme dvě rotační kuželové plochy ${}^1\varkappa$, ${}^2\varkappa$ o společné ose v $\pi$ a o vrcholech $F$, $G$, při čemž vrcholové úhly obou kuželových ploch buďtež rovny úhlu pravému (obr. 4). Z ploch ${}^1\varkappa$, ${}^2\varkappa$ získáme plochu $\varkappa \equiv ({}^1\varkappa + {}^2\varkappa)$ pro směr sečítání kolmý k $\pi$ a pro podmínku, že souřadnice $z$ libovolného bodu plochy $\eta$ ve sčítacím paprsku je rovna $z = \dfrac{{}^1z + {}^2z}{2}$, kdę ${}^1z$, ${}^2z$ jsou příslušné souřadnice ploch ${}^1\varkappa$ a ${}^2\varkappa$. V rovinách ${}^1\lambda, \ldots, {}^4\lambda$ jsou položeny půdorysné obrysy plochy $\varkappa$, paraboly souměrně položené k $\pi$ a mající v bodech $I$, $II$ své vrcholy. Z tohoto způsobu vytváření plochy $\varkappa$ bylo by lze vyčíst řadu dalších vlastností této plochy čtvrtého stupně. Zvolíme-li plochy ${}^1\varkappa$, ${}^2\varkappa$ tak, aby jejich obrysy půdorysu byly isotropické přímky, dává součet plochy uvažované v 2. a dalších odstavcích, bez použití počtu vyplývá tu na př. stupeň plochy a jiné vlastnosti.