Časopis pro pěstování matematiky

František Nožička

Křivka v afinním prostoru a její afinní oblouk

Časopis pro pěstování matematiky, Vol. 78 (1953), No. 4, 307--339

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/108699`

Časopis pro pěstování matematiky, roč. 78 (1953)

KŘIVKA V AFINNÍM PROSTORU A JEJÍ AFINNÍ OBLOUK

FRANT. NOŽIČKA, Praha.

(Došlo 4. února 1952.)

DT: 513.771

ČÁST I.

V tomto článku jsou shrnuty nejzákladnější poznatky o křivce v obecném n-rozměrném prostoru afinním A_n v přehledný celek a to tak, aby, za předpokladů obvyklých v diferenciální geometrii, měly postavené věty a definice „obecnou platnost" v tom smyslu, aby zahrnovaly všechny křivky v A_n, které přicházejí při lokálním studiu s hlediska diferenciální geometrie v úvahu.

Jde především o základní afinní klasifikaci křivek v A_n, o níž pojednává věta 1 a definice 1, dále pak o definici privilegovaného parametru křivky, tak zvaného afinního oblouku. Dále jsou zavedeny určité charakteristické skalární funkce, jichž důležitost v obecné afinní geometrii vyzdvihuje existenční věta 8.

Článek je přínosem k theorii křivek v A_n pouze v tom smyslu, že a) zobecňuje dosavadní skrovné poznatky a shrnuje je v jednotnou theorii, b) upozorňuje na veličiny základního významu pro křivku v A_n, které nejsou afinními invarianty v obvyklém smyslu.

Nechť v n-rozměrném afinním prostoru $A_n (n > 1)$ o souřadnicích ξ^α $(\alpha = 1, 2, \ldots, n)$ se symetrickou konexí o koeficientech $\Gamma^\nu_{\lambda\mu}$ (ξ^α) je definována křivka C parametrickými rovnicemi

$$\xi^\alpha = \xi^\alpha(t), \qquad \alpha = 1, 2, \ldots n, \tag{1}$$

při čemž předpokládáme, že

a) funkce $\Gamma^\nu_{\lambda\mu}$ jsou reálnými funkcemi reálných proměnných ξ^α, $\alpha = 1, 2, \ldots n$, které mají v určité oblasti D spojité parciální derivace nejméně $2(p-1)$-ho řádu, kde p je přirozené číslo $1 \leqq p \leqq n$;

b) funkce $\xi^\alpha(t)$, $\alpha = 1, 2, \ldots n$, jsou reálnými funkcemi[1]) v intervalu $(\underset{1}{t}, \underset{2}{t})$, jež mají v tomto intervalu spojité derivace řádu nejméně $2p$, při čemž pro všechny hodnoty $t \in (\underset{1}{t}, \underset{2}{t})$ leží body $\xi^\alpha(t)$ v oblasti D. V žádném bodě intervalu $(\underset{1}{t}, \underset{2}{t})$ nechť nejsou všechny derivace $\dfrac{d\xi^\alpha}{dt}$ současně rovny nule;

[1]) Reálné proměnné t.

c) vektory $\underset{i}{u}^\nu$, $i = 1, 2, \ldots p$, takto definované

$$\underset{1}{u}^\nu = \frac{\mathrm{d}\xi^\nu}{\mathrm{d}t}, \quad \underset{i}{u}^\nu = \nabla_t \underset{i-1}{u}^\nu, \qquad i = 2, \ldots p,$$

kde ∇_t je symbol absolutní derivace, jsou v intervalu $(\underset{1}{t}, \underset{2}{t})$ lineárně nezávislé, vektor

$$\underset{p+1}{u}^\nu = \nabla_t \underset{p}{u}^\nu \tag{2b}$$

nechť je v $(\underset{1}{t}, \underset{2}{t})$ jejich lineární kombinací.

Poznámka 1. V případě $p = n$ je vektor $\underset{p+1}{u}^\nu \equiv \underset{n+1}{u}^\nu$ vždy lineární kombinací vektorů $\underset{1}{u}^\nu, \underset{2}{u}^\nu, \ldots \underset{n}{u}^\nu$.

Poznámka 2. Odůvodnění předpokladů a), b), c) bude patrné z vět, které v dalším budou odvozeny.

Definice I. *Za platnosti předpokladů* a), b), c) *budeme říkat, že rovnicemi* (1) *je v intervalu* $(\underset{1}{t}, \underset{2}{t})$ *parametricky definována regulární křivka* p*-té třídy* ($1 \leq p \leq n$) *v afinním prostoru* A_n.

Poznámka 3. Z předpokladů a), b), c) a z definice I je zřejmé, že jde o lokální definici. Tedy též tvrzení, která budou v dalším uvedena, mají lokální charakter.

Budiž C křivka p-té třídy, $1 \leq p \leq n$ (ve smyslu definice I) s definičním oborem $(\underset{1}{t}, \underset{2}{t})$. Potom, podle předpokladu c), jsou vektory $\underset{i}{u}^\nu$, $i = 1, 2, \ldots p$ lineárně nezávislé v $(\underset{1}{t}, \underset{2}{t})$, vektor $\underset{p+1}{u}^\nu \equiv \nabla_t \underset{p}{u}^\nu$ jest v $(\underset{1}{t}, \underset{2}{t})$ jejich lineární kombinací. Existují tedy v $(\underset{1}{t}, \underset{2}{t})$ skaláry $\underset{p-i}{l}^{(p)}(t)$, $i = 1, 2, \ldots p$ tak, že platí v $(\underset{1}{t}, \underset{2}{t})$

$$\nabla_t \underset{p}{u}^\nu \equiv \underset{p+1}{u}^\nu = \sum_{i=1}^{p} \underset{p-i}{l}^{(p)} \underset{i}{u}^\nu. \tag{3}$$

Budiž dále $\tau = \varphi(t)$ funkce definovaná v $(\underset{1}{t}, \underset{2}{t})$ taková, že existuje spojitá derivace $\frac{\mathrm{d}^{p+1}}{\mathrm{d}t^{p+1}} \varphi(t)$ v $(\underset{1}{t}, \underset{2}{t})$, při čemž všude v uvažovaném intervalu je $\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t} \neq 0$. Za těchto okolností je vztahem

$$\tau = \varphi(t), \qquad t \in (\underset{1}{t}, \underset{2}{t}) \tag{4a}$$

definována transformace parametru křivky C, regulární v intervalu $(\underset{1}{t}, \underset{2}{t})$. Vztah (4a) lze též přepsat na tvar

$$t = \psi(\tau), \tag{4b}$$

kde ψ je inversní funkcí k funkci φ v intervalu $(\underset{1}{t}, \underset{2}{t})$.

Vztáhněme křivku (1), jež dle předpokladu je p-té třídy v A_n ($1 \leqq p \leqq n$), k novému parametru τ, zavedenému v (4a) resp. (4b). Zaveďme dále označení

$$\underset{1}{{}^*u^\nu} = \frac{d\xi^\nu}{d\tau}, \quad \underset{i}{{}^*u^\nu} = \nabla_\tau \underset{i-1}{{}^*u^\nu}, \qquad i = 1, 2, \dots p + 1. \tag{5}$$

Pak platí tyto věty:

Pomocná věta I. *V intervalu* $(\underset{1}{t}, \underset{2}{t})$ *jsou vektory* $\underset{i}{u^\alpha}, \underset{i}{{}^*u^\alpha}$, $i = 1, 2, \dots p + 1$, *vázány vztahy*

$$\underset{j}{{}^*u^\nu} = \sum_{i=1}^{j} A_{j,i} \underset{i}{u^\nu}, \qquad j = 1, 2, \dots p + 1, \tag{6}$$

kde veličiny $A_{j,i}$ *závisí pouze na tvaru funkce* $\varphi(t)$, *uvažované v* (4a), *a jejích derivacích* (*resp. na tvaru funkce* $\psi(t)$ *v* (4b) *a jejích derivacích*).

Důkaz lze podat stručně methodou úplné indukce. Při každém $n > 1$ a každém p, $1 \leqq p \leqq n$ jest, jak plyne z (2), (4)a, (5), pro $j = 1$

$$\underset{1}{{}^*u^\nu} = \frac{dt}{d\tau} \underset{1}{u^\nu}, \tag{7}$$

tedy $A_{1,1} = \dfrac{dt}{d\tau}$. Pro $j = 2$ dostaneme ihned z (7)

$$\underset{2}{{}^*u^\nu} = \nabla_\tau \underset{1}{{}^*u^\nu} = \frac{d}{d\tau} \underset{1}{{}^*u^\nu} + \Gamma^\nu_{\alpha\beta} \underset{1}{{}^*u^\alpha} \underset{1}{{}^*u^\beta} =$$

$$= \frac{d^2t}{d\tau^2} \underset{1}{u^\nu} + \left(\frac{dt}{d\tau}\right)^2 \left(\frac{d}{dt} \underset{1}{u^\nu} + \Gamma^\nu_{\alpha\beta} \underset{1}{u^\alpha} \underset{1}{u^\beta}\right),$$

tedy

$$\underset{2}{{}^*u^\nu} = \frac{d^2t}{d\tau^2} \underset{1}{u^\nu} + \left(\frac{dt}{d\tau}\right)^2 \underset{2}{u^\nu}. \tag{8}$$

Zde je $A_{2,1} = \dfrac{d^2t}{d\tau^2}$, $A_{2,2} = \left(\dfrac{dt}{d\tau}\right)^2$. Tvrzení věty je tedy správné při každém $n > 1$, $1 \leqq p \leqq n$, pro $j = 1, 2$. Úplnou indukcí dá se snadno dokázat, že věta platí v tom rozsahu, v němž byla vyslovena[2]).

Pomocná věta II. *Pro veličiny* $A_{j,1}$, $A_{j,j-1}$, $A_{j,j}$ *ze vztahů* (6) *platí*

$$A_{j,1} = \frac{d^jt}{d\tau^j} \qquad \text{pro } j = 1, 2, \dots p + 1; \tag{9a}$$

$$A_{j,j-1} = \frac{j(j-1)}{2} \left(\frac{dt}{d\tau}\right)^{j-2} \frac{d^2t}{d\tau^2} \qquad \text{pro } j = 2, \dots p + 1; \tag{9b}$$

$$A_{j,j} = \left(\frac{dt}{d\tau}\right)^j \qquad \text{pro } j = 1, 2, \dots p + 1 \tag{9c}$$

při každém $n > 1$ *a každém* p, $1 \leqq p \leqq n$.

---

[2]) Methoda důkazu je obdobná jako pro výpočet j-té derivace funkce složené. Zde jde však o absolutní derivaci vektorů.

Důkaz se provede opět úplnou indukcí. Z (7), (8) plyne ihned, že věta je správná při každém $n > 1$, $1 \leqq p \leqq n$ pro $j = 1, 2$. Předpokládáme-li platnost vztahů (9) pro $n \geqq 3$, $3 \leqq p \leqq n$, $3 \leqq j \leqq p + 1$ (neboť případy $n = 2$, $1 \leqq p \leqq 2$, $j = 1, 2$ jsou zřejmě v (7), (8) obsaženy), potom lze podle (6), (9) psát

$$\underset{j}{{}^*u^\nu} = \sum_{i=1}^{j-2} A_{j,i} \underset{i}{u^\nu} + \frac{j(j-1)}{2} \left(\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\tau}\right)^{j-2} \frac{\mathrm{d}^2 t}{\mathrm{d}\tau^2} \underset{j-1}{u^\nu} + \left(\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\tau}\right)^j \underset{j}{u^\nu},$$

kde $A_{j,1} = \dfrac{\mathrm{d}^j t}{\mathrm{d}\tau^j}$. Odtud plyne pak po delším výpočtu a úpravě, přihlédneme-li k definičním vztahům (2),

$$\underset{j+1}{{}^*u^\nu} = \frac{\mathrm{d}^{j+1}}{\mathrm{d}\tau^{j+1}} \underset{1}{u^\nu} + \sum_{i=2}^{j-1} A_{j+1,i} \underset{i}{\mu^\nu} + \frac{(j+1)j}{2} \left(\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\tau}\right)^{j-1} \frac{\mathrm{d}^2 t}{\mathrm{d}\tau^2} \underset{j}{u^\nu} + \left(\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\tau}\right)^{j+1} \underset{j+1}{u^\nu},$$

při čemž vyjdeme od identity

$$\underset{j+1}{{}^*u^\nu} \equiv \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau} \underset{j}{{}^*u^\nu} + \Gamma^\nu_{\alpha\beta} \underset{j}{{}^*u^\alpha} \underset{1}{{}^*u^\beta}.$$

Je tedy

$$A_{j+1,1} \equiv \frac{\mathrm{d}^{j+1} t}{\mathrm{d}\tau^{j+1}}, \quad A_{j+1,j} \equiv \frac{j(j+1)}{2} \left(\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\tau}\right)^{j-1} \left(\frac{\mathrm{d}^2 t}{\mathrm{d}\tau^2}\right), \quad A_{j+1,j+1} \equiv \left(\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\tau}\right)^{j+1}$$

v souhlase s (9). Tím je věta úplnou indukcí dokázána.

Na základně předchozích dvou vět dokážeme snadno tuto důležitou větu:

Věta 1. *Třída regulární křivky C v A_n je afinní invariant, t. j. třída křivky C v A_n nezávisí na volbě souřadnic v A_n a na volbě parametru, k němuž křivku vztáhneme.*

Důkaz: Nejdříve dokážeme, že třída křivky je invariantní při transformaci souřadnic v A_n. Budiž tedy p, $1 \leqq p \leqq n$ třída křivky v A_n. Jsou tedy vektory $\underset{1}{u^\nu}, \underset{2}{u^\nu}, \dots \underset{p}{u^\nu}$ (podle předpokladu c) na str. 2) lineárně nezávislé v definičním oboru křivky C, t. j. matice

$$\begin{bmatrix} \underset{1}{u^1} \underset{1}{u^2} \dots \underset{1}{u^n} \\ \underset{2}{u^1} \underset{2}{u^2} \dots \underset{2}{u^n} \\ \dots\dots\dots \\ \underset{p}{u^1} \underset{p}{u^2} \dots \underset{p}{u^n} \end{bmatrix}$$

má v uvažovaném oboru hodnost p. Potom v nějakém bodě t z definičního oboru křivky má p-vektor z vektorů $\underset{1}{u^\alpha}, \underset{2}{u^\alpha}, \dots \underset{p}{u^\alpha}$ aspoň jednu složku od nuly různou, t. j.

$$\underset{[1}{u^{\alpha_1}} \underset{2}{u^{\alpha_2}} \dots \underset{p]}{u^{\alpha_p}} \neq 0 \quad \text{pro } t \in (\underset{1}{t}, \underset{2}{t}), \tag{11}$$

kde $\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_p \in 1, 2, \dots n$ jsou pevná vzájemně různá čísla při pevně zvoleném $t \in (\underset{1}{t}, \underset{2}{t})$.

Je-li $\xi^{\bar\alpha} = \xi^{\bar\alpha}(\xi^\beta)$ libovolná transformace souřadnic v A_n, regulární v určitém okolí uvažovaného bodu t a označíme-li

$$A^{\alpha}_{\bar\alpha} \equiv \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial \xi^{\bar\alpha}}, \quad A^{\bar\alpha}_{\alpha} \equiv \frac{\partial \xi^{\bar\alpha}}{\partial \xi^\alpha},$$

potom, označíme-li pruhem nad symbolem transformované složky vektorů $\underset{i}{u}$, platí

$$\underset{i}{u}^\alpha = A^\alpha_{\bar\alpha} \underset{i}{\bar u}^{\bar\alpha}, \quad \underset{i}{\bar u}^{\bar\alpha} = A^{\bar\alpha}_\alpha \underset{i}{u}^\alpha, \quad i = 1, 2, \dots p. \tag{12}$$

Pro složku $\underset{[1}{u}^{\alpha_1} \underset{2}{u}^{\alpha_2} \dots \underset{p]}{u}^{\alpha_p}$, uvažovanou v (11), platí (podle (12)) při uvažované transformaci v souřadnic A_n v uvažovaném bodě t

$$\underset{[1}{u}^{\alpha_1} \underset{2}{u}^{\alpha_2} \dots \underset{p]}{u}^{\alpha_p} = A^{\alpha_1}_{\bar\alpha_1} A^{\alpha_2}_{\bar\alpha_2} \dots A^{\alpha_p}_{\bar\alpha_p} \underset{[1}{\bar u}^{\bar\alpha_1} \underset{2}{\bar u}^{\bar\alpha_2} \dots \underset{p]}{\bar u}^{\bar\alpha_p}. \tag{13}$$

Kdyby vektory $\underset{1}{\bar u}^\alpha, \underset{2}{\bar u}^\alpha \dots \underset{p}{\bar u}^\alpha$ byly v uvažovaném bodě lineárně závislé, potom všechny složky $\underset{[1}{\bar u}^{\bar\alpha_1} \underset{2}{\bar u}^{\bar\alpha_2} \dots \underset{p]}{\bar u}^{\bar\alpha_p}$ p-vektoru z vektorů $\underset{1}{\bar u}^\alpha, \underset{2}{\bar u}^\alpha, \dots \underset{p}{\bar u}^\alpha$ by byly rovny nule (při uvažované transformaci souřadnic v A_n), což by, podle (13), mělo za následek, že by též v uvažovaném bodě bylo $\underset{[1}{u}^{\alpha_1} \underset{2}{u}^{\alpha_2} \dots \underset{p]}{u}^{\alpha_p} = 0$, což je ve sporu s předpokladem (11). Ježto bod t byl libovolným bodem z definičního intervalu $(\underset{1}{t}, \underset{2}{t})$ křivky C, plyne z předchozího, že vektory $\underset{1}{\bar u}^\alpha, \underset{2}{\bar u}^\alpha, \dots \underset{p}{\bar u}^\alpha$ jsou lineárně nezávislé v každém bodě uvažovaného oboru.

Budiž nyní $\underset{[1}{\bar u}^{\bar\alpha_1} \underset{2}{\bar u}^{\bar\alpha_2} \dots \underset{p+1]}{\bar u}^{\bar\alpha_{p+1}}$ libovolná složka $p + 1$-vektoru z vektorů $\underset{1}{\bar u}^\alpha$, $\underset{2}{\bar u}^\alpha, \dots \underset{p+1}{\bar u}^\alpha$. Potom při každé regulární transformaci souřadnic v A_n platí

$$\underset{[1}{\bar u}^{\bar\alpha_1} \underset{2}{\bar u}^{\bar\alpha_2} \dots \underset{p+1]}{\bar u}^{\bar\alpha_{p+1}} = A^{\bar\alpha_1}_{\alpha_1} A^{\bar\alpha_2}_{\alpha_2} \dots A^{\bar\alpha_{p+1}}_{\alpha_{p+1}} \underset{[1}{u}^{\alpha_1} \underset{2}{u}^{\alpha_2} \dots \underset{p+1]}{u}^{\alpha_{p+1}}. \tag{14}$$

Ježto podle předpokladu je křivka C třídy p, je, vzhledem k definici třídy křivky, vektor $\underset{p+1}{u}^\nu = \nabla_t \underset{p}{u}^\nu$ lineární kombinací vektorů $\underset{1}{u}^\nu, \underset{2}{u}^\nu, \dots \underset{p}{u}^\nu$ a tedy všechny složky $\underset{[1}{u}^{\alpha_1} \underset{2}{u}^{\alpha_2} \dots \underset{p+1]}{u}^{\alpha_{p+1}}$ jsou v uvažovaném oboru rovny nule. Odtud a z (14) plyne pak, že všechny složky $\underset{[1}{\bar u}^{\bar\alpha_1} \underset{2}{\bar u}^{\bar\alpha_2} \dots \underset{p+1]}{\bar u}^{\bar\alpha_{p+1}}$ jsou rovny nule. Ježto předtím jsme ukázali, že $\underset{1}{\bar u}^{\bar\alpha_1}, \underset{2}{\bar u}^{\bar\alpha_2}, \dots \underset{p}{\bar u}^{\bar\alpha_p}$ jsou lineárně nezávislé, plyne z předchozího ihned, že vektor $\underset{p+1}{\bar u}^\alpha$ je lineární kombinací vektorů $\underset{1}{\bar u}^\alpha, \underset{2}{\bar u}^\alpha, \dots \underset{p}{\bar u}^\alpha$.

Tím jsme dokázali, že třída křivky je invariantní vůči transformaci souřadnic v A_n. Zbývá ještě ukázat, že třída křivky nezávisí na volbě parametru, k němuž křivku vztáhneme.

Při transformaci parametru[3]) přejdou vektory $\underset{1}{u}^\nu, \underset{2}{u}^\nu, \dots \underset{p}{u}^\nu, \underset{p+1}{u}^\nu$ ve vektory

[3]) Tedy při transformaci (4).

$\overset{*}{u}{}^{\nu}_{1}, \overset{*}{u}{}^{\nu}_{2}, \ldots \overset{*}{u}{}^{\nu}_{p}, \overset{*}{u}{}^{\nu}_{p+1}$, definované v (5), při čemž platí vztahy (6). Ježto dle předpokladu je daná křivka třídy p, existuje aspoň jedna složka $\underset{[1}{u}{}^{\alpha_1}\underset{2}{u}{}^{\alpha_2} \ldots \underset{p]}{u}{}^{\alpha_p}$ p-vektoru z vektorů $\underset{1}{u}{}^{\alpha}, \underset{2}{u}{}^{\alpha}, \ldots \underset{p}{u}{}^{\alpha}$, jež je ve zvoleném bodě t z definičního oboru křivky C různá od nuly. Z (6) plyne pak ihned

$$\overset{*}{\underset{[1}{u}}{}^{\alpha_1} \overset{*}{\underset{2}{u}}{}^{\alpha_2} \ldots \overset{*}{\underset{p]}{u}}{}^{\alpha_p} = A_{1,1}, A_{2,2} \ldots A_{p,p} \underset{[1}{u}{}^{\alpha_1}\underset{2}{u}{}^{\alpha_2} \ldots \underset{p]}{u}{}^{\alpha_p},$$

což můžeme vzhledem k (9c) přepsat na tvar

$$\overset{*}{\underset{[1}{u}}{}^{\alpha_1} \overset{*}{\underset{2}{u}}{}^{\alpha_2} \ldots \overset{*}{\underset{p]}{u}}{}^{\alpha_p} = \left(\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\tau}\right)^{\frac{p(p+1)}{2}} \underset{[1}{u}{}^{\alpha_1}\underset{2}{u}{}^{\alpha_2} \ldots \underset{p]}{u}{}^{\alpha_p}. \tag{15}$$

Ježto při transformaci (4) je v uvažovaném oboru $\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\tau} \neq 0$ a ježto dle předpokladu je v uvažovaném bodě složka $\underset{[1}{u}{}^{\alpha_1}\underset{2}{u}{}^{\alpha_2} \ldots \underset{p]}{u}{}^{\alpha_p}$ různá od nuly, plyne z (15) ihned

$$\underset{[1}{u}{}^{\alpha_1}\underset{2}{u}{}^{\alpha_2} \ldots \underset{p]}{u}{}^{\alpha_p} \neq 0 \Rightarrow \overset{*}{\underset{[1}{u}}{}^{\alpha_1} \overset{*}{\underset{2}{u}}{}^{\alpha_2} \ldots \overset{*}{\underset{p]}{u}}{}^{\alpha_p} \neq 0. \tag{16}$$

Ježto jsme uvažovali libovolný bod z definičního oboru křivky, plyne ze (16) ihned, že vektory $\overset{*}{\underset{1}{u}}{}^{\alpha}, \overset{*}{\underset{2}{u}}{}^{\alpha}, \ldots \overset{*}{\underset{p}{u}}{}^{\alpha}$ jsou v tomto oboru lineárně nezávislé.

Z předpokladu, že daná křivka C je třídy p, plyne ihned, že všechny složky $(p + 1)$-vektoru utvořeného z vektorů $\underset{1}{u}{}^{\alpha}, \underset{2}{u}{}^{\alpha} \ldots \underset{p}{u}{}^{\alpha}, \underset{p+1}{u}{}^{\alpha}$ jsou v definičním oboru křivky rovny nule. Při transformaci (4) platí vztah

$$\overset{*}{\underset{[1}{u}}{}^{\alpha_1} \overset{*}{\underset{2}{u}}{}^{\alpha_2} \ldots \overset{*}{\underset{p+1]}{u}}{}^{\alpha_{p+1}} = \left(\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\tau}\right)^{\frac{(p+2)(p+1)}{2}} \underset{[1}{u}{}^{\alpha_1}\underset{2}{u}{}^{\alpha_2} \ldots \underset{p+1]}{u}{}^{\alpha_{p+1}};$$

odtud plyne pak ihned, že

$$\underset{[1}{u}{}^{\alpha_1}\underset{2}{u}{}^{\alpha_2} \ldots \underset{p+1]}{u}{}^{\alpha_{p+1}} \equiv 0 \Rightarrow \overset{*}{\underset{[1}{u}}{}^{\alpha_1} \overset{*}{\underset{2}{u}}{}^{\alpha_2} \ldots \overset{*}{\underset{p+1]}{u}}{}^{\alpha_{p+1}} \equiv 0,$$

t. j. vektory $\overset{*}{\underset{1}{u}}{}^{\alpha_1}, \overset{*}{\underset{2}{u}}{}^{\alpha_2}. \ldots \overset{*}{\underset{p+1}{u}}{}^{\alpha_{p+1}}$ jsou v uvažovaném oboru lineárně závislé. Ježto jsme předtím ukázali, že vektory $\overset{*}{\underset{i}{u}}{}^{\alpha}$, $i = 1, 2, \ldots, p$, jsou v tomto oboru lineárně nezávislé, plyne odtud ihned, že vektor $\overset{*}{\underset{p+1}{u}}{}^{\nu}$ jest v definičním oboru křivky lineární kombinací vektorů $\overset{*}{\underset{i}{u}}{}^{\alpha}$, $i = 1, 2, \ldots, p$.

Tím jsme dokázali, že třída křivky nezávisí na volbě parametru křivky. Tím je důkaz věty 1. hotov.

Nyní se obrátíme k důsledkům předchozích vět. Nechť C značí regulární křivku p-té třídy v A_n s definičním oborem $(\underset{1}{t}, \underset{2}{t})$ s parametrickým vyjádřením (1). Buďtež $\underset{i}{u}{}^{\nu}$, $i = 1, 2, \ldots p$ vektory definované v (2a). Ježto dle předpokladu je křivka C třídy p-té, platí pro vektor $\underset{p+1}{u}{}^{\nu}$, definovaný v (2)b, vztah (3). Vztáhneme-li křivku C k novému parametru τ, zavedenému v (4a) resp. (4b) a mají-li vektory $\underset{1}{*u^\nu}, \underset{2}{*u^\nu}, \dots \underset{p}{*u^\nu}, \underset{p+1}{*u^\nu}$ tentýž význam jako v (5), potom, vzhledem k větě 1, existují skaláry $\underset{p-i}{*l^{(p)}}(\tau)$, $i = 1, 2, \dots, p$ (kde $\tau = \tau(t)$) tak, že v definičním oboru $(\underset{1}{t}, \underset{2}{t})$ křivky C platí

$$\underset{p+1}{*u^\nu} \equiv \nabla_\tau \underset{p}{*u^\nu} = \sum_{i=1}^{p} \underset{p-i}{*l^{(p)}} \underset{i}{*u^\nu}. \tag{17}$$

Nám půjde nyní o to najít vztah mezi skaláry $\underset{p-i}{l^{(p)}}$, $\underset{p-i}{*l^{(p)}}$, $i = 1, 2, \dots, p$, kde skaláry označené hvězdičkou, odpovídají parametru τ (viz (17)), ty druhé pak původnímu parametru t (viz (3)).

Věta 2. *Skaláry* $\underset{p-i}{l^{(p)}}$, $\underset{p-i}{*l^{(p)}}$, $i = 1, 2, \dots, p$, *jsou při regulární transformaci* (4a) *resp.* (4b) *v* $(\underset{1}{t}, \underset{2}{t})$ *vázány vztahy*

$$\sum_{i=1}^{p} A_{i,1} \underset{p-i}{*l^{(p)}} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau} A_{p,1} + \underset{p-1}{l^{(p)}} A_{p,p} \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\tau},$$

$$\sum_{i=j}^{p} A_{i,j} \underset{p-i}{*l^{(p)}} = A_{p,j-1} \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\tau} + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau} A_{p,j} + A_{p,p} \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\tau} \underset{p-j}{l^{(p)}}, \; j = 2, \dots, p, \tag{18}$$

kde $A_{i,j}$ *mají význam z vět pomocných I, II.*

Důkaz: Vyjdeme ze vztahu (6) pro $j = p$. Potom dostáváme, vzhledem k (7), (3),

$$\begin{aligned}
\nabla_\tau \underset{p}{*u^\nu} &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau} \underset{p}{*u^\nu} + \Gamma^\nu_{\alpha\beta} \underset{p}{*u^\alpha} \underset{1}{*u^\beta} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau} \left(\sum_{i=1}^{p} A_{p,i} \underset{i}{u^\nu} \right) + \\
&+ \Gamma^\nu_{\alpha\beta} \left(\sum_{i=1}^{p} A_{p,i} \underset{1}{u^\alpha} \right) A_{1,1} \underset{1}{u^\beta} = \\
&= \sum_{i=1}^{p} A_{p,i} \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\tau} \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau} \underset{i}{u^\nu} + \Gamma^\nu_{\alpha\beta} \underset{i}{u^\alpha} \underset{1}{u^\beta} \right) + \sum_{i=1}^{p} u^\nu \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau} A_{p,i} = \\
&= \sum_{i=1}^{p} A_{p,i} \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\tau} \underset{i+1}{u^\nu} + \sum_{i=1}^{p} \underset{i}{u^\nu} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau} A_{p,i} = \\
&= \underset{1}{u^\nu} \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau} A_{p,1} + A_{p,p} \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\tau} \underset{p-1}{l^{(p)}} \right) + \\
&+ \sum_{i=2}^{p} \underset{i}{u^\nu} \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau} A_{p,i} + A_{p,i-1} \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\tau} + A_{p,p} \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\tau} \underset{p-i}{l^{(p)}} \right).
\end{aligned} \tag{19}$$

Na druhé straně dostaneme z (17), dosadíme-li tam za $\underset{i}{*u^\nu}$, $i = 1, 2, \dots, p$ ze vztahu (6),

$$\nabla_\tau \underset{p}{*u^\nu} = \sum_{i=1}^{p} \sum_{j=1}^{i} A_{i,j} \underset{p-i}{*l^{(p)}} \underset{j}{u^\nu} = \sum_{j=1}^{p} \underset{j}{u^\nu} \sum_{i=j}^{p} A_{i,j} \underset{p-i}{*l^{(p)}}. \tag{20}$$

Píšeme-li v (19) místo sčítacího indexu i index j, potom z (19), (20) plyne ihned

$$\underset{1}{u^{\nu}}\left(\sum_{i=1}^{p} A_{i,1}\,\underset{p-i}{{}^{*}l^{(p)}} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}A_{p,1} - A_{p,p}\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\tau}\underset{p-1}{l^{(p)}}\right) +$$

$$+ \sum_{j=2}^{p}\underset{j}{u^{\nu}}\left(\sum_{i=j}^{p} A_{i,j}\,\underset{p-i}{{}^{*}l^{(p)}} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}A_{p,j} - A_{p,j-1}\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\tau} - A_{p,p}\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\tau}\underset{p-j}{l^{(p)}}\right) = 0.$$

Odtud plyne, vzhledem k tomu, že vektory $\underset{j}{u^{\nu}}$, $j = 1, 2, \ldots, p$, jsou v uvažovaném oboru lineárně nezávislé (neboť dle předpokladu je křivka třídy p, $1 \leqq p \leqq n$), ihned systém vztahů (18).

Poznámka 4. Z věty 2 plyne ihned, že mezi skaláry $\underset{0}{{}^{*}l^{(p)}}$, $\underset{0}{l^{(p)}}$ platí transformační vztah

$$A_{p,p}\,\underset{0}{{}^{*}l^{(p)}} = A_{p,p-1}\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\tau} + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}A_{p,p} + A_{p,p}\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\tau}\underset{0}{l^{(p)}}.$$

Dosadíme-li do tohoto vztahu za $A_{p,p}$, $A_{p,p-1}$ z (9), dostaneme, přihlédneme-li k tomu, že v uvažovaném oboru je $\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\tau} \neq 0$,

$$\underset{0}{{}^{*}l^{(p)}} = \frac{p(p-1)}{2}\frac{\mathrm{d}^2t}{\mathrm{d}\tau^2}\left(\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\tau}\right)^{-1} + \frac{\mathrm{d}^2t}{\mathrm{d}\tau^2}\,p\left(\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\tau}\right)^{-1} + \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\tau}\underset{0}{l^{(p)}},$$

t. j.

$$\underset{0}{{}^{*}l^{(p)}} = \frac{p(p+1)}{2}\frac{\mathrm{d}^2t}{\mathrm{d}\tau^2}\left(\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\tau}\right)^{-1} + \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\tau}\underset{0}{l^{(p)}}. \tag{21}$$

Nyní si můžeme položit otázku, zda je možno najít funkci $\tau = \varphi(t)$, jež by měla v definičním oboru $(\underset{1}{t}, \underset{2}{t})$ křivky C (jež je dle předpokladu třídy p v A_n, $1 \leqq p \leqq n$) spojité derivace nejméně $(p + 1)$-ho řádu, dále $\frac{\mathrm{d}\tau}{\mathrm{d}t} \neq 0$ v $(\underset{1}{t}, \underset{2}{t})$ a pro niž by všude v $(\underset{1}{t}, \underset{2}{t})$ bylo $\underset{0}{{}^{*}l^{(p)}} \equiv 0$. Odpověď nám dává tato věta:

Věta 3. *Budiž C regulární křivka p-té třídy v A_n, daná parametrickými rovnicemi (1) s definičním oborem $(\underset{1}{t}, \underset{2}{t})$. Potom existuje nekonečně mnoho funkcí $\tau = \varphi(t)$, definovaných v intervalu $(\underset{1}{t}, \underset{2}{t})$, jež mají v tomto intervalu spojité derivace řádu alespoň $p + 1$, při čemž $\frac{\mathrm{d}\tau}{\mathrm{d}t} \neq 0$ v $(\underset{1}{t}, \underset{2}{t})$ a jež mají tu vlastnost, že vztáhneme-li křivku C ke kterékoliv z těchto funkcí $\tau = \varphi(t)$ v intervalu $(\underset{1}{t}, \underset{2}{t})$ jakožto novému parametru, potom*

$$\underset{0}{{}^{*}l^{(p)}} \equiv 0, \tag{22}$$

při čemž význam symbolu $\underset{0}{{}^{*}l^{(p)}}$ je patrný ze (17).

Všechny tyto funkce mají tvar

$$\tau = \varphi(t) = C \int e^{\frac{2}{p(p+1)} \int \underset{0}{l}^{(p)} \, dt} \, dt + k, \; C \neq 0, \tag{23}$$

kde $C \neq 0$, k jsou libovolné konstanty.

Důkaz: Nejdříve se přesvědčíme o tom, že všechny funkce tvaru (23) mají vlastnosti ve větě uvedené. Především je z (23) zřejmé, že $\frac{d\varphi}{dt} \neq 0$ pro každé t přicházející v úvahu. Použijeme-li formule pro derivaci funkce inversní, snadno se přesvědčíme, že funkce $\varphi(t)$, definované v (23), anulují pravou stranu ((21), a tedy pro ně vyplývá tvrzení (22). Dokážeme o nich ještě, že mají spojité derivace řádu nejméně $p + 1$. Aby funkce $\varphi(t)$, definované v (23), měly spojité derivace alespoň $(p + 1)$-ho řádu, k tomu stačí, jak je patrno z (23), aby skalár $\underset{0}{l}^{(p)}$ měl spojité derivace alespoň $(p — 1)$-ho řádu vzhledem k t v definičním oboru $(\underset{1}{t}, \underset{2}{t})$. Že tomu tak skutečně je, to plyne již z předpokladu, že křivka C je p-té třídy v $(\underset{1}{t}, \underset{2}{t})$[4]).

Abychom zjistili, že ve (23) jsou podchyceny všechny funkce s vlastnostmi ve větě uvedenými, stačí ukázat, že funkce (23) jsou obecným integrálem diferenciální rovnice

$$\frac{p(p+1)}{2} \frac{d^2 t}{d\tau^2} \left(\frac{dt}{d\tau}\right)^{-1} + \frac{dt}{d\tau} \underset{0}{l}^{(p)} = 0^{5)} \tag{24}$$

a jiných integrálů pro tuto rovnici v intervalu $(\underset{1}{t}, \underset{2}{t})$ při $\frac{dt}{d\tau} \neq 0$ není. Rovnicí (24) můžeme psát ve tvaru

$$\frac{d}{d\tau}\left(\frac{dt}{d\tau}\right)^{-1} = \frac{2}{p(p+1)} \underset{0}{l}^{(p)}$$

kterou, vzhledem k tomu, že předpokládáme $\frac{d\tau}{dt} \neq 0$ v uvažovaném oboru, můžeme dále přepsat

---

[4]) To si ověříme takto: Je-li t libovolný bod z intervalu $(\underset{1}{t}, \underset{2}{t})$, potom z předpokladu, že křivka C je v $(\underset{1}{t}, \underset{2}{t})$ p-té třídy, $(1 \leq p \leq n)$, plyne, že v uvažovaném bodě je aspoň jedna složka p-vektoru z vektorů $\underset{1}{u}^{\alpha}, \underset{2}{u}^{\alpha}, \dots \underset{p}{u}^{\alpha}$ různá od nuly. Budiž to složka $\underset{[1}{u}^{\alpha_1}\underset{2}{u}^{\alpha_2} \dots \underset{p]}{u}^{\alpha_p}$. Z (3) plyne pak

$$\underset{[1}{u}^{\alpha_1}\underset{2}{u}^{\alpha_2} \dots \underset{p-1}{u}^{\alpha_{p-1}} \nabla_t \underset{p]}{u}^{\alpha_p} = \nabla_t \underset{[1}{u}^{\alpha_1}\underset{2}{u}^{\alpha_2} \dots \underset{p]}{u}^{\alpha_p} = \underset{0}{l}^{(p)} \underset{[1}{u}^{\alpha_1}\underset{2}{u}^{\alpha_2} \dots \underset{p]}{u}^{\alpha_p},$$

odkud můžeme $\underset{0}{l}^{(p)}$ vyjádřit, neboť $\underset{[1}{u}^{\alpha_1} \dots \underset{p]}{u}^{\alpha_p}$ je v uvažovaném bodě různé od nuly. Především je odtud vidět, že $\underset{0}{l}^{(p)}$ je řádu $p + 1$ vzhledem k t. Odtud a z předpokladů a), b), c), za nichž byla postavena definice křivky p-té třídy, je ihned vidět, že $\underset{0}{l}^{(p)}$ má spojité derivace alespoň $(p — 1)$-ho řádu.

[5]) Viz (21).

$$\left(\frac{d\tau}{dt}\right)^{-1}\frac{d}{dt}\frac{d\tau}{dt}=\frac{d}{dt}\log\left|\frac{d\tau}{dt}\right|=\frac{2}{p(p+1)}\underset{0}{l}^{(p)}, \tag{24}^{+}$$

jejímž obecným integrálem jsou právě funkce definované v (23). Tím je důkaz věty proveden.

Poznámka 5. Z předchozí věty je zřejmé, že podmínkou $^*\underset{0}{l}^{(p)} \equiv 0$ v uvažovaném oboru není příslušný parametr τ jednoznačně stanoven. Je dán až na afinní transformaci

$$\bar{\tau} = C\tau + k, \quad C \neq 0, \tag{+}$$

kde $C \neq 0$, k jsou libovolné konstanty. Vhodnou volbou počátečních podmínek lze dosáhnout jednoznačnosti.

Věta 4. *Budiž $\underset{0}{t} \in (\underset{1}{t}, \underset{2}{t})$, tedy z definičního oboru křivky C, jež je p-té třídy $(1 \leq p \leq n)$. Potom počátečními podmínkami*

$$s(\underset{0}{t}) = 0, \left(\frac{ds}{dt}\right)_{t=\underset{0}{t}} = 1, \tag{25}$$

je v intervalu $(\underset{1}{t}, \underset{2}{t})$ definována jednoznačně funkce $s = s(t)$ těchto vlastností:

1. *$s(t)$ je rostoucí v intervalu $(\underset{1}{t}, \underset{2}{t})$, $\underset{1}{t} < \underset{2}{t}$,*
2. *$s(t)$ je aditivní funkcí v $(\underset{1}{t}, \underset{2}{t})$,*
3. *$s(t)$ má v $(\underset{1}{t}, \underset{2}{t})$ spojité derivace řádu nejméně $p + 1$.*
4. *Označíme-li*

$$\frac{d\xi^\alpha}{ds} = \underset{1}{i}^\alpha, \ \nabla_s \underset{k}{i}^\alpha = \underset{k+1}{i}^\alpha, \quad k = 1, 2, \ldots p, \tag{26}$$

potom platí

$$\nabla_s \underset{p}{i}^\alpha = \sum_{k=1}^{p-1} \underset{p-k}{\lambda}^{(p)} \underset{k}{i}^\alpha,^{6)} \tag{27}$$

kde $\underset{p-k}{\lambda}^{(p)}$, $k = 1, \ldots, p - 1$ jsou skaláry definované tak v bodech křivky C.

5. *Funkci $s(t)$ lze psát ve tvaru*

$$e(t) = \int_{\underset{0}{t}}^{t} e^{\frac{2}{p(p+1)}\int_{\underset{0}{t}}^{t} \underset{0}{l}^{(p)}\, dt} . dt \tag{28}$$

Důkaz: Funkce $s(t)$, definovaná v (27), vyhovuje počátečním podmínkám (25), jak ihned nahlédneme. Dále je z (28) zřejmé, že $\frac{d}{dt}\log\frac{ds}{dt} = \frac{2}{p(p+1)}\underset{0}{l}^{(p)}$, t. j. funkce $s(t)$ z (27) vyhovuje dif. rovnici (24)*[7]) a tedy ze systému funkcí

[6]) Je-li $p = 1$, pak je součet na pravé straně v (27) prázdný.

[7]) Tedy $\tau \equiv s(t)$ je řešením rovnice (24)* a tedy též (24).

tvaru (23). Podle věty 3 má tedy $s(t)$ spojité derivace řádu aspoň $p + 1$ v (t_1, t_2). Funkce $s(t)$ má tedy vlastnost 3. Vlastnosti 1., 2. jsou zřejmé z (28).

To, že funkce $s(t)$, definovaná v (28), je při počátečních podmínkách (25) jednoznačným řešením dif. rovnice (24)* resp. (24), plyne ihned z existenčního teorému Cauchyova. Ježto je $s(t)$ tvaru (23), je pak, podle věty 3, v celém definičním oboru (t_1, t_2) splněn vztah (22), což vzhledem k (17), vede ihned ke vztahům (27), při čemž místo dřívějších symbolů $\overset{*}{l}{}^{(p)}_{p-k}$ zavádíme symboly $\lambda^{(p)}_{p-k}$, neboť zde jde o speciální, privilegovaný parametr, pro který v celém uvažovaném definičním oboru křivky C je splněn vztah (22). Tím je celé tvrzení věty dokázáno.

Definice II. *Funkci $s(t)$, definovanou v (28), nazýváme afinním obloukem regulární křivky p-té ($1 \leqq p \leqq n$) v n-rozměrném afinním prostoru A_n, orientovaným od bodu t_0 k bodu t ($t > t_0$).*

Věta 5. *Afinní oblouk $s(t)$ a skaláry $\lambda^{(p)}_{p-k}(s)$, $k = 1, 2, \ldots, p-1$ se transformují při každé regulární transformaci parametru t v (t_1, t_2)*[8])

$$\bar{t} = \bar{t}(t) \tag{29}$$

takto

$$\bar{s}(\bar{t}) = \alpha s(t), \qquad \alpha = \left(\frac{\mathrm{d}\bar{t}}{\mathrm{d}t}\right)_{t=t_0} \tag{30a}$$

$$\lambda^{(\bar{p})}_{p-k}(\bar{t}) = \alpha^{k-p-1}\,\lambda^{(p)}_{p-k}(t), \qquad \text{pro } 1 < p \leqq n,\ k = 1,\ 2, \ldots p-1. \tag{30b}$$

Důkaz. Při regulární transformaci parametru t v (t_1, t_2), uvažované v (29) je $\dfrac{\mathrm{d}\bar{t}}{\mathrm{d}t} \neq 0$ v (t_1, t_2). Zavedeme-li označení $\bar{t}_0 = \bar{t}(t_0)$, potom dostaneme vzhledem k (21), (28)

$$\int_{\bar{t}_0}^{\bar{t}} \bar{l}^{(p)}_0 \,\mathrm{d}\bar{t} = \int_{t_0}^{t} \left\{\frac{p(p+1)}{2}\frac{\mathrm{d}^2 t}{\mathrm{d}\bar{t}^2}\left(\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\bar{t}}\right)^{-1} + \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\bar{t}}\, l^{(p)}_0\right\}\frac{\mathrm{d}\bar{t}}{\mathrm{d}t}\,\mathrm{d}t =$$

$$= \frac{p(p+1)}{2}\left[\log\left|\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\bar{t}}\right|\right]_{t_0}^{t} + \int_{t_0}^{t} l^{(p)}_0 \,\mathrm{d}t$$

a tedy

$$\bar{s}(\bar{t}) = \int_{\bar{t}_0}^{\bar{t}} e^{\frac{2}{p(p+1)}\int_{\bar{t}_0}^{\bar{t}} \bar{l}^{(p)}_0 \,\mathrm{d}\bar{t}} \,\mathrm{d}\bar{t} = \alpha \int_{t_0}^{t} e^{\frac{2}{p(p+1)}\int_{t_0}^{t} l^{(p)}_0 \,\mathrm{d}t} \,\mathrm{d}t,$$

[8]) Jde neustále o křivku C p-té třídy v A_n s definičním oborem (t_1, t_2), danou parametrickými rovnicemi (1).

tedy $\bar{s}(\bar{t}) = \alpha s(t)$, kde $\alpha = \left(\frac{d\bar{t}}{dt}\right)_{t=t_0}$, jak se snadno přesvědčíme. Tím je vztah (30a) dokázán.

Z dokázaného vztahu (30a) plyne ihned

$$\bar{\underset{1}{i}}{}^{\nu} = \frac{d\xi^\nu}{d\bar{s}} = \frac{d\xi^\nu}{ds}\frac{ds}{d\bar{s}} = \alpha^{-1}\underset{1}{i}{}^{\alpha}, \qquad \text{kde } \alpha = \left(\frac{d\bar{t}}{dt}\right)_{t=t_0}.$$

Methodou úplné indukce snadno dokážeme, že

$$\bar{\underset{k+1}{i}}{}^{\nu} \equiv \nabla_{\bar{s}}\bar{\underset{k}{i}}{}^{\nu} = \frac{ds}{d\bar{s}}\nabla_s\frac{1}{\alpha^k}\underset{k}{i}{}^{\nu} = \alpha^{-k-1}\underset{k+1}{i}{}^{\nu}$$

pro $k = 1, 2, \ldots, p$. Pro $k = p > 1$ plyne pak z (31) a z věty 1, přihlédneme-li ke vztahům (27) a větě 3,

$$\bar{\underset{p+1}{i}}{}^{\nu} = \sum_{j=1}^{p-1}\bar{\underset{p-j}{\lambda}}{}^{(p)}\bar{\underset{j}{i}}{}^{\nu} = \alpha^{-p-1}\sum_{j=1}^{p-1}\underset{p-j}{\lambda}{}^{(p)}\underset{j}{i}{}^{\nu}, \tag{31}$$

t. j. podle (31)

$$\sum_{j=1}^{p-1}\bar{\underset{p-j}{\lambda}}{}^{(p)}\alpha^{-j}\underset{j}{i}{}^{\nu} = \alpha^{-p-1}\sum_{j=1}^{p-1}\underset{p-j}{\lambda}{}^{(p)}\underset{j}{i}{}^{\nu},$$

odkud plyne ihned

$$\bar{\underset{p-j}{\lambda}}{}^{(p)} = \alpha^{j-p-1}\underset{p-j}{\lambda}{}^{(p)} \qquad \text{pro } j = 1, 2, \ldots, p-1,$$

což je vztah (30b).

Poznámka 6. Z věty 5 vyplývá, že jak afinní oblouk $s(t)$, tak skalární veličiny $\underset{p-k}{\lambda}{}^{(p)}$, $k = 1, 2, \ldots, p-1$ (kteréžto jsou definovány jen při $p > 1$) *nejsou vnitřními veličinami křivky C*, jež je, dle předpokladu křivkou p-té třídy v uvažovaném oboru; citované veličiny nejsou afinními invarianty křivky C, neboť při každé regulární transformaci parametru nejsou invariantní, nýbrž podléhají jednoduchému transformačnímu zákonu (30a, b).

Jako doplněk k definici afinního oblouku uvedeme tuto větu:

Věta 6. *Budiž parametrickými rovnicemi* (1) *definována regulární křivka C n-té třídy v A_n s definičním oborem $(\underset{1}{t}, \underset{2}{t})$. Nechť $\underset{0}{t}$ je nějaký bod z intervalu $(\underset{1}{t}, \underset{2}{t})$ Potom její afinní oblouk (ve smyslu definice* II) *lze uvést na tvar*

$$s(t) = \int_{t_0}^{t}\left[\frac{[\underset{1}{u}{}^{\nu}\underset{2}{u}{}^{\nu}\ldots\underset{n}{u}{}^{\nu}]}{Ke^{-\int_{t_0}^{t}\Gamma^{\gamma}_{\gamma\beta}\underset{1}{u}{}^{\beta}\,dt}}\right]^{\frac{2}{n(n+1)}} dt,$$

kde $[\underset{1}{u}{}^{\nu}\ldots\underset{n}{u}{}^{\nu}]$ je determinant z vektorů $\underset{i}{u}{}^{\nu}$, $i = 1, \ldots, n$, definovaných v (2a) *a K je konstanta různá od nuly, $K = [\underset{1}{u}{}^{\nu}\underset{2}{u}{}^{\nu}\ldots\underset{n}{u}{}^{\nu}]_{t=t_0}$.*

Důkaz: Podle formule pro absolutní derivaci multivektoru jest

$$\nabla_t[\underset{1}{u}{}^{\nu}, \ldots \underset{n}{u}{}^{\nu}] = \frac{d}{dt}[\underset{1}{u}{}^{\nu}, \ldots \underset{n}{u}{}^{\nu}] + [\underset{1}{u}{}^{\nu}\ldots\underset{n}{u}{}^{\nu}]\,\Gamma^{\beta}_{\beta\alpha}\underset{1}{u}{}^{\alpha}\,dt. \tag{33}$$

Provedeme-li přímo operaci naznačenou na levé straně v (33), dostaneme vzhledem k (3) a vzhledem k tomu, že křivka C je třídy n

$$\nabla_t[\underset{1}{u}^\nu \ldots \underset{n}{u}^\nu] = \underset{0}{l}^{(n)} [\underset{1}{u}^\nu, \ldots \underset{n}{u}^\nu]. \tag{34}$$

Z (33), (34) plyne ihned vztah

$$\underset{0}{l}^{(n)} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \log |[\underset{1}{u}^\nu \ldots \underset{n}{u}^\nu]| + \Gamma^\beta_{\beta\alpha} \underset{1}{u}^\alpha \, \mathrm{d}t,$$

neboť, ježto je křivka C třídy n, je v celém uvažovaném oboru $[\underset{1}{u}^\nu \ldots \underset{n}{u}^\nu] \neq 0$. Integrací poslední rovnice v mezích od $\underset{0}{t}$ do t, kde $\underset{0}{t}, t \in (\underset{1}{t}, \underset{2}{t})$ a ze vztahu (28) (položíme-li tam $p = n$) plyne pak snadno přepis (32) a tím i tvrzení věty.

V dalším budeme uvažovat afinní oblouk regulární křivky C kterékoliv třídy v A_n (tedy libovolné třídy p, $1 \leqq p \leqq n$).

Věta 7. *Budiž C regulární křivka p-té třídy, $(1 \leqq p \leqq n)$, v A_n $(n > 1)$ s definičním oborem $(\underset{1}{t}, \underset{2}{t})$, daná parametrickými rovnicemi $\xi^\nu = \xi^\nu(t)$, $\nu = 1, \ldots n$. Nechť a, b, c jsou tři pevně zvolená vzájemně různá čísla z intervalu $(\underset{1}{t}, \underset{2}{t})$. Nechť $s(t)$ je afinní oblouk křivky C, definovaný v (28)[9]). Potom poměr*

$$d(a, b; c) = \frac{s(a) - s(c)}{s(b) - s(c)} \tag{35}$$

je nezávislý na volbě parametru křivky C.

Poznámka 7. Při pevných číslech a, b, c vzájemně různých $(a, b, c \in (\underset{1}{t}, \underset{2}{t}))$ je tedy dělicí poměr $d(a, b; c)$ invariantní vůči každé regulární transformaci parametru $\bar{t} = \bar{t}(t)$ v $(\underset{1}{t}, \underset{2}{t})$. Zřejmě je $s(t)$ skalárem v A_n, definovaným v bodech dané křivky C. Je tedy $d(a, b; c)$ afinním invariantem křivky C.

Důkaz věty 7: Nechť $\underset{0}{t}$ je libovolným bodem z intervalu $(\underset{1}{t}, \underset{2}{t})$, jež je definičním oborem křivky C (která je, dle předpokladu, p-té třídy v A_n). Potom afinní oblouk při této volbě počátečního bodu je dán předpisem (28). Vyjdeme-li od jiného počátečního bodu $^*\underset{0}{t} \neq \underset{0}{t}$, $^*\underset{0}{t} \in (\underset{1}{t}, \underset{2}{t})$, potom mezi příslušnými afinními oblouky $s(t)$, $^*s(t)$ při témže původním parametru platí zřejmě vztah

$$^*s(t) - s(t) = \text{konst.}, \tag{36a}$$

kde $\text{konst.} = \displaystyle\int_{^*t_0}^{t_0} e^{\frac{2}{p(p+1)} \int_{t_0}^{t} \underset{0}{l}^{(p)} \, \mathrm{d}t} \, \mathrm{d}t.$

Jsou-li a, c dva libovolné body z $(\underset{1}{t}, \underset{2}{t})$, potom podle (36a) a je

$$^*s(a) - {}^*s(c) = s(a) - s(c). \tag{36b}$$

[9]) Při libovolné volbě „počátečního bodu" $\underset{0}{t} \in (\underset{1}{t}, \underset{2}{t})$.

Přihlédneme-li nyní k větě (5) resp. k transformačnímu vztahu (30a), potom z (36b), (30a) plyne ihned tvrzení věty. Jmenovatel na pravé straně v (35) nemůže být pro žádnou dvojici $b \neq c$, $b, c \in (\underset{1}{t}, \underset{2}{t})$, roven nule, ježto $s(t)$ je ryze monotonní v $(\underset{1}{t}, \underset{2}{t})$.

Poznámka 8. Z vět 3, 5, 7 plyne snadnou úvahou, že poměr $d(a, b; c)$ je nezávislý na tom, jakou funkci $\tau = \varphi(t)$ ze systému (23) vezmeme za parametr křivky C, tedy, kterou z těchto funkcí prohlásíme za afinní oblouk křivky C.

Definice III. *Číslo $d(a, b; c)$, definované v (35), nazýváme dělicím poměrem bodu c vzhledem k základním bodům a, b na křivce $C(a, b, c \in (\underset{1}{t}, \underset{2}{t}), a \neq b \neq c \neq a)$.*

Nyní se budeme zabývat skaláry $\underset{p-k}{\lambda^{(p)}}$, $k = 1, \dots p - 1$, vystupujících ve vztahu (27). Tyto skaláry nejsou afinními invarianty, jak vyplývá ze vztahu (30b). Avšak transformační zákon (30b) je tak jednoduchý, že se dá právem očekávat, že tyto skaláry jsou pro danou křivku p-té třídy v A_n charakteristické. Jejich důležitost vysvitne z následující existenční věty.

Věta 8. *Budiž A_n n-rozměrný afinní prostor v souřadnicích ξ^α $(\alpha = 1, 2, \dots n)$, opatřený symetrickou konexí o koeficientech $\Gamma^\nu_{\lambda\mu}(\xi^\alpha)$. Budiž ξ^α_0 bod tohoto prostoru takový, že v něm a v jeho určitém n-rozměrném okolí mají funkce $\Gamma^\nu_{\lambda\beta}$ spojité parciální derivace podle proměnných ξ^α nejméně p-tého řádu, kde $1 < p \leqq n$. Budiž dále dáno $p - 1$ funkcí jedné proměnné s, $\varphi_i(s)$ $i = 1, \dots, p - 1$, spojitých v bodě $\underset{0}{s}$ a v určitém jeho okolí. Budiž dále dáno p čísel $(\underset{k}{i^\alpha})_0$, $k = 1, \dots, p$; $\alpha = 1, \dots, n$, takových, že matice*

$$\begin{bmatrix} (\underset{1}{i^1})_0 (\underset{1}{i^2})_0 \dots (\underset{1}{i^n})_0 \\ (\underset{2}{i^1})_0 (\underset{2}{i^2})_0 \dots (\underset{2}{i^n})_0 \\ \dots\dots\dots\dots \\ (\underset{p}{i^1})_0 (\underset{p}{i^2})_0 \dots (\underset{p}{i^n})_0 \end{bmatrix}$$

má hodnost p.

Potom v dostatečně malém okolí bodu ξ^α_0 existuje křivka p-té třídy v A_n s parametrickými rovnicemi

$$\xi^\nu = \xi^\nu(s), \quad \nu = 1, \dots n \tag{37}$$

těchto vlastností:

a) *pro $s = \underset{0}{s}$ je $\xi^\nu(\underset{0}{s}) = \xi^\nu_0$;*

b) *označíme-li*

$$\underset{1}{i^\alpha} = \frac{d\xi^\alpha}{ds}, \; \underset{k}{i^\alpha} = \nabla_s \underset{k-1}{i^\alpha}, \; k = 2, \dots, p,$$

potom

$$\underset{k}{i^\alpha}(\underset{0}{s}) = (\underset{k}{i^\alpha})_0, \quad k = 1, \dots, p;$$

c) *parametr s je afinním obloukem této křivky;*

d) *pro křivku* (37) *skalární funkce* $\underset{p-k}{\lambda^{(p)}}(s)$, $k = 1, \ldots, p-1$, (*z věty* 4, *vztahů* (27)) *jsou rovny daným funkcím* $\varphi_k(s)$, *t. j.*

$$\underset{p-k}{\lambda^{(p)}}(s) \equiv \varphi_k(s), \qquad k = 1, \ldots, p-1;$$

e) *ve zmíněném dostatečně malém okolí bodu* ξ_0^α (*a v něm samém*) *existuje křivka* (37) *s vlastnostmi* a), b), c), d) *jednoznačně.*

Poznámka 9. Věta předchozí říká, že skalární funkce $\underset{p-k}{\lambda^{(p)}}$ ze vztahů (27) tvoří tak zvaný úplný systém pro existenci křivky p-té třídy v A_n (lokální existenci), t. j., jsou-li dány předem funkce $\underset{p-k}{\lambda^{(p)}}(s)$, $k = 1, \ldots, p = 1$; $1 < p \leqq n$, a je-li dáno nějaké číslo $\underset{0}{s}$ z definičního oboru těchto funkcí, dále pak počáteční bod ξ_0^α v A_n a v něm p lineárně nezávislých vektorů, potom, za předpokladů ve větě vyslovených, je těmito podmínkami v dostatečně malém okolí bodu ξ_0^α jednoznačně definována křivka p-té třídy v A_n.

Důkaz věty 8: Při daném přirozeném p, $1 < p \leqq n$, uvažujme systém diferenciálních rovnic

$$\underset{p+1}{i^\alpha} \equiv \nabla_s \underset{p}{i^\alpha} = \sum_{k=1}^{p-1} \varphi_k(s) \underset{k}{i^\alpha} \,^{10}), \tag{38}$$

kde

$$\underset{1}{i^\alpha} \equiv \frac{d\xi^\alpha}{ds}, \underset{k}{i^\alpha} \equiv \nabla_s \underset{k-1}{i^\alpha} \quad \text{pro } k = 2, \ldots, p+1. \tag{39a}$$

Zaveďme označení

$$\frac{d\xi^\alpha}{ds} = \underset{1}{v^\alpha}, \; \frac{d}{ds} \underset{k-1}{v^\alpha} = \underset{k}{v^\alpha}, \qquad k = 2, \ldots, p+1. \tag{39b}$$

Vektory $\underset{k}{i^\alpha}$ v (39a) můžeme přepsat pomocí veličin $\underset{k}{v^\alpha}$ a koeficientů dané konexe v A_n, resp. jejich parciálních derivací podle ξ^α. Tak dostaneme

$$\underset{1}{i^\alpha} = \underset{1}{v^\alpha}, \tag{40a}$$

$$\underset{2}{i^\alpha} = \underset{2}{v^\alpha} + \Gamma^\alpha_{\beta\gamma} \underset{1}{v^\beta} \underset{1}{v^\gamma}, \tag{40b}$$

$$\underset{3}{i^\alpha} = \underset{3}{v^\alpha} + 3\Gamma^\alpha_{\beta\gamma} \underset{2}{v^\beta} \underset{1}{v^\gamma} + (\partial_\gamma \Gamma^\alpha_{\mu\nu} + \Gamma^\alpha_{\beta\gamma} \Gamma^\beta_{\mu\nu}) \underset{1}{v^\mu} \underset{1}{v^\nu} \underset{1}{v^\gamma}. \tag{40c}$$

Snadno bychom nyní methodou úplné indukce dokázali toto tvrzení.

Tvrzení I. *Vektor* $\underset{k}{i^\alpha}$ *lze přepsat na tvar*

$$\underset{k}{i^\alpha} = \underset{k}{v^\alpha} + \underset{k}{P^\alpha}(\underset{1}{v^\nu}, \underset{2}{v^\nu}, \ldots \underset{k-1}{v^\nu}) \quad \textit{pro } k = 2, \ldots, p+1, \tag{40}$$

[10]) Viz (27).

kde $\underset{k}{P^\alpha}$ je celistvou racionální funkcí v proměnných $\underset{1}{v^\alpha}, \underset{2}{v^\alpha}, \dots, \underset{k-1}{v^\alpha}$, v jejichž koeficientech vystupují v součtech a součinech pouze konstanty, koeficienty konexe a jejich parciální derivace nejvýše $(k-2)$-ho řádu[11].

Všimněme si, že ze vztahů (40a, b, c) a z tvrzení I plyne ihned tento poznatek: Jsou-li dány veličiny $\underset{k}{v^\alpha}$, $k = 1, \dots, p$ a bod ξ^α pevně[12]), pak jsou též vektory $\underset{k}{i^\alpha}$, $k = 1, \dots, p$ pevně jednoznačně stanoveny. Snadno nahlédneme (rovněž z (40a, b, c) a z tvrzení I), že, jsou-li dány pevně vektory $\underset{k}{i^\alpha}$ a bod ξ^α, jsou pak jednoznačně a pevně stanoveny vektory $\underset{k}{v^\alpha}$.

Učiňme nyní tento krok: pevně daným číslům ξ^α_0 a $(\underset{k}{i^\alpha})_0$, $k = 1, \dots, p$, (v předpokladu věty), přiřaďme čísla $(\underset{k}{v^\alpha})_0$ ve smyslu předchozích úvah. Jsou tedy počátečními podmínkami ξ^α_0, $(\underset{k}{i^\alpha})_0$, $k = 1, \dots, p$, ve smyslu hořeního přiřazení jednoznačně stanovena čísla $(\underset{k}{v^\alpha})$, $k = 1, \dots, p$.

Vyslovme nyní další, pro důkaz věty důležité tvrzení:

Tvrzení II. *V dostatečně malé uzavřené oblasti $n(p+1)$ rozměrné, obsahující uvnitř bod $[\underset{0}{\xi^1}, \dots \underset{0}{\xi^n}, (\underset{1}{v^1})_0, \dots (\underset{1}{v^n})_0, (\underset{2}{v^1})_0, \dots (\underset{p}{v^n})_0]$, mají funkce $\underset{k}{i^\alpha}(\xi^\nu, \underset{1}{v^\nu}, \dots \underset{k}{v^\nu})$ spojité parciální derivace podle svých argumentů $(k = 1, 2, \dots p)$.*

Důkaz tohoto tvrzení plyne ihned z tvrzení I a z předpokladu věty.

Vraťme se nyní k systému rovnic (38). Tento systém lze, vzhledem k (39b), (40) přepsat na tvar

$$\underset{p+1}{v^\alpha} = -\underset{p+1}{P^\alpha}(\underset{1}{v^\nu}, \dots \underset{p}{v^\nu}) + \sum_{k=1}^{p-1} \varphi_k(s)(\underset{k}{v^\alpha} + \underset{k}{P^\alpha}(\underset{1}{v^\nu}, \dots \underset{k-1}{v^\nu})). \tag{41}$$

Uvažujme nyní systém $n(p+1)$ rovnic pro $n(p+1)$ neznámých funkcí $\xi^\alpha, \underset{1}{v^\alpha}, \dots \underset{p}{v^\alpha}$ s nezávisle proměnnou s

$$\frac{d\xi^\alpha}{ds} = \underset{1}{v^\alpha}, \quad \frac{d}{ds}\underset{k-1}{v^\alpha} = \underset{k}{v^\alpha}, \qquad k = 2, \dots p, \tag{42a}$$

$$\frac{d}{ds}\underset{p}{v^\alpha} = f^\alpha(s, \xi^\nu, \underset{1}{v^\nu}, \underset{2}{v^\nu}, \dots \underset{p}{v^\nu}), \tag{42b}$$

kde

$$f^\alpha \equiv -\underset{p+1}{P^\alpha}(\underset{1}{v^\nu}, \dots \underset{p}{v^\nu}) + \sum_{k=1}^{p-1} \varphi_k(s)(\underset{k}{v^\alpha} + \underset{k}{P^\alpha}(\underset{1}{v^\nu}, \dots \underset{k-1}{v^\nu}))^{13}). \tag{43}$$

Tvrzení III. *Omezíme-li se na dostatečně malou uzavřenou oblast $n(p+1)+1$ rozměrnou, obsahující uvnitř bod*

$$[\underset{0}{s}, \underset{0}{\xi^1}, \dots \xi^n_0, (\underset{1}{v^1})_0, \dots (\underset{1}{v^n})_0, \dots (\underset{p}{v^n})_0],$$

[11]) Snadný důkaz tohoto tvrzení methodou úplné indukce zde nepodávám.

[12]) ξ^α z oboru, v němž podle předpokladu věty mají funkce $\Gamma^{\alpha\beta}_\gamma$ spojité parciální derivace aspoň p-tého řádu.

potom funkce f^α, definované v (43), *jsou v této uzavřené oblasti spojitými funkcemi svých argumentů s, ξ^α, $\underset{1}{v}^\alpha, \ldots \underset{p}{v}^\alpha$ a mají v této uzavřené oblasti spojité parciální derivace podle $n(p+1)$ proměnných $\xi^\alpha, \underset{1}{v}^\alpha, \ldots \underset{p}{v}^\alpha$.*

Důkaz tohoto tvrzení plyne bezprostředně z tvrzení II a z předpokladu věty, že totiž funkce $\varphi_k(s)$ jsou spojité v dostatečně malém okolí bodu $\underset{0}{s}$.

Tvrzení III nám však říká, že funkce f^α, $\alpha = 1, \ldots, n$ vyhovují v dostatečně malé uzavřené oblasti, obsahující uvnitř bod $[s_0, \underset{0}{\xi}^1, \ldots \underset{0}{\xi}, (\underset{1}{v}^1)_0, \ldots \ldots (\underset{1}{v}^n)_0, (\underset{2}{v}^1)_0, \ldots (\underset{p}{v}^n)_0]$, Lipschitzově podmínce vzhledem k $\xi_1^\alpha, \underset{1}{v}^\alpha, \ldots \underset{p}{v}^\alpha$[14]. Platí tedy pro soustavu diferenciálních rovnic (42a, b) existenční teorém Cauchyův (lokálně). Tedy platí tento existenční teorém též pro soustavu ekvivalentní soustavě (42a, b), t. j. pro soustavu (38).

Podle tohoto existenčního teorému existuje tedy (lokálně) křivka C s parametrickými rovnicemi (37), jež prochází předem daným bodem $\xi_0^\alpha = \xi^\alpha(\underset{0}{s})$ a pro kterou platí v bodě $\underset{0}{s}$

$$(\underset{k}{v}^\alpha)_0 = \underset{k}{v}^\alpha(\underset{0}{s}), \qquad k = 1, \ldots, p. \tag{44}$$

Vztahy (44) implikují (podle toho, jak jsme čísla $(\underset{k}{v}^\alpha)_0$ a veličiny $\underset{k}{v}^\alpha$ dříve definovali) následující relace

$$(\underset{k}{i}^\alpha)_0 = \underset{k}{i}^\alpha(\underset{0}{s}), \qquad k = 1, 2, \ldots, p. \tag{45}$$

Tím je dokázáno tvrzení a), b) naší věty. Z rovnic (38) je zřejmé, že tato integrální křivka je v uvažovaném dostatečně malém okolí bodu $\underset{0}{s}$ nejvýše p-té třídy v A_n. Ježto vektory $\underset{1}{i}^\alpha, \ldots \underset{p}{i}^\alpha$ jsou pak v tomto dostatečně malém okolí spojitými funkcemi proměnné s (jsou totiž, jak plyne z (38), diferencovatelné podle s), je hodnost matice z vektorů $\underset{1}{i}^\alpha, \ldots \underset{p}{i}^\alpha$ rovna p též v dostatečně malém okolí bodu $\underset{0}{s}$.

Tvrzení c) věty, totiž, že s je afinním obloukem této křivky, plyne ihned z rovnic (38), věty 4 a z poznámky 5 na str. 14. Tvrzení d), jež je jádrem věty, plyne ihned z rovnic (38), z věty 4, vztahů (37). Tvrzení e) je pak z předchozího evidentní. Tím je věta 8 dokázána.

Poznámka 10. Předchozí existenční věta neobsahuje případ křivky prvé třídy v A_n. V tomto případě jde o řešení systému diferenciálních rovnic

$$\nabla_s \underset{1}{i}^\nu = 0,$$

[13]) Viz pravou stranu v (41).

[14]) Viz na př. *V. V. Stepanov*: Kurs diferenciálních rovnic (český překlad od *E. Čecha*), Praha 1950, str. 157 shora.

na který lze použít též existenční věty 8, klademe-li v ní $p = 1$ a vynecháme-li předpoklad daných funkcí $\varphi_k(s)$ a škrtneme-li současně tvrzení d) věty 8. Zde jde o známý případ geodetických čar v A_n.

Poznámka 11. Nehledíme-li k jednoduchému případu čar geodetických v A_n, potom, jak z existenční věty 8 a transformačních vztahů (30b) vyplývá, jsou funkce $\underset{p-k}{\lambda^{(p)}}(s)$, $k = 1, \ldots, p - 1$, podstatné důležitosti pro křivku p-té třídy v A_n $(1 < p \leqq n)$. Jsou to skaláry charakterisující křivku p-té třídy v A_n, i když nejsou afinními invarianty v tom smyslu, že nejsou invariantní vůči libovolné regulární transformaci parametru křivky. V oboru, kde platí pro diferenciální rovnice (27) existenční věta 8, lze předem danými funkcemi $\underset{p-k}{\lambda^{(p)}}(s)$, $k = 1, \ldots., p$ charakterisovat celou rodinu křivek p-té třídy v A_n. Tak dojdeme ke speciálním rodinám křivek téže třídy v A_n, k rodinám, kde křivky jedné a téže rodiny mají, jakožto různá partikulární řešení daného systému diferenciálních rovnic (38), určité společné vlastnosti, tak zvané *afinní vlastnosti* křivek téže rodiny.

Závěrečná poznámka k článku:

Při sepisování nebylo ani v důkazech použito cizích pramenů. Též symbolika je vlastní. Jednoduché příklady jakožto aplikace předchozí theorie budou uveřejněny později jakožto druhá část práce.

LITERATURA

týkající se afinních pojmů v článku se vyskytujících:

E. Cartan: Sur les variétés à connexion affine (Annales Éc. Norm. sup., t. 40, 1923).

L. Berwald: Differentialinvarianten in der Geometrie (Enz. der Math. Wiss. III. Teil 3, 1923).

W. Blaschke: Vorlesungen über Differentialgeometrie II, Berlin, Springer, 1923.

J. A. Schouten - D. J. Struik: Einführung in die neueren Methoden der Differentialgeometrie II, Groningen—Batavia, 1938, str. 25—27.

V. Hlavatý: Les courbes de la variété générale à *n* dimensions; Mémorial des sciences mathématiques, Paris 1934, Fascicule LXIII.

ČÁST II.

Několik příkladů z afinní geometrie křivek v E_2

Uvedené příklady jsou jednoduchou aplikací theorie probrané v I. části práce na křivky v dvojrozměrném afinoeukleidovském prostoru. Jde většinou o známé výsledky, které je možno odvodit jednoduchými jinými výpočty. Příklady jsou voleny jednoduché proto, aby na nich právě byla evidentní úloha afinního oblouku v geometrii.

Afinní prostor dvojrozměrný A_2 o koeficientech konexe $\Gamma^{\nu}_{\lambda\mu} \equiv 0$ se nazývá dvojrozměrným afinním eukleidovským prostorem a je zvykem označovat jej E_2.

Jako velmi jednoduché příklady pro aplikaci theorie rozvedené v I. části práce uvedeme příklady z afinní geometrie křivek v E_2.

Poznamenejme ještě, že geodetickými čarami v afinním eukleidovském prostoru E_n ($n \geqq 2$) jsou přímky. Křivka p-té třídy v E_n, $1 < p < n$, je křivkou ležící v p-dimensionální rovinné subvarietě E_p, která leží v E_n. To snadno nahlédneme z definice třídy regulární křivky v A_n, podané v I. části práce. Stačí se tedy omezit při studiu křivek v E_n na studium křivek n-té třídy v E_n.

Příklad 1. *Rodina parabol v E_2.* Definujeme funkci $\overset{(2)}{\underset{1}{\lambda}}(s)$ takto:

$$\overset{(2)}{\underset{1}{\lambda}} \equiv 0\,. \tag{1,1}$$

V tomto případě se diferenciální rovnice (27) redukují na tvar

$$\frac{\mathrm{d}^3\xi^\alpha}{\mathrm{d}s^3} = 0\,, \qquad \alpha = 1, 2\,. \tag{1,2}$$

Řešení těchto rovnic jest

$$\xi^\alpha = A^\alpha s^2 + B^\alpha s + C^\alpha\,, \qquad \alpha = 1, 2\,, \tag{1,3a}$$

kde $A^\alpha, B^\alpha, C^\alpha$, $\alpha = 1,2$ jsou zcela libovolné konstanty. Podmínka, že hledaná křivka má být druhé třídy v E_2 vede na podmínku

$$A^1B^2 - A^2B^1 \neq 0\,. \tag{1,3b}$$

Rovnice (1,3a) spolu s podmínkou (1,3b) vyjadřují, jak se snadno přesvědčíme, rodinu všech parabol v kartézské rovině.

Jestliže předepíšeme počáteční hodnoty ve smyslu existenční věty 8, pak dostaneme jedinou zcela určitou parabolu jakožto partikulární řešení rovnic (1,2).

Všimněme si ještě toho, že směr $\underset{2}{i}^\alpha \equiv \dfrac{\mathrm{d}^2\xi^\alpha}{\mathrm{d}s^2}$ je konstantní a v důsledku (1,3b) nenulový. Nazveme-li $\underset{2}{i}^\alpha$ *sdruženým směrem* ke směru $\underset{1}{i}^\alpha \equiv \dfrac{\mathrm{d}\xi^\alpha}{\mathrm{d}s}$, potom v každém bodě paraboly je vektoru $\underset{1}{i}^\alpha$ přiřazen jeden a týž směr sdružený.

Příklad 2. *Rodina elips v E_2.* Hledejme rodinu křivek druhé třídy v E_2, kde funkce $\overset{(2)}{\underset{1}{\lambda}}(s)$ je takto definována

$$\overset{(2)}{\underset{1}{\lambda}}(s) \equiv -1 . \tag{2,1}$$

V tomto případě se diferenciální rovnice (27) redukují na tvar

$$\frac{d^3\xi^\alpha}{ds^3} + \frac{d\xi^\alpha}{ds} = 0 , \qquad \alpha = 1, 2 . \tag{2,2}$$

Snadno zjistíme, že řešením systému rovnic (2,2) jsou křivky

$$\xi^\alpha = A^\alpha \sin s + B^\alpha \cos s + C^\alpha , \qquad \alpha = 1, 2 , \tag{2,3a}$$

kde A^α, B^α, C^α ($\alpha = 1, 2$) jsou libovolné konstanty vázané pouze podmínkou

$$A^1B^2 - A^2B^1 \neq 0 , \tag{2,3b}$$

což je opět podmínka pro to, aby integrální křivka rovnic (2,2) byla druhé třídy v E_2.

Rovnice (2,3a) spolu s podmínkou (2,3b) popisují, jak se snadno přesvědčíme, rodinu všech elips v kartézské rovině.

Příklad 3. *Rodina hyperbol v E_2.* Definujeme-li

$$\overset{(2)}{\underset{1}{\lambda}}(s) \equiv 1 , \tag{3,1}$$

potom se rovnice (27) redukují na tvar

$$\frac{d^3\xi^\alpha}{ds^3} - \frac{d\xi^\alpha}{ds} = 0 , \qquad \alpha = 1, 2 , \tag{3,2}$$

jejichž řešením jsou křivky

$$\xi^\alpha = A^\alpha e^s + B^\alpha e^{-s} + C^\alpha , \qquad \alpha = 1, 2 ,$$

které můžeme též přepsat na tvar

$$\xi^\alpha = a^\alpha \sinh s + b^\alpha \cosh s + c^\alpha , \qquad \alpha = 1, 2 , \tag{3,3a}$$

kde a^α, b^α, c^α ($\alpha = 1, 2$) jsou libovolné konstanty vázané podmínkou

$$a^1b^2 - a^2b^1 \neq 0 , \tag{3,3b}$$

kterážto podmínka vyjadřuje, že křivka (3,3a) je druhé třídy v E_2. Snadno se přesvědčíme, že parametrickými rovnicemi (3,3a) spolu s podmínkou (3,3b) je podchycena třída hyperbol v kartézské rovině.

Poznámka 1. Snadno se přesvědčíme, že volba $\overset{(2)}{\underset{1}{\lambda}} = -k$, $k > 0$ je konstanta, vede ke křivkám druhé třídy v E_2 s parametrickými rovnicemi

$$\xi^\alpha = A^\alpha \sin \sqrt{k}s + B^\alpha \cos \sqrt{k}s + C^\alpha , \qquad \alpha = 1, 2 ,$$

kde A^α, B^α, C^α ($\alpha = 1, 2$) jsou libovolné konstanty vázané podmínkou $A^1B^2 - A^2B^1 \neq 0$. Položíme-li $^*s = \sqrt{k}s$, potom předchozí parametrické rovnice přejdou v rovnici elips v E_2 tvaru (2,3a) a příslušná charakteristická funkce $\underset{1}{{}^*\lambda}$ je pak, podle transformačního vztahu (30b), rovna

$$\overset{(2)}{\underset{1}{{}^*\lambda}} = \frac{1}{(\sqrt{k})^2}\overset{(2)}{\underset{1}{\lambda}} = -1 \, .$$

Tedy číslo -1 charakterisuje skutečně všechny elipsy v E_2. Zcela obdobně si ověříme, že číslo $+1$ charakterisuje všechny hyperboly (větve hyperbol) v E_2. To, že číslo 0 charakterisuje všechny paraboly v rovině, bylo ukázáno v příkladě 1.

Příklad 4. *Definice středu elipsy a hyperboly a středu křivosti.*

Budiž parametrickými rovnicemi

$$\xi^\alpha = \xi^\alpha(s), \quad \alpha = 1, 2, \quad s \in J \quad (J \text{ — otevřený interval}) \tag{4,1}$$

dána v E_2 křivka druhé třídy v J, při čemž s nechť je její afinní oblouk. Předpokládejme dále, že této křivce příslušná charakteristická funkce $\overset{(2)}{\underset{1}{\lambda}}(s)$ je spojitá v J. Budiž $\underset{\circ}{s} \in J$ té vlastnosti, že

$$\overset{(2)}{\underset{1}{\lambda}}(\underset{\circ}{s}) \neq 0 \, . \tag{4,2}$$

Z (4,2) a z předpokladu spojitosti funkce $\overset{(2)}{\underset{1}{\lambda}}(s)$ v J (jak to vyžaduje existenční teorém 8) plyne, že je $\overset{(2)}{\underset{1}{\lambda}}(s)$ různá od nuly v dostatečně malém okolí bodu $\underset{\circ}{s}$. Volme číslo h tak malé, aby bod $\underset{\circ}{s} + h$ byl rovněž z tohoto okolí (při čemž $\underset{\circ}{s} + h \in J$). V bodech $\underset{\circ}{s}$, $\underset{\circ}{s} + h$ křivky (4,2) sestrojme přímky ve směru vektorů $\underset{2}{i}{}^\alpha(\underset{\circ}{s})$, $\underset{2}{i}{}^\alpha(\underset{\circ}{s} + h)$. Parametrické rovnice těchto přímek jsou

$$\begin{aligned} x^\alpha(t) &= \xi^\alpha(\underset{\circ}{s}) + \underset{2}{i}{}^\alpha(\underset{\circ}{s})\, t \, , \\ x^\alpha(t) &= \xi^\alpha(\underset{\circ}{s} + h) + \underset{2}{i}{}^\alpha(\underset{\circ}{s} + h)\, t \, . \end{aligned} \tag{4,3}$$

Najděme tu hodnotu parametru t, která odpovídá průsečíku přímek (4,3). Pro tuto hodnotu t_h plynou z (4,3) tyto vztahy

$$t_h[\underset{2}{i}{}^\alpha(\underset{\circ}{s} + h) - \underset{2}{i}{}^\alpha(\underset{\circ}{s})] = -[\xi^\alpha(\underset{\circ}{s} + h) - \xi^\alpha(\underset{\circ}{s})] \, , \qquad \alpha = 1, 2 \, . \tag{4,4}$$

Uvažujme nyní dva podíly

$$\frac{\xi^\alpha(\underset{\circ}{s} + h) - \xi^\alpha(\underset{\circ}{s})}{\underset{2}{i}{}^\alpha(\underset{\circ}{s} + h) - \underset{2}{i}{}^\alpha(\underset{\circ}{s})}\, , \qquad \alpha = 1, 2 \, . \tag{4,5}$$

Ježto vektor $\underset{2}{i}{}^\alpha$ má v J derivaci $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\underset{2}{i}{}^\alpha = \overset{(2)}{\underset{1}{\lambda}}\underset{1}{i}{}^\alpha$ a ježto ve zmíněném dostatečně malém okolí bodu $\underset{\circ}{s}$ je $\overset{(2)}{\underset{1}{\lambda}}(\underset{\circ}{s}) \neq 0$ a protože vektor $\underset{1}{i}^{\alpha}$ není v žádném bodě intervalu J vektorem nulovým, potom aspoň pro jeden podíl v (4,5) je jmenovatel různý od nuly a tedy příslušný podíl má smysl. Nechť α je onen pevný index, pro který podíl (4,5) má smysl. Potom jsou zřejmě splněny podmínky pro druhou větu o střední hodnotě, takže můžeme psát

$$\frac{\xi^{\alpha}(\underset{\circ}{s} + h) - \xi^{\alpha}(\underset{\circ}{s})}{\underset{2}{i}^{\alpha}(\underset{\circ}{s} + h) - \underset{2}{i}^{\alpha}(\underset{\circ}{s})} = \frac{\underset{1}{i}^{\alpha}(\underset{\circ}{s} + \Theta h)}{\overset{(2)}{\underset{1}{\lambda}}(\underset{\circ}{s} + \Theta h)\, \underset{1}{i}^{\alpha}(\underset{\circ}{s} + \Theta h)}\,, \qquad 0 < \Theta < 1\,.$$

Odsud a z (4,4) plyne

$$t_h = -\frac{1}{\overset{(2)}{\underset{1}{\lambda}}(\underset{\circ}{s} + \Theta h)}\,, \qquad 0 < \Theta < 1\,. \tag{4,6}$$

Dosazením z (4,6) do první z rovnic (4,3) dostaneme pro souřadnice hledaného průsečíku

$$x^{\alpha}(t_h) = \xi^{\alpha}(\underset{\circ}{s}) - \{\overset{(2)}{\underset{1}{\lambda}}(\underset{\circ}{s} + \Theta h)\}^{-1}\, \underset{2}{i}^{\alpha}(\underset{\circ}{s})\,, \qquad \alpha = 1, 2\,. \tag{4,7}$$

Necháme-li nyní bod $\underset{\circ}{s} + h$ konvergovat k bodu $\underset{\circ}{s}$, potom přechodem k limitě $\to 0$) dostaneme

$$x^{\alpha}(\underset{\circ}{s}) = \lim_{h \to 0} x^{\alpha}(t_h) = \xi^{\alpha}(\underset{\circ}{s}) - \{\overset{(2)}{\underset{1}{\lambda}}(\underset{\circ}{s})\}^{-1}\, \underset{2}{i}^{\alpha}(\underset{\circ}{s})\,, \qquad \alpha = 1, 2\,.$$

Výsledek můžeme stručně vysloviti takto:

1°. *Ke každému bodu křivky* (4,1) *lze přiřadit za předpokladů shora vyslovených, bod o souřadnicích*

$$x^{\alpha}(s) = \xi^{\alpha}(s) - \{\overset{(2)}{\underset{1}{\lambda}}\}^{-1}\, \underset{2}{i}^{\alpha}(s)\,, \qquad \alpha = 1, 2\,. \tag{4,8}$$

Toto přiřazení je jednoznačné a nezávislé na volbě parametru křivky.

Nezávislost bodu $x^{\alpha}(s)$ na volbě parametru plyne ihned z transformačních vztahů (30b), (31).

Bod $x^{\alpha}(s)$, definovaný v (4,8), nazýváme *středem křivosti křivky* příslušným k bodu s.

Z 1° a ze vztahů (30b), (31) plyne ihned:

2°. *Vektor*

$$n^{\alpha}(s) \equiv -\{\overset{(2)}{\underset{1}{\lambda}}(s)\}^{-1}\, \underset{2}{i}^{\alpha}(s) \tag{4,9}$$

je nezávislý na transformaci parametru křivky.

Poznámka 2. Bod křivky druhé třídy v E_2, v němž je $\overset{(2)}{\underset{1}{\lambda}} = 0$, budeme nazývat bodem *parabolickým* na křivce. V takovém bodě není ovšem vektor n^{α} definován.

Vektor $\underset{2}{i^\alpha}(s)$ (s je afinní oblouk) budeme nazývat *směrem sdruženým* ke směru $\underset{1}{i^\alpha}$.

Z předcházejících definic a vztahů (4,8) odvodíme dvě tvrzení, týkající se rodin křivek z příkladů 2,3.

3°. *Všem bodům elipsy v E_2 odpovídá jediný společný střed křivosti, jímž procházejí všechny přímky*

$$x^\alpha(t) = \xi^\alpha(s) + n^\alpha(s)\, t\,, \qquad \alpha = 1, 2\,. \tag{4,10}$$

(t. j. přímky ve směru $\underset{2}{i^\alpha}(s)$ vedené bodem $\xi^\alpha(s)$). Stejné tvrzení platí pro hyperbolu.

D ů k a z. Pro elipsu je podle (2,3a)

$$\xi^\alpha = A^\alpha \sin s + B^\alpha \cos s + C^\alpha\,, \qquad \alpha = 1, 2\,, \tag{4,11}$$

při čemž $A^\alpha, B^\alpha, C^\alpha$ jsou libovolné konstanty vázané podmínkou $A^1B^2 - - A^2B^1 \neq 0$; s je afinní oblouk. Z (4,11) plyne ihned

$$\underset{2}{i^\alpha} = - A^\alpha \sin s - B^\alpha \cos s = - \xi^\alpha + C^\alpha\,. \tag{4,12}$$

Dosadíme-li z (4,11), (4,12) do (4,8) a uvážíme-li, že pro elipsu (4,11) je podle (2,1) $\overset{(2)}{\underset{1}{\lambda}} \equiv - 1$, dostaneme

$$x^\alpha(s) = C^\alpha\,, \qquad \alpha = 1, 2\,,$$

pro každou hodnotu s. Ježto bod $x^\alpha(s)$ leží na přímce jdoucí bodem $\xi^\alpha(s)$ mající, směr $\underset{2}{i^\alpha}(s)$, je zbývající část tvrzení 3° pro elipsu evidentní. Pro hyperbolu probíhá důkaz obdobně.

4°. *Nechť parametrickými rovnicemi*

$$\xi^\alpha = \xi^\alpha(s)\,, \qquad s \in (-\infty, \infty) \tag{4,13}$$

je definována v E_2 regulární křivka druhé třídy v celém svém definičním oboru. Nechť s je její afinní oblouk a $\overset{(2)}{\underset{1}{\lambda}}(s)$ jí příslušná charakteristická funkce, o níž budeme předpokládat, že je v $(-\infty, \infty)$ derivace schopná. Potom nutná a postačující podmínka pro to, aby pro křivku (4,13) *uvedených vlastností existoval jediný střed křivosti,*[1] *jest: křivka je buď elipsa nebo hyperbola.*

D ů k a z: Postačitelnost podmínky věty je vyslovena tvrzením 3°. Nutnost podmínky věty si ověříme takto: uvažme nejdříve, že má-li mít křivka požadovanou vlastnost, potom v žádném bodě této křivky nemůže být $\overset{(2)}{\underset{1}{\lambda}}$ rovno nule (ježto v takovém případě by příslušný střed křivosti nebyl vůbec definován, jak

[1]) společný všem bodům křivky.

je vidět z (4,8)). Musí být tedy nutně $\overset{(2)}{\underset{1}{\lambda}} \neq 0$ v $(-\infty, \infty)$. Podle předpokladu věty je $\overset{(2)}{\underset{1}{\lambda}}$ spojitou funkcí parametru s v $(-\infty, \infty)$; má tedy $\overset{(2)}{\underset{1}{\lambda}}$ v $(-\infty, \infty)$ totéž znamení (tedy buď $\overset{(2)}{\underset{1}{\lambda}} > 0$ v $(-\infty, \infty)$ nebo $\overset{(2)}{\underset{1}{\lambda}} < 0$ v $(-\infty, \infty)$). Podmínka, že existuje jediný střed křivosti pro každé $s \in (-\infty, \infty)$, vede podle (4,8) k podmínce

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left\{\xi^\alpha(s) - \frac{1}{\overset{(2)}{\underset{1}{\lambda}}} \underset{2}{i^\alpha}(s)\right\} \equiv 0 \qquad (s \in (-\infty, \infty)) .$$

Provedeme-li naznačenou operaci, dospějeme (vzhledem k (27)) k podmínce

$$\underset{2}{i^\alpha}(s) \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s} \overset{(2)}{\underset{1}{\lambda}} \equiv 0 , \qquad s \in (-\infty, \infty) .$$

Ježto předpokládáme, že křivka je druhé třídy v E_2, nemůže být v žádném bodě $\underset{2}{i^\alpha}$ vektorem nulovým. Poslední vztah se tedy redukuje na $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s} \overset{(2)}{\underset{(1)}{\lambda}} \equiv 0$, t. j. $\overset{(2)}{\underset{1}{\lambda}} =$ $=$ *konstanta* v $(-\infty, \infty)$. Z hořejších úvah je zřejmé, že tato konstanta nemůže být rovna nule. Je tedy buď větší než nula a křivka je pak hyperbola, nebo menší než nula a křivka je v tomto případě elipsou. To plyne z poznámky 1.

Poznámka 3. Do kategorie křivek s jediným středem křivosti mohli bychom zahrnout též parabolu, kdybychom připustili pojem nevlastního středu křivosti. Tento pojem však nezavádíme.

Poznámka 4. Tvrzení 4° ukazuje, že rodina elips a rodina hyperbol jsou jakési privilegované křivky v E_2. Jediný střed křivosti těchto křivek nazýváme prostě jejich středem.

Příklad 5. *Frenetovy formule pro křivku druhé třídy v E_2.*

Nechť parametrickými rovnicemi $\xi^\alpha = \xi^\alpha(s)$, $\alpha = 1, 2$, je dána křivka druhé třídy v E_2, při čemž s je její afinní oblouk, $(\underset{1}{s}, \underset{2}{s})$ definiční interval. Předpokládejme, že na uvažované křivce neleží žádný parabolický bod. Dále předpokládejme, že křivce příslušná charakteristická funkce $\overset{(2)}{\underset{1}{\lambda}}(s)$ má v intervalu $(\underset{1}{s}, \underset{2}{s})$ spojitou derivaci. Pak je tedy v $(\underset{1}{s}, \underset{2}{s})$ buď $\overset{(2)}{\underset{1}{\lambda}}(s) > 0$ nebo $\overset{(2)}{\underset{1}{\lambda}}(s) < 0$.

Označme

$$\varepsilon = \text{signum}\, \overset{(2)}{\underset{1}{\lambda}}(s) , \qquad s \in (\underset{1}{s}, \underset{2}{s})^{2)} \qquad (5,1)$$

[2]) tedy $\varepsilon = 1$, je-li $\overset{(2)}{\underset{1}{\lambda}} > 0$, $\varepsilon = -1$, je-li $\overset{(2)}{\underset{1}{\lambda}} < 0$.

a zaveďme na dané křivce nový parametr

$$\sigma = \int_{s}^{s} \sqrt{|\overset{(2)}{\underset{1}{\lambda}}(s)|}\, \mathrm{d}s\,. \tag{5,2}$$

Označíme-li

$$t^\alpha \equiv \frac{\mathrm{d}\xi^\alpha}{\mathrm{d}\sigma} \tag{5,3}$$

a značí-li $\underset{1}{i}^\alpha = \dfrac{\mathrm{d}\xi^\alpha}{\mathrm{d}s}$ (jako v předchozích příkladech), potom mezi vektory $\underset{1}{i}^\alpha$, t^α platí vztah

$$t^\alpha = |\overset{(2)}{\underset{1}{\lambda}}|^{-\frac{1}{2}}\, \underset{1}{i}^\alpha\,. \tag{5,4}$$

Z (5,4) plyne pak

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\sigma} t^\alpha = -\tfrac{1}{2}\varepsilon|\overset{(2)}{\underset{1}{\lambda}}|^{-2}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\overset{(2)}{\underset{1}{\lambda}}\right)\underset{1}{i}^\alpha + |\overset{(2)}{\underset{1}{\lambda}}|^{-1}\,\underset{2}{i}^\alpha.$$

Zavedeme-li ještě označení (viz (4,9))

$$n^\alpha(s) = -\{\overset{(2)}{\underset{1}{\lambda}}\}^{-1}\,\underset{2}{i}^\alpha(s) = -\,\varepsilon|\overset{(2)}{\underset{1}{\lambda}}|^{-1}\,\underset{2}{i}^\alpha(s)\,, \tag{5,5}$$

můžeme psát

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\sigma} t^\alpha = -\tfrac{1}{2}\varepsilon\,|\overset{(2)}{\underset{1}{\lambda}}|^{-\frac{3}{2}}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\overset{(2)}{\underset{1}{\lambda}}\right) t^\alpha - \varepsilon n^\alpha\,. \tag{5,6}$$

Z (5,5) plyne dále derivováním podle σ

$$\frac{d}{\mathrm{d}\sigma} n^\alpha = -t^\alpha + \varepsilon\overset{(2)}{\underset{1}{\lambda}}{}'\,|\overset{(2)}{\underset{1}{\lambda}}|^{-\frac{3}{2}}\, n^\alpha\,, \qquad \overset{(2)}{\underset{1}{\lambda}}{}' \equiv \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\overset{(2)}{\underset{1}{\lambda}}\,. \tag{5,7}$$

Zavedeme-li pro stručnost označení

$$\varrho(s) = \varepsilon\overset{(2)}{\underset{1}{\lambda}}\,|\overset{(2)}{\underset{1}{\lambda}}|^{-\frac{3}{2}}\,, \tag{5,8}$$

můžeme (5,6), (5,7) psát ve tvaru

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\sigma} t^\alpha = -\tfrac{1}{2}\varrho t^\alpha - \varepsilon n^\alpha\,, \tag{5,9a}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\sigma} n^\alpha = -t^\alpha + \varrho n^\alpha\,. \tag{5,9b}$$

Platí nyní tato věta:

5°. *Vektory t^α, n^α a skalární funkce ϱ jsou nezávislé na volbě parametru křivky shora uvažované.*

Důkaz této věty plyne bezprostředně z definičních vztahů (5,4), (5,5), (5,8) a z transformačních rovnic (30a, b), (31).

Jsme nyní oprávněni vyslovit tuto definici: *Vektory t^α, n^α nazýváme v tomto pořadí normalisovaným tečným, normalisovaným normálním vektorem křivky* *druhé třídy v jejím neparabolickém bodě. Skalár $\varrho(s)$ nazýváme křivostí křivky druhé třídy v E_2 v jejím neparabolickém bodě.* Vztahy (5,9a, b) nazveme *Frenetovými formulemi* pro křivku druhé třídy v E_2 v jejím neparabolickém bodě.

Poznámka 5. Pro elipsu mají Frenetovy formule tvar

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\sigma} t^\alpha = n^\alpha\,, \qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\sigma} n^\alpha = -t^\alpha \qquad (\varrho = 0)\,,$$

jak plyne ihned z (5,9a, b) a (2,1). Pro hyperbolu pak — podle (5,9a, b) a (2,1) — platí

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\sigma} t^\alpha = -n^\alpha\,, \qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\sigma} n^\alpha = -t^\alpha \qquad (\varrho = 0)\,.$$

Příklad 6. *Afinní styk křivek.* Buďtež C_1, C_2 dvě křivky druhé třídy v E_2 popsané parametrickými rovnicemi

$$\begin{aligned} C_1&: \quad \xi^\alpha = \xi^\alpha(s)\,, \\ C_2&: \quad \bar{\xi}^\alpha = \bar{\xi}^\alpha(\bar{s})\,, \end{aligned} \tag{6,1}$$

o nichž budeme předpokládat:

a) s je afinním obloukem křivky C_1, $\bar{s}$ je afinním obloukem křivky C_2;

b) křivky C_1, C_2 mají společný bod, odpovídající u křivky C_1 hodnotě parametru $s = 0$, pro křivku C_2 hodnotě parametru $\bar{s} = 0$;

c) funkce $\xi^\alpha(s)$, $\bar{\xi}^\alpha(\bar{s})$ jsou v dostatečně malém okolí bodu $s = \bar{s} = 0$ funkcemi analytickými;

d) charakteristické funkce $\overset{(2)}{\underset{1}{\lambda}}(s)$, $\overset{\overline{(2)}}{\underset{1}{\lambda}}(\bar{s})$, příslušné v tomto pořadí křivkám C_1, C_2, jsou ve společném bodě (odpovídajícím hodnotě $s = \bar{s} = 0$) různé od nuly.

Poznámka 6. Mají-li křivky C_1, C_2 společný bod a jsou-li vztaženy k libovolným parametrům (tedy ne nutně ke svým afinním obloukům), potom lze vždy zařídit, aby platily předpoklady a), b). To plyne z předpokladu, že křivky jsou druhé třídy v E_2 a z poznámky 5, rovnice (*) v prvé části práce.

Volme nyní $\underset{\circ}{s} = \underset{\circ}{\bar{s}}$ tak malé, abychom zůstali v takovém okolí bodu $s = \bar{s} = 0$, kde platí předpoklad c). Definujme nyní:

Definice. *Křivky C_1, C_2 mají ve společném bodě $s = \bar{s} = 0$ afinní styk nejméně q-tého řádu, jestliže platí*

$$\lim_{\underset{\circ}{s}\to 0} \frac{\xi^\alpha(\underset{\circ}{s}) - \bar{\xi}^\alpha(\underset{\circ}{s})}{\underset{\circ}{s}^p} = 0 \quad \text{pro} \quad p = 1, \ldots, q\,. \tag{6,2}$$

Z předchozí definice plyne věta:

6°. *Nutná a postačující podmínka pro to, aby křivky* (6,1) *měly ve společném bodě $s = \bar{s} = 0$ afinní styk nejméně q-tého řádu* ($q = 1, 2, 3, 4$), *jest:*

pro

$$1)\ q = 1:\ \underset{1}{i}^\alpha(0) = \underset{1}{\bar{i}}^\alpha(0)\,;$$

$$2)\ q = 2:\ \underset{1}{i}^\alpha(0) = \underset{1}{\bar{i}}^\alpha(0),\ \underset{2}{i}^\alpha(0) = \underset{2}{\bar{i}}^\alpha(0); \tag{6,3}$$

$$3)\ q = 3:\ t^\alpha(0) = \bar{t}^\alpha(0),\ n^\alpha(0) = \bar{n}^\alpha(0);$$

$$4)\ q = 4:\ t^\alpha(0) = \bar{t}^\alpha(0),\ n^\alpha(0) = \bar{n}^\alpha(0),\ \varrho(0) = \bar{\varrho}(0).$$

Důkaz: Z předpokladu c) plyne

$$\xi^\alpha(\underset{\circ}{s}) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\overset{\circ}{s}{}^k}{k!}\left(\frac{\mathrm{d}^k\xi^\alpha}{\mathrm{d}s^k}\right)_{s=0},$$

$$\bar{\xi}^\alpha(\underset{\circ}{s}) = \bar{\xi}^\alpha(\underset{\circ}{\bar{s}}) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\overset{\circ}{s}{}^k}{k!}\left(\frac{\mathrm{d}^k\bar{\xi}^\alpha}{\mathrm{d}\bar{s}^k}\right)_{\bar{s}=0}$$

a tedy

$$\xi^\alpha(\underset{\circ}{s}) - \bar{\xi}^\alpha(\underset{\circ}{s}) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\overset{\circ}{s}{}^k}{k!}\left\{\left(\frac{\mathrm{d}^k\xi^\alpha}{\mathrm{d}s^k}\right)_{s=0} - \left(\frac{\mathrm{d}^k\bar{\xi}^\alpha}{\mathrm{d}\bar{s}^k}\right)_{\bar{s}=0}\right\}.$$

Podmínka (6,2) implikuje

$$\left(\frac{\mathrm{d}^k\xi^\alpha}{\mathrm{d}s^k}\right)_{s=0} = \left(\frac{\mathrm{d}^k\bar{\xi}^\alpha}{\mathrm{d}\bar{s}^k}\right)_{\bar{s}=0} \quad \text{pro} \quad k = 1, 2, \ldots, q \tag{6,4}$$

a též obráceně, t. j. (6,4) $\Rightarrow$ (6,2).

Případy $(6,3_1)$, $(6,3_2)$ plynou bezprostředně z definičních rovnic (26) a podmínek (6,4).

Pro $q = 3$ platí podle (26), (6,4), $(6,3_1)$, $(6,3_2)$

$$\underset{1}{i}^\alpha(0) = \underset{1}{\bar{i}}^\alpha(0)\,, \qquad \underset{2}{i}^\alpha(0) = \underset{2}{\bar{i}}^\alpha(0)\,, \qquad \underset{1}{\overset{(2)}{\lambda}}(0)\,\underset{1}{i}^\alpha(0) = \underset{1}{\overset{\overline{(2)}}{\lambda}}(0)\,\underset{1}{\bar{i}}^\alpha(0)\,,$$

kteréžto podmínky můžeme přepsat na ekvivalentní systém podmínek

$$\underset{1}{i}^\alpha(0) = \underset{1}{\bar{i}}^\alpha(0)\,, \qquad \underset{2}{i}^\alpha(0) = \underset{2}{\bar{i}}^\alpha(0)\,, \qquad \underset{1}{\overset{(2)}{\lambda}}(0) = \underset{1}{\overset{\overline{(2)}}{\lambda}}(0)\,, \tag{6,5}$$

který, vzhledem k definičním vztahům (5,3), (5,5) vede k podmínkám $(6,3_3)$.

Pro $q = 4$ platí jednak podmínky $(6,3_3)$, jednak, podle (6,4), podmínka

$$\left(\frac{\mathrm{d}^4\xi^\alpha}{\mathrm{d}s^4}\right)_{s=0} = \left(\frac{\mathrm{d}^4\bar{\xi}^\alpha}{\mathrm{d}\bar{s}^4}\right)_{\bar{s}=0},$$

kterou, jak se snadno přesvědčíme z (27), můžeme přepsat na tvar

$$\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\underset{1}{\overset{(2)}{\lambda}}\right)_{s=0} \underset{1}{i}^\alpha(0) + \underset{1}{\overset{(2)}{\lambda}}(0)\,\underset{2}{i}^\alpha(0) = \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\underset{1}{\overset{(2)}{\lambda}}\right)_{\bar{s}=0} \underset{1}{\bar{i}}^\alpha(0) + \underset{1}{\overset{\overline{(2)}}{\lambda}}(0)\,\underset{2}{\bar{i}}^\alpha(0)\,. \tag{6,6}$$

Z předpokladu lineární nezávislosti vektorů $\underset{1}{i}^\alpha$, $\underset{2}{i}^\alpha$ (neboť jde o křivku druhé třídy) a z platnosti vztahů (6,5), jež jsou ekvivalentní s $(6,3_3)$, plyne pak z (6,6) — vedle podmínek (6,5) — navíc podmínka

$$\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\overline{\overset{(2)}{\underset{1}{\lambda}}}\right)_{\bar{s}=0} = \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\overset{(2)}{\underset{1}{\lambda}}\right)_{s=0}. \tag{6,7}$$

Podmínky (6,5) jsou pak ekvivalentní podmínkám $(6,3_3)$, podmínka (6,7) spolu s podmínkou třetí v (6,5) vede — podle (5,8) — k podmínce

$$\varrho(0) = \bar{\varrho}(0) . \tag{6,8}$$

Zřejmě je podmínka (6,8) spolu s podmínkami $(6,3_3)$ ekvivalentní podmínkám (6,5), (6,7), jak snadno nahlédneme.

Poznámka 7. Z $(6,3)_{3,4}$ je vidět, že v podmínkách afinního styku 3. a 4. řádu vystupují pouze veličiny nezávislé na volbě parametru křivky.

Příklad 7. V tomto příkladě uvedeme jednoduchou aplikaci theorie z příkladu 6.

Definice: *Kuželosečku, která má s danou křivkou styk (afinní) třetího řádu, budeme nazývat oskulační kuželosečkou křivky v uvažovaném bodě.*

Uvažujme nyní tři případy:

A) Nechť C_1 je křivka druhé třídy v E_2 s parametrickými rovnicemi

$$\xi^\alpha = \xi^\alpha(s) , \qquad \alpha = 1, 2 , \tag{7,1a}$$

kde s je její afinní oblouk a která má za definiční obor nějaký interval $(\underset{1}{s}, \underset{2}{s})$ obsahující bod $s = 0$. Nechť v bodě $s = 0$ platí

$$\overset{(2)}{\underset{1}{\lambda}} < 0 . \tag{7,1b}$$

Položme si za úkol stanovit elipsu, jež má v bodě $s = 0$ s danou křivkou afinní styk 3. řádu.

Pišme, podle (2,3a), parametrické rovnice příslušné elipsy ve tvaru

$$\bar{\xi}^\alpha(s) = A^\alpha \sin \bar{s} + B^\alpha \cos \bar{s} + C^\alpha .^{3)} \tag{7,2}$$

Pro elipsu (7,2) spočteme vektory $\bar{t}^\alpha$, $\bar{n}^\alpha$ v bodě $s = \bar{s} = 0$. Podle (2,3a), (2,1) a (7,2) dostaneme

$$\overline{\underset{1}{i}}{}^\alpha(\bar{s}) = A^\alpha \cos \bar{s} - B^\alpha \sin \bar{s} ,$$

$$\overline{\underset{2}{i}}{}^\alpha(\bar{s}) = - A^\alpha \sin \bar{s} - B^\alpha \cos \bar{s} , \qquad \overset{(2)}{\underset{1}{\lambda}} \equiv - 1$$

a tedy

$$\overline{\underset{1}{i}}{}^\alpha(0) = A^\alpha , \qquad \overline{\underset{2}{i}}{}^\alpha(0) = - B^\alpha , \qquad \overset{(2)}{\underset{1}{\lambda}}(0) = - 1 .$$

---

[3]) Bereme tedy pro elipsu parametr $\bar{s}$, jenž je jejím afinním obloukem.

Dosadíme-li odtud do definičních rovnic (5,4), (5,5), dostaneme

$$\bar{t}^\alpha(0) = A^\alpha\,, \qquad \bar{n}^\alpha(0) = -B^\alpha\,. \tag{7,3}$$

Tedy podmínka, aby elipsa (7,2) měla s křivkou (7,1a) v bodě $s = 0$ styk třetího řádu, vede na podmínky (podle $(6,3_3)$)

$$\xi^\alpha(0) = B^\alpha + C^\alpha\,, \qquad t^\alpha(0) = A^\alpha\,, \qquad n^\alpha(0) = -B^\alpha\,.$$

Dosadíme-li odsud do (7,2), dostaneme rovnice hledané oskulační elipsy

$$\bar{\xi}^\alpha(s) = \xi^\alpha(0) + t^\alpha(0)\sin s - n^\alpha(0)\,(\cos s - 1)\,.$$

Je-li $\underset{\circ}{s}$ libovolným bodem křivky (7,1a), v němž $\overset{(2)}{\underset{1}{\lambda}}(\underset{\circ}{s}) < 0$, dostaneme snadno pro hledanou elipsu parametrické vyjádření (píšeme-li místo $\bar{\xi}^\alpha(s)$ symbol $\xi^\alpha_e(s)$)

$$\xi^\alpha_e(s) = \xi^\alpha(\underset{\circ}{s}) + t^\alpha(\underset{\circ}{s})\sin(s - \underset{\circ}{s}) + n^\alpha(\underset{\circ}{s})(1 - \cos(s - \underset{\circ}{s}))\,, \qquad \alpha = 1, 2\,. \tag{7,4}$$

Poznámka 8. A) Je-li daná křivka (7,1a) elipsou o rovnicích (7,2), potom, jak se snadno přesvědčíme, splývá oskulační elipsa v každém jejím bodě s danou elipsou (7,2), což samozřejmě očekáváme.

B) Nechť C_2 je křivka druhé třídy v E_2 s parametrickými rovnicemi

$$\xi^\alpha = \xi^\alpha(s)\,, \qquad \alpha = 1, 2\,, \tag{7,5a}$$

kde s je její afinní oblouk a která má za definiční obor nějaký otevřený interval $(\underset{1}{s}, \underset{2}{s})$, obsahující bod $s = 0$. Nechť v bodě $s = 0$ platí

$$\overset{(2)}{\underset{1}{\lambda}}(0) > 0\,. \tag{7,5b}$$

Vytkněme si za úkol stanovit hyperbolu, která má v bodě $s = 0$ styk s křivkou (7,5a) třetího řádu. Pišme, podle (3,3a) rovnice příslušné hyperboly ve tvaru

$$\xi^\alpha_h = A^\alpha \sinh s + B^\alpha \cosh s + C^\alpha\,. \tag{7,6}$$

Pro hyperbolu (7,6) je podle (3,1)

$$\underset{1}{i}{}^\alpha_h(0) = A^\alpha\,, \qquad \underset{2}{i}{}^\alpha_h(0) = B^\alpha\,, \qquad \overset{(2)}{\underset{1}{\lambda}}(0) = 1\,.$$

Dosadíme-li odsud do definičních rovnic (5,4), (5,5) dostaneme

$$t^\alpha_h(0) = A^\alpha\,, \qquad n^\alpha_h(0) = -B^\alpha\,. \tag{7,7}$$

Tedy podmínka, aby hyperbola (7,6) měla s danou křivkou v bodě $s = 0$ styk řádu třetího, vede — podle $(6,3_3)$ — na podmínky

$$\xi^\alpha(0) = B^\alpha + C^\alpha\,, \qquad t^\alpha(0) = A^\alpha\,, \qquad n^\alpha(0) = -B^\alpha\,.$$

Odsud a z (7,6) plynou pak rovnice hledané hyperboly

$$\xi^\alpha_h(s) = \xi^\alpha(0) + t^\alpha(0)\sinh s + n^\alpha(0)(1 - \cosh s)\,.$$

Je-li $\underset{\circ}{s}$ libovolným bodem křivky (7,5a), kde $\overset{(2)}{\underset{1}{\lambda}}(\underset{\circ}{s}) > 0$, dostaneme snadno pro hledanou hyperbolu z předchozího vyjádření

$$\xi^\alpha_h(s) = \xi^\alpha(\underset{\circ}{s}) + t^\alpha(\underset{\circ}{s}) \sinh(s - \underset{\circ}{s}) + n^\alpha(\underset{\circ}{s})(1 - \cosh(s - \underset{\circ}{s}))\,. \tag{7,8}$$

Hyperbola s parametrickými rovnicemi (7,8) je hledaná oskulační hyperbola křivky (7,5a) v bodě $\underset{\circ}{s}$.

Poznámka 9. Analogicky k poznámce 8 můžeme v případě, že daná křivka (7,5a) je hyperbolou, snadno se přesvědčit, že oskulační hyperbola v každém jejím bodě s ní splyne.

Poznámka 10. Předpoklad d) učiněný o křivkách C_1, C_2 na počátku příkladu 6 byl pro definici styku dvou křivek nepodstatný. Podstatné předpoklady jsou a), b), c).

Je-li na příklad C křivka druhé třídy v E_2 s parametrickými rovnicemi $\xi^\alpha = \xi^\alpha(s)$, $\alpha = 1, 2$, kde s je její afinní oblouk a která má za definiční obor nějaký interval $(\underset{1}{s}, \underset{2}{s})$ a je-li $s = 0$ z intervalu $(\underset{1}{s}, \underset{2}{s})$ takový, že $\overset{(2)}{\underset{1}{\lambda}}(0) = 0$, potom je možno jednoznačně určit parabolu, která má s křivkou C v tomto bodě styk třetího řádu. Pro rovnice této, tak zvané oskulační paraboly, dostaneme snadno z podmínek (6,5)

$$\xi^\alpha_p(s) = \tfrac{1}{2}\underset{2}{i}^\alpha(0)\, s^2 + \underset{1}{i}^\alpha(0)\, s + \xi^\alpha(0)\,, \qquad \alpha = 1, 2\,.$$

Je-li $s = \underset{\circ}{s}$ libovolným bodem z intervalu $(\underset{1}{s}, \underset{2}{s})$, v němž $\overset{(2)}{\underset{1}{\lambda}}(\underset{\circ}{s}) = 0$, potom parametrické rovnice oskulační paraboly v $\underset{\circ}{s}$ jsou

$$\xi^\alpha_p(s) = \tfrac{1}{2}\underset{2}{i}^\alpha(\underset{\circ}{s})(s - \underset{\circ}{s})^2 + \underset{1}{i}^\alpha(\underset{\circ}{s})(s - \underset{\circ}{s}) + \xi^\alpha(\underset{\circ}{s})\,, \tag{7,9}$$

jak se snadno přesvědčíme.

Kdyby daná křivka byla parabolou, pak v každém jejím bodě je oskulační parabola s danou parabolou identická.

Výsledky z příkladu 6 můžeme stručně shrnout takto:

7°. *Budiž C křivka druhé třídy v E_2. Potom v každém jejím bodě je jednoznačně určena oskulační kuželosečka, a to:*

a) *elipsa, je-li $\overset{(2)}{\underset{1}{\lambda}} < 0$ v tomto bodě,*

b) *hyperbola, je-li $\overset{(2)}{\underset{1}{\lambda}} > 0$ v tomto bodě,*

c) *parabola, je-li $\overset{(2)}{\underset{1}{\lambda}} = 0$ v tomto bodě.*

Tím je dána základní klasifikace bodů na regulární křivce druhé třídy v E_2. Body, v nichž $\overset{(2)}{\underset{1}{\lambda}} < 0$, nazýváme eliptickými, body, v nichž $\overset{(2)}{\underset{1}{\lambda}} > 0$ nazýváme hyperbolickými, body, v nichž $\overset{(2)}{\underset{1}{\lambda}} = 0$ jsou pak parabolické body na dané křivce.

Příklad 8. V příkladě 5 byl definičním vztahem (5,8) zaveden pro neparabolické body křivky druhé třídy v E_2 invariant ϱ.

Položíme-li si nyní otázku najít v E_2 křivky druhé třídy, pro něž

$$\varrho = \text{konstanta}\,, \tag{8,1}$$

potom dojdeme k jednoduchým speciálním rovinám křivek druhé třídy v E_2.

Podrobný rozbor je poměrně snadný, avšak pracný. Ve výsledcích dojdeme k této klasifikaci:

A) Případ $\varrho \equiv 0$. Ježto předpokládáme $\overset{(2)}{\underset{1}{\lambda}} \neq 0$, vedou tyto podmínky k známému případu tříd hyperbol a elips v E_2, jak snadno vyplývá z (5,8) a příkladů 1, 2.

B) Případ $\varrho = k$ (konstanta) $\neq 0$, $\overset{(2)}{\underset{1}{\lambda}}(s) > 0$. V tomto případě je třeba ještě rozeznávat:

a) $|k| \neq \sqrt{2}$ $(k \neq 0)$. V tomto případě dojdeme k rovině křivek druhé třídy v E_2, které se dají popsat parametrickými rovnicemi

$$\xi^\alpha(t) = A^\alpha t^a + B^\alpha t + C^\alpha\,, \qquad \alpha = 1, 2\,; \qquad t > 0\,, \tag{8,2a}$$

kde $A^\alpha, B^\alpha, C^\alpha$, $\alpha = 1, 2$ jsou libovolné konstanty, $A^1B^2 - A^2B^1 \neq 0$, při čemž

$$a \in (-\infty, -1) \text{ resp. } a \in (-1, 0), \text{ resp. } a \in (0, \tfrac{1}{2}), \text{ resp. } a \in (2, \infty)\,. \tag{8,2b}$$

b) $|k| = \sqrt{2}$. V tomto případě lze parametrické rovnice hledaných křivek uvést na jeden z těchto tvarů:

I.

$$\xi^\alpha(s) = A^\alpha s^3 + B^\alpha \log s + C^\alpha\,, \qquad \alpha = 1, 2\,, \qquad s > 0\,, \tag{8,4a}$$

kde $A^\alpha, B^\alpha, C^\alpha$, $\alpha = 1, 2$ jsou konstanty vázané pouze podmínkou $A^1B^2 - A^2B^1 \neq 0$.

II.

$$\xi^\alpha(t) = {}^*A^\alpha t + {}^*B^\alpha \log_a t + {}^*C^\alpha\,, \qquad \alpha = 1, 2\,, \qquad t > 0\,, \tag{8,4b}$$

kde a je nějaké nezáporné číslo, $a \neq 1$ a ${}^*A^\alpha$, ${}^*B^\alpha$, ${}^*C^\alpha$ jsou libovolné konstanty ${}^*A^1{}^*B^2 - {}^*A^2{}^*B^1 \neq 0$.

III.
$$\xi^\alpha(t) = \bar{A}^\alpha e^\tau + \bar{B}^\alpha \tau + \bar{C}^\alpha\,, \qquad \alpha = 1, 2\,; \qquad \tau \in (-\infty, \infty)\,, \quad (8{,}4c)$$
při čemž $\bar{A}^\alpha$, $\bar{B}^\alpha$, $\bar{C}^\alpha$, $\alpha = 1, 2$ jsou opět libovolné konstanty, $\bar{A}^2\bar{B}^1 - \bar{A}^1\bar{B}^2 \neq 0$.

Připomeňme ještě, že v případech (8,2a), (8,4b), (8,4c) nejsou parametry afinními oblouky.

C) Případ $\varrho = k$ (konstanta) $\neq 0$, $\overset{(2)}{\underset{1}{\lambda}}(s) < 0$. V tomto případě je třeba rozeznávat tři možnosti:

a) $|k| > 4$. Rovnice hledané roviny křivek druhé třídy v E_2 lze psát zde ve tvaru
$$\xi^\alpha(t) = A^\alpha t^a + B^\alpha t + C^\alpha\,, \qquad \alpha = 1, 2\,; \qquad t > 0, \qquad (8{,}5a)$$
kde A^α, B^α, C^α, $\alpha = 1, 2$, jsou libovolné konstanty, $A^1B^2 - A^2B^1 \neq 0$ a dále
$$a \in (1, 2) \quad \text{resp.} \quad a \in (\tfrac{1}{2}, 1)\,. \qquad (8{,}5b)$$

b) $|k| < 4$. Parametrickým rovnicím hledaných křivek je možno dát tvar
$$\xi^\alpha(t) = A^\alpha e^{kt} \sin t + B^\alpha e^{kt} \cos t + C^\alpha\,, \qquad \alpha = 1, 2\,; \qquad (8{,}6a)$$
$$t \in (-\infty, \infty)\,,$$
kde A^α, B^α, C^α, $\alpha = 1, 2$ jsou libovolné konstanty, $A^1B^2 - A^2B^1 \neq 0$, při čemž
$$k \in (0, \infty)\,. \qquad (8{,}6b)$$

c) $|k| = 4$. Zde je možno hledané křivky popsat parametrickým vyjádřením
$$\xi^\alpha(t) = A^\alpha t + B^\alpha (\log t)\, t + C^\alpha\,, \qquad \alpha = 1, 2\,; \qquad t > 0\,, \quad (8{,}7)$$
kde A^α, B^α, C^α, $\alpha = 1, 2$ jsou opět libovolné konstanty vázané podmínkou $A^1B^2 - A^2B^1 \neq 0$. Případy A), B), C) řeší náš problém, kladený podmínkou (8,1), úplně. Poznamenejme ještě, že v případech (8,5a), (8,6) a (8,7) není parametr t afinním obloukem.

Poznámka 11. Všimněme si, že vztahy (8,2a, b) spolu se vztahy (8,5a, b) dávají křivky s parametrickým popisem
$$\xi^\alpha(t) = A^\alpha t^a + B^\alpha t + C^\alpha\,, \qquad \alpha = 1, 2\,; \qquad t > 0\,, \qquad (8{,}8)$$
kde a může nabývat všech možných reálných hodnot s výjimkou čísel -1, 0, $\frac{1}{2}$, 1, 2. Snadno nahlédneme, že pro $a = 0$ bychom dostali přímku a nikoliv křivku druhé třídy v E_2. Pro $a = 2$ a $a = \frac{1}{2}$ by předchozí rovnice (8,8) vyjadřovaly parabolu (tedy křivku, pro níž není invariant definován). Případ $a = 1$ vede opět na přímku v E_2, konečně případ $a = -1$ vede na hyperbolu, pro níž $\varrho = 0$.

Pro volbu $A^1 = 0$, $A^2 = 1$, $B^1 = 1$, $B^2 = 0$, $C^\alpha = 0$ dostaneme speciální křivku systému (8,8) v explicitním vyjádření (položíme-li $x = t$)
$$y = x^a\,, \qquad a \in (-\infty, \infty)\,, \qquad a \neq -1, 0, \tfrac{1}{2}, 1, 2\,.$$

Odůvodněně můžeme nyní systém křivek (8,8) nazvat *třídou obecných mocninných křivek v E_2*. Ty jsou podle předchozích výsledků dvojího typu:

1. mocninné křivky s body vesměs hyperbolickými s konstantní afinní křivostí ϱ, $\varrho \neq 0$, $|\varrho| \neq \sqrt{2}$;

2. mocninné křivky s body vesměs eliptickými s konstantní afinní křivostí ϱ, $|\varrho| > 4$.

Vedle uvedené třídy obecných mocnin v E_2 existují další třídy křivek druhé třídy v E_2 s konstantní afinní křivostí. Je to třída křivek (8,4c), do níž patří též křivka

$$x = t\,, \qquad y = e^t\,.$$

Můžeme tedy třídu křivek (8,4c) nazvat *třídou exponenciálních křivek v E_2*.

Křivky s parametrickým vyjádřením (8,6a) obsahují křivku

$$x = e^{kt} \sin t\,, \qquad y = e^{kt} \cos t\,, \qquad k > 0\,,$$

což je v kartézském systému spirála.

Příklad 9. Pro křivku druhé třídy v E_2 danou v explicitním tvaru

$$y = f(x)\,,$$

dostaneme, jak se snadným výpočtem přesvědčíme

$$\overset{(2)}{\underset{1}{\lambda}} = k^2\{\tfrac{5}{9} y''^{-\frac{8}{3}} (y''')^2 - \tfrac{1}{3} y''^{-\frac{5}{3}} y^{(\mathrm{IV})}\}\,,$$

kde k je konstanta různá od nuly. Tento vztah lze též přepsat na tvar

$$\overset{(2)}{\underset{1}{\lambda}} = \frac{k^2}{2} (y''^{-\frac{2}{3}})''\,.$$

Jako speciální případ plyne z předchozího a z příkladů 1, 2, 3 diferenciální rovnice pro všechny kuželosečky v rovině

$$(y''^{-\frac{2}{3}})''' = 0\,.$$